

## Diferencijalna Geometrija: Test 2 09/06/2015

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 2 sata.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

**Zadatak 1.** Neka je  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$  regularna parametrizovana površ.

(a)

(i) Dokažite da su  $\mathbf{n}(u, v)$  i  $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$  međusobno paralelni vektori za sva  $u, v$ . [2]

(ii) Izračunajte  $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) \cdot \mathbf{n}$  i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K \sigma_u \times \sigma_v$$

[4]

(b) Neka nam je sada data nova površ:  $(u, v) \mapsto \rho(u, v) + a\mathbf{n}(u, v)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(i) Dokažite da su  $\mathbf{n}(u, v)$  i  $\rho_u \times \rho_v(u, v)$  međusobno paralelni vektori za sva  $u, v$ . [3]

(ii) Dokažite da je

$$\rho_u \times \rho_v = (1 - 2H a + K a^2) \sigma_u \times \sigma_v$$

[5]

(c) Pokažite da

$$(u, v) \mapsto (v^3 + 3v(1 - u^2), -u^3 - 3u(1 - v^2), -6uv)$$

definiše konformalno parametrizovanu minimalnu površ.

[6]

(d)

(i) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi

$$\sigma(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v).$$

[5]

(ii) Pokažite da je kriva  $\beta(t) = \sigma(t, 0)$  geodezija.

[2]

(e)

(i) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi

$$\sigma(u, v) = (u, v, uv).$$

[5]

(ii) Pokažite da je kriva  $\beta(t) = \sigma(0, t)$  geodezija.

[2]

(f) Pokažite da je kupa  $(r, \theta) \mapsto r \gamma(\theta)$ , gdje je  $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$  dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni. [6]