Diferencijalna Geometrija: Test 2 27/12/2013

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 1 sat i 30 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a)

(i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$ paralelni vektori za sva u, v.

(ii) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K\sigma_u \times \sigma_v$$

[Pomoć: Sjetite se Lagrangeovog identiteta $(a \times b).(c \times d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$]

(b) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u, v) \mapsto (u^3 - 3u(1 + v^2), v^3 - 3v(1 + u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ.

(c) Izraunajte drugu fundamentalnu formu helikoida.

(d) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate.

(e) Pokažite da je kupa $(r, \theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni.

Zadatak 2.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao.

(b) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ.

(c) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_1$ i da se obje površi sijeku pod konstantnm uglom α, $\cos\alpha \neq \pm 1$. Pokažite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_2$.

(d) Stoga, dajte geometrijski argument da su meridijani, $v = const$, površi revolucije $(u, v) \mapsto (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ linije krivine.

(e) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom.