## Diferencijalna Geometrija: Test 2 23/12/2011

**Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.**

**Test traje 1 sat i 30 minuta.**

**Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.**

**Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.**

**Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.**

**Zadatak 1.** Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a) (i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu formu površi $\sigma$. [1]

(ii) Napišite formule za Gaussovu krivinu $K$ i srednju krivinu $H$ pomoću koeficijenata prve i druge fundamentalne forme površi $\sigma$. [2]

(iii) Definišite Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u, v)$ površi $\sigma$. [2]

(b) (i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$ paralelni vektori za sva $u, v$. [2]

(ii) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K\sigma_u \times \sigma_n$$

[Pomoć: Sjetite se Lagrangeovog identiteta $(a \times b).(c \times d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$] [4]

(c) Koristeći se Gaussovim preslikavanjem (ili drugačije) pokažite da Möbiusova traka nije orijentabilna. [4]

(d) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi parametrizirane sa $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. [5]

(e)

(i) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [2]

(ii) Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. [5]

(f)

(i) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [1]

(iii) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u, v) \mapsto (u^3 - 3u(1 + v^2), v^3 - 3v(1 + u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]

(g) Neka je $(u, v) \mapsto \xi(u, v)$ tangencijalno vektorsko polje duž parametrizovane površi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* $(u, v)$ u pravcu $(\lambda, \mu)$ ovog vektorskog polja. [2]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [2]

**Rješenje.**

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.
$\mathrm{II} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v$.

(ii)

$$H=\frac{Eg-2Ff+eG}{2(EG-F^2)},\quad K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}.$$

(iii) Linija $t\mapsto \mathbf{x}(u,v)+t\,(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)(u,v)$ se zove <u>normalnom linijom</u> površi $\mathbf{x}$ u $\mathbf{x}(u,v)$; jedinično normalno vektorsko polje

$$\mathbf{n}=\tfrac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|}=\tfrac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

se zove <u>normalom</u> ili <u>Gaussovim preslikavanjem</u> od $\mathbf{x}$.

(b)

(i) $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_u\times\mathbf{n}_v)=\mathbf{n}_u(\mathbf{n}.\mathbf{n}_v)-\mathbf{n}_v(\mathbf{n}.\mathbf{n}_u)=0-0=0$, pa su vektori paralelni.

(ii)

(c) Posmatrajmo Möbiusovu traku

$$(u,v)\mapsto \mathbf{x}(u,v):=((r+v\cos\tfrac{u}{2})\cos u,(r+v\cos\tfrac{u}{2})\sin u,v\sin\tfrac{u}{2}).$$

Ovdje

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,0)&=r\,(-\sin u,\cos u,0)\\ \mathbf{x}_v(u,0)&=(\cos\tfrac{u}{2}\cos u,\cos\tfrac{u}{2}\sin u,\sin\tfrac{u}{2})\end{aligned}$$

i

$$\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v(u,0)=r\,(\sin\tfrac{u}{2}\cos u,\sin\tfrac{u}{2}\sin u,-\cos\tfrac{u}{2})$$

i $|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v(u,0)|\equiv r$ tako da

$$N(u,0)=(\sin\tfrac{u}{2}\cos u,\sin\tfrac{u}{2}\sin u,-\cos\tfrac{u}{2}).$$

Konkretno, $N(0,0)=(0,0,-1)$ i $N(2\pi,0)=(0,0,1)$ iako je $\mathbf{x}(2\pi,0)=\mathbf{x}(0,0)$: jednična normala se okreće kada idemo oko Möbiusove trake jednom — Möbiusova traka *nije* orijentabilna.

(d) Imamo da je

$$\mathbf{x}_u=(\cos v,\sin v,0),\quad \mathbf{x}_v=(-u\sin v,u\cos v,1).$$

Stoga je Gaussovo preslikavanje je onda

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v|}=(\sin v,-\cos v,u)/\sqrt{1+u^2}$$

(primjetiti - negacija ovog izraza je tadjor validan odgovor za $\mathbf{n}$). Koeficijenti prve fundamentalne forme su

$$E=|\mathbf{x}_u|^2=1,\quad F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=0,\quad G=|\mathbf{x}_v|^2=u^2+1.$$

Kako je

$$\mathbf{x}_{uu}=0,\quad \mathbf{x}_{uv}=(-\sin v,\cos v,0),\quad \mathbf{x}_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0),$$

koeficijenti druge fundamentalne forme su

$$e=\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{n}=0,\quad f=\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{n}=-1/\sqrt{1+u^2},\quad g=\mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{n}=0.$$

