

Diferencijalna Geometrija: Test 1 23/02/2012

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [1]

(b) Formulшите i dokažite *Frenetove jednačine*. [3]

(c) Kada kažemo da se $t \mapsto F(t) \in SO(3)$ zove prilagodjeni okvir za regularnu krivu $t \mapsto \gamma(t)$? [2]

(d) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. [1]

(e) Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ , N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [3]

(f) Posmatrajmo krivu $t \mapsto \gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$.

(i) Dokažite da je kriva γ regularna. [1]

(ii) Pokažite da je

$$t \mapsto N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 1)$$

jedinično normalno vektorsko polje za γ . [3]

(iii) Nadajte okvir $F = (T, N, B)$ prilagodjen za strip (N, γ) i izračunajte njegovu torziju τ . [4]

(g) Nadajte paralelno normalno vektorsko polje $\tilde{N}$ za γ . Možete ga zapisati u obliku

$$\tilde{N}(t) = \cos(\varphi(t))N(t) + \sin(\varphi(t))B(t),$$

gdje je $\varphi(t)$ funkcija po t koju trebate odrediti. [Napomena: $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} dt = \operatorname{arcsch}(\frac{t}{\sqrt{2}}) + C$] [4]

(h) Neka je $C = \{(x, y, z) | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, gdje

$$F_1(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1 \text{ i } F_2(x, y, z) := \sqrt{3}x + z.$$

(i) Dokažite da je C definiše regularnu krivu. [2]

(ii) Nadajte regularnu parametrizaciju za gornju krivu. [4]

(i) Naći krivinu κ i torziju τ krive date u (a). [4]

(j)

(i) Navedite fundamentalnu teoremu prostornih krivih. [2]

(ii) Dokažite postojanje u gornjoj teoremi (izostavite jedinstvenost). [5]