Diferencijalna Geometrija: Finalni dio ispita 19/06/2015

Nema napuštanja ispita u prvih 15 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata.

Navedeni bodovi su od 45 maksimalnih.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1.

(a) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [1]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

(iii) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara– metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s, [3]

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(iv) Dokažite da je za regularnu parametriziranu krivu $t \mapsto \gamma(t)$, [2]

$$\kappa^2 = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}.$$

(b)

(i) Pokažite da je krivina identično jednaka nuli ako i samo ako slika krive γ leži na pravoj. [5]

(ii) Pokažite da je odnos τ/κ konstantan ako i samo ako postoji konstantni jedinