

Diferencijalna Geometrija: Test 2 23/12/2011

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a) (i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu formu površi σ . [1]

(ii) Napišite formule za Gaussovu krivinu K i srednju krivinu H pomoću koeficijenata prve i druge fundamentalne forme površi σ . [2]

(iii) Definišite Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u, v)$ površi σ . [2]

(b) (i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$ paralelni vektori za sva u, v . [2]

(ii) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) \cdot \mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K \sigma_u \times \sigma_v$$

[Pomoć: Sjetite se Lagrangeovog identiteta $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$] [4]

(c) Koristeći se Gaussovim preslikavanjem (ili drugačije) pokažite da Möbiusova traka nije orijentabilna. [4]

(d) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi parametrizirane sa $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. [5]

(e)

(i) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [2]

(ii) Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. [5]

(f)

(i) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna*. [1]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [1]

(iii) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u, v) \mapsto (u^3 - 3u(1 + v^2), v^3 - 3v(1 + u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]

(g) Neka je $(u, v) \mapsto \xi(u, v)$ tangencijalno vektorsko polje duž parametrizovane površi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u, v) u pravcu (λ, μ) ovog vektorskog polja. [2]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole*. [2]