

Diferencijalna Geometrija: Test 1 30/04/2015

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 2 sata. Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih. Koristiti hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizirana kriva u $\mathbb{R}^3$.

(a) Posmatrajmo krivu $t \mapsto \gamma(t) = (\sqrt{2} t, \sqrt{2} t, 1 - t^2)$.

(i) Dokažite da je kriva γ regularna i nadjite njenu dužinu luka. Kolika je dužina luka od tačke $(0, 0, 1)$ do tačke $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. (Pomoć : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh}(x) + c$). [5]

(ii) Izračunajte principalno normalno vektorsko polje za $t \mapsto \gamma(t)$. [6]

(iii) Izračunajte krivinu κ i torziju τ krive $t \mapsto \gamma(t)$. Šta zaključujemo o ovoj krivoj na osnovu njene krivine i torzije i na osnovu čega? [6]

(b) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = (t + \sin t, -t + \sin t, \sqrt{2} \cos t).$$

(i) Nadjite reparametrizaciju dužinom luka krive $t \mapsto \alpha(t)$. [5]

(ii) Nadjite okvir $F = (T, N, B)$ prilagodjen za strip (N, α) . [7]

(iii) Nadjite krivinu i torziju krive α po definiciji. Šta možete zaključiti o krivoj α iz njene krivine i torzije i na osnovu čega? [6]

(v) Izračunajte oskulatornu, normalnu i rektifirajuću ravan na krivu u proizvoljnoj tački $\alpha(t_0)$. [4]

(c) Neka je kriva $t \mapsto \beta(t)$ data sa

$$\beta(t) = (1, t^2, t^3), \quad t \in [1, +\infty)$$

Nadjite krivinu i torziju krive $t \mapsto \beta(t)$. Šta možete zaključiti o krivoj β iz njene krivine i torzije i na osnovu čega? [5]

Rješenje. s