Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 04/02/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Možete uraditi sva pitanja, no ocjena će se dodijeliti za NAJBOLJA 3 odgovora na 4 ponudjena zadatka.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [2]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [3]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [7]

(c) Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva i definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(t) \times \beta'(t) dt.$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju. (Pomoć: $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$.) [8]

Rješenje.

(a)

(i) Principalna normala je glatko vektorsko polje $s \mapsto N(s)$ tako da, za sva s:

$$|N(s)| = 1, N(s) \perp \gamma'(s) \text{ i } \gamma''(s) \in span\{\gamma'(s), N(s)\}$$

(ii) Principalni okvir je glatko preslikavanje $s \mapsto F = (T, N, B) \in SO(3)$, gdje: $T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ je jedinično tangentno vektorsko polje, N je principalna normala i $B = T \times N$ je binormala.

(b) Principalni okvir $F = (T, N, B)$ dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ zadovoljava

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

gdje su $\kappa := T' \cdot N$ i $\tau := N' \cdot B$ krivina i torzija krive γ.

Jer je $s \mapsto F(s) \in SO(3)$ imamo $F^{-1} = F^T$ i stoga

$$\Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \cdot T' & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & N \cdot N' & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & B \cdot B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Prvo, posmatrajmo $\gamma = \int \beta \times \beta'(t) dt$: imamo

$$\begin{aligned} \gamma' &= \beta \times \beta', \\ \gamma'' &= \beta \times \beta'', \\ \gamma''' &= \beta' \times \beta'' + \beta \times \beta'''. \end{aligned}$$

Sada, $|\beta|^2 \equiv 1$ tako da $\beta' \perp \beta$ i

$$|\gamma'|^2 = |\beta|^2|\beta'|^2 = |\beta'|^2 > 0$$

jer je β regularna; stoga je γ regularna.

Kako bismo izračunali torziju, koristimo formulu

$$\tau = \frac{|\gamma',\gamma'',\gamma'''|}{|\gamma'\times\gamma''|^2} = \frac{((\beta\times\beta')\times(\beta\times\beta'')\cdot(\beta'\times\beta''+\beta\times\beta'''))}{|(\beta\times\beta')\times(\beta\times\beta'')|^2} = \frac{|\beta,\beta',\beta''|^2}{|\beta|^2|\beta,\beta',\beta''|^2} \equiv 1$$

jer je $(\beta \times \beta') \times (\beta \times \beta'') = \beta\,|\beta, \beta', \beta''|$. Ovdje nailazimo na problem kada $|\beta, \beta', \beta''| = 0$, tj., ako su β, β' i β'' linearno zavisni. Ako se ovo dogodi u izolovanim tačkama, to ne stvara problem jer je τ glatka funkcija i stoga će biti 1 u tim tačkama zbog neprekidnosti; ako se to dogodi na intervalu onda γ' i γ'' postaju linearno zavisne na tom intervalu i taj dio krive je prava linija sa nejedinstvenom torzijom (stoga, možemo smatrati da prava linija ima torziju $\tau \equiv 1$).

Zadatak 2. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 5x^2 + y^2 = 1 + z^2, z = y + 1\}$.

(a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu tako što ćete pokazati da su gradijenti $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$; [3]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [4]

(b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [2]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

(c) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara – metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(**Pomoć**: Razmislite o koeficijentima koje trebate prije računanja!) [5]

(d) Zaključite iz (b) i (c) da je, za regularnu parametriziranu krivu $t \mapsto \gamma(t)$,

$$\kappa^2 = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}.$$

[4]

Rješenje.

(a)

(i) Uzmimo $F_1(x, y, z) := 5x^2 + y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x, y, z) := y - z + 1$;
Onda $\nabla F_1(x, y, z) \times \nabla F_2(x, y, z) = 2(z - y, 5x, 5x) = 2(1, 5x, 5x) \neq 0$ jer je $z = y + 1$;
stoga su $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$.
Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

(ii) Posmatrajmo $0 = F_1(x, y, y + 1) = 5x^2 - 2y - 2$, što daje $y = \frac{5}{2}x^2 - 1$;
stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t, \frac{5}{2}t^2 - 1, \frac{5}{2}t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (1, 5t, 5t) \neq 0, \forall t$.

(b)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2|\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(c) Računamo

$$\tilde{\gamma}'(s) = t'(s)\gamma(t(s))$$

$$\tilde{\gamma}''(s) = t'^2(s)\gamma''(t(s)) + ?\gamma'(t(s))$$

tako da je $\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma'(t(s)) \times \gamma''(t(s))|^2 t'^{(2\cdot 3)}(s)}{|\gamma'(t(s))|^6 t'^6(s)} = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t(s))$.

(d) Ako je $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ reparametrizacija dužinom luka krive γ, onda, jer je $|\tilde{\gamma}'| \equiv 1$,
$\kappa^2(t) = \tilde{\kappa}^2(s) = \frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t)$

Zadatak 3.

(a) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.

(i) Šta je *prva fundamentalna forma* I površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna.* [2]

(b)

(i) Neka $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$ parametrizira površ revolucije; nadjite uslove za r i h kako bi $\mathbf{x}$ bila konformalna površ. [4]

(ii) Nadjite konformalnu parametrizaciju $\mathbf{x}$ površi

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

[4]

(c) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ, kao u (a).

(i) Šta je *druga fundamentalna forma* $\mathbb{I}$ površi $\mathbf{x}$? [2]

(ii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ?* [2]

(d) Pokažite da je površ Σ, definisana u (b), minimalna površ. [4]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ sa $E = |\mathbf{x}_u|^2$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ i $G = |x_v|^2$.

(ii) $F = 0$ i $E = G$.

(b)

(i) Ovdje

$$E(u, v) = |(r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, h'(u))|^2 = r'^2(u) + h'^2(u)$$

$$F(u, v) = (r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, h'(u)) \cdot (-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0) = 0$$

$$G(u, v) = |(-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0)|^2 = r^2(u)$$

tako da je površ konformalna ako i samo ako $r'^2 + h'^2 = r^2$.

(ii) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2+y^2} = r(u)$; stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u)\sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.

(c)

(i) $\mathrm{I\!I} = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ sa $e = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v$ i $g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$.

(ii) $\mathbf{x}$ je minimalna ako njena srednja krivina $H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}$ nestaje.

(d) Koristimo σ iz (b) kao parametrizaciju, tako da je $E(u,v) = G(u,v) = \cosh^2 u$ i $F = 0$; onda je $\mathbf{N}(u,v) = \frac{1}{r(u)}(-h'(u)\cos v, -h'(u)\sin v, r'(u)) = (-\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sinh u \sin v}{\cosh u}, \tanh u)$ i

$$e(u,v) = -(\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) \cdot (\frac{\sinh u \cos v}{\cosh^2 u}, \frac{\sinh u \sin v}{\cosh^2 u}, \frac{1}{\cosh^2 u}) = -1,$$

$$f(u,v) = -(\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) \cdot (\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, 0) = 0,$$

$$g(u,v) = -(-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0) \cdot (\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, 0) = 1,$$

tako da imamo $H(u,v) = \frac{\cosh^2 u \cdot 1 - 2\cdot 0 + \cosh^2 u(-1)}{2\cosh^4 u} = 0$.

Zadatak 4.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(b)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [2]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [4]

(c) Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_1$ i da se obje površi sijeku pod konstantnm uglom α, $\cos\alpha \neq \pm 1$. Pokažite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_2$. [5]

(d) Stoga, dajte geometrijski argument (bez komputacije) da su meridijani, $v = const$, površi revolucije $(u,v) \mapsto (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ linije krivine. [4]

Rješenje.

(a) Normalno polje N duž γ je paralelno ako $\nabla^\perp N = N' - (N' \cdot T)T \equiv 0$.

Koristimo $T \perp N$:
ako je N paralelno onda $(|N|^2)' = 2N \cdot N' = 2N \cdot \nabla^\perp N \equiv 0$, tj. $|N| \equiv const$;
ako su N_1 i N_2 paralelni onda $(N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = \nabla^\perp N_1 \cdot N_2 + N_1 \cdot \nabla^\perp N_2 = 0$;
Stoga $\cos\alpha = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} \equiv const$ kada α označava ugao izmedju N_1 i N_2.

(b)

(i) Rodriguesova jednačina: $0 = d\mathbf{N} + \kappa d\mathbf{x}$; jednačina je zadovoljena pravcima krivine (κ je onda odgovarajuća principalna krivina) i samo sa njima.

(ii) Ako je $t \mapsto \gamma(t)$ linija krivine, onda po Rodriguesovoj formuli,
$0 \equiv N' + \kappa\gamma' = \nabla^\perp N + (\kappa + \frac{N' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2})\gamma'$ i konkretno, $\nabla^\perp N \equiv 0$.

Ako je $\nabla^{\perp} N \equiv 0$, onda $N' = -\kappa\gamma'$ sa nekom funkcijom κ i po Rodriguesovoj formuli, γ' je pravac krivine (sa odgovarajućom principalnom krivinom κ).

(c) Ako je γ linija krivine za $\mathbf{x}_1$, onda je $N_1 = \mathbf{N}_1(\cdot, 0)$ paralelno duž γ;
ako se površi sijeku pod konstantnim uglom, onda $0 = (N_1 \cdot N_2)' = N_1' \cdot N_2 + N_1 \cdot N_2' = N_1 \cdot \nabla^{\perp} N_2$;
stoga $\nabla^{\perp} N_2 \perp N_1, N_2$ tako da je $\nabla^{\perp} \equiv 0$, jer su N_1 i N_2 linearno nezavisni ($\cos\alpha \neq \pm 1$).

(d) Meridijan je ortogonalni presjek površi sa ravni kroz z-osu; on je linija krivine na njenoj ravni (normala ravni je konstantna, tako da Rodriguesova formula vrijedi sa $\kappa = 0$). Stoga, meridijan je linija krivine na površi revolucije po (c).