Diferencijalna Geometrija: Test 2 23/02/2012

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ regularna parametrizovana površ.

(a) (i) Definišite prvu i drugu fundamentalnu formu površi σ. [1]

(ii) Napišite formule za Gaussovu krivinu K i srednju krivinu H pomoću koeficijenata prve i druge fundamentalne forme površi σ. [1]

(iii) Definišite Gaussovo preslikavanje $\mathbf{n}(u,v)$ površi σ. [1]

(b) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [2]

(c) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate. [4]

(d) Kako bi površ bila izometrična ravni, potrebno je i dovoljno da je Gaussova krivina $K \equiv= 0$. Skicirati dokaz, te jasno navesti sve rezultate koji se koriste. [7]

(e) Pokažite da je kupa $(r,\theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni. [5]

(f)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [2]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t),v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t),v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [3]

(g) Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in I\!R^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom. [3]

(h) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [1]

(i) Neka $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [4]

(ii) Nadjite konformalnu parametrizaciju $\mathbf{x}$ površi

$$\Sigma := \{(x,y,z) \in I\!R^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

[4]

(i) Neka je $(u,v) \mapsto \xi(u,v)$ tangencijalno vektorsko polje duž parametrizovane površi $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$.

(i) Definišite *kovarijantni izvod* (u,v) u pravcu (λ,μ) ovog vektorskog polja. [1]

(ii) Definišite *Christoffelove simbole.* [1]