Stoga je operator oblika

$$S=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}Ge-Ff & Gf-Fg\\ Ef-Fe & Eg-Ff\end{pmatrix}=\frac{1}{1+u^2}\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{1+u^2}\\ -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\\ -\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} & 0\end{pmatrix},$$

(napomena - negacija je takodjer tačan odgovor zavisno od znaka $\mathbf{n}$), pa je stoga Gaussova krivina

$$K=\det S=-\frac{1}{(1+u^2)^2},$$

a srednja krivina

$$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}S=0.$$

(e)

(i) Površ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se zove linijska površ ako prima (lokalno) parametrizaciju $\mathbf{x}$ forme

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\,\eta(u),$$

gdje je $u \mapsto \gamma(u)$ regularlna kriva u $\mathbb{R}^3$ i $u \mapsto \eta(u) \in S^2$ jedinično vektorsko polje duž $\gamma$.

Razvojna površ je linijska površ $(u,v) \mapsto \gamma(u) + v\,\eta(u)$ čije je Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{n}(u)$ jedino zavisno o $u$, tj.,

$$\mathbf{n}_v \equiv 0.$$

(ii) Prateći primjer iz sekcije 2.4, linija $y = 1$, $z = x$ leži na $\Sigma$: parametrišemo liniju pomoću $v \mapsto (\frac{1}{\sqrt{2}}v, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}v)$; kako bismo vidjeli da je jednačina koja definiše $\Sigma$ zadovoljena,

$$\frac{1}{2}v^2 + 1 = 1 + \frac{1}{2}v^2.$$

Takodje, znamo da je površ površ revolucije (jer je 0-ti nivo funkcije $F(x,y,z) = (x^2+y^2) - z^2$, čija je zavisnost o $x$ i $y$ jedino u obliku $x^2+y^2$, tj., udaljenost tačke od $z$-ose) oko $z$-ose. Odavdje dobivamo parametrizaciju površi rotirajući gornju liniju oko $z$-ose:

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + v\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je $\Sigma$ linijska površ sa $\gamma(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$ i $\eta(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, 1)$.

(f)

(i) $F = 0$ i $E = G$.

(ii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

(iii) Označicemo parametrizaciju sa $\mathbf{x}$, kao i obično. Prvo provjerimo konformalnost: sa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= 3(u^2 - (1+v^2), -2uv, 2u) \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= 3(-2uv, v^2 - (1+u^2), -2v) \end{aligned}$$

koeficijenti prve fundamentalne forme postaju

$$\begin{aligned} E(u,v) &= 9\{(u^2 - (1+v^2))^2 + 4u^2(1+v^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2 \\ G(u,v) &= 9\{(v^2 - (1+u^2))^2 + 4v^2(1+u^2)\} &&= 9(1+u^2+v^2)^2 \\ F(u,v) &= 9\{-2uv(u^2 - v^2 - 1 + v^2 - u^2 - 1) - 4uv\} &&= 0 \end{aligned}$$

što pokazuje da $E = G$ i $F \equiv 0$ tako da je $\mathbf{x}$ konformalno.

Kako bismo provjerili da je $\mathbf{x}$ minimalno mi izračunamo

$$\Delta\mathbf{x}(u,v) = 6(u,-v,1) + 6(-u,v,-1) = (0,0,0)$$

tako da je $\mathbf{x}$ minimalna, jer je konformalna i harmonična.

(g) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalni vektorsko polje duž para–metrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$; njegov kovarijantni izvod u $(u,v)$ u pravcu $(\lambda,\mu)$ je

$$(\nabla_{(\lambda,\mu)}\xi)|_{(u,v)} := \{(\lambda\xi_u + \mu\xi_v) - ((\lambda\xi_u + \mu\xi_v)\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}\}(u,v).$$

$\nabla$ se takodjer zove Levi-Civita konekcija. Koeficijenti $\Gamma^k_{ij}$ u

$$\nabla_j(\partial_i\mathbf{x}) := \partial_j\partial_i\mathbf{x} - (\partial_j\partial_i\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = \textstyle\sum_k \Gamma^k_{ij}\,\partial_k\mathbf{x}$$

se zovu Christoffelovi simboli.

$$\begin{aligned} \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_u &=: \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_u =: \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v; \\ \nabla_{(1,0)}\mathbf{x}_v &=: \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{21}\mathbf{x}_v, \quad \nabla_{(0,1)}\mathbf{x}_v =: \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$