Diferencijalna Geometrija: Test 2 09/06/2015

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Test traje 2 sata.

Navedeni bodovi su od 40 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ regularna parametrizovana površ.

(a)

(i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u, v)$ medjusobno paralelni vektori za sva u, v. [2]

(ii) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K\sigma_u \times \sigma_v$$

[4]

(b) Neka nam je sada data nova površ: $(u, v) \mapsto \rho(u, v) + a\mathbf{n}(u, v)$, $a \in \mathbb{R}$.

(i) Dokažite da su $\mathbf{n}(u, v)$ i $\rho_u \times \rho_v(u, v)$ medjusobno paralelni vektori za sva u, v. [3]

(ii) Dokažite da je

$$\rho_u \times \rho_v = (1 - 2H\ a + K\ a^2)\sigma_u \times \sigma_v$$

[5]

(c) Pokažite da

$$(u, v) \mapsto (v^3 + 3v(1 - u^2), -u^3 - 3u(1 - v^2), -6uv)$$

definiše konformalno parametrizovanu minimalnu površ. [6]

(d)

(i) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi

$$\sigma(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v).$$

[5]

(ii) Pokažite da je kriva $\beta(t) = \sigma(t, 0)$ geodezija. [2]

(e)

(i) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi

$$\sigma(u, v) = (u, v, uv).$$

[5]

(ii) Pokažite da je kriva $\beta(t) = \sigma(0, t)$ geodezija. [2]

(f) Pokažite da je kupa $(r, \theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni. [6]

Rješenje.

(a)

(i) $\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) = \mathbf{n}_u(\mathbf{n}.\mathbf{n}_v) - \mathbf{n}_v(\mathbf{n}.\mathbf{n}_u) = 0 - 0 = 0$, pa su vektori paralelni.

(ii) Direktnom primjenom navedenog identiteta i definicije Gaussovog preslikavanja i Gaussove krivine.

(b) Pravolinijski.

(c) Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \, \{du^2 + dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \cosh u \, (\cos v, \sin v, 0) \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_v(u,v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1)$$

tako da (vidi Problem 5.4)

$$\mathbf{n}(u,v) = \tfrac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{E}(u,v) = (\tfrac{\sin v}{\cosh u}, -\tfrac{\cos v}{\cosh u}, \tanh u)$$

i

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_{uu}(u,v) & = & \sinh u \, (\cos v, \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_{uv}(u,v) & = & \cosh u \, (-\sin v, \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv}(u,v) & = & -\sinh u \, (\cos v, \sin v, 0) \end{array}$$

tako da

$$e(u,v) = 0, \quad f(u,v) = -1 \quad \text{i} \quad g(u,v) = 0$$

i stoga, $\mathrm{II}|_{(u,v)} = -2\, du dv$.

(d) Cilindar

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u), v) = \overbrace{(x(u), y(u), 0)}^{=:\gamma(u)} + v \, \overbrace{(0,0,1)}^{=:\eta(u)}$$

je onda (očito) linijska površ i ima Gaussovo preslikavanje

$$\mathbf{n}(u,v) = \tfrac{1}{\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}}(y'(u), -x'(u), 0),$$

koje ne zavisi o linijskom parametru v.

(e) Parametrizirajući Σ kao površ revolucije imamo $z = h(u)$ i $\cosh z = \sqrt{x^2 + y^2} = r(u)$; stoga $r(u) = \cosh h(u)$ tako da konformalnost znači

$$h'^2(u) \sinh^2 h(u) + h'^2(u) = \cosh^2 h(u) \iff h'^2(u) \equiv 1;$$

stoga $(u,v) \mapsto \sigma(u,v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$ daje konformalnu parametrizaciju od Σ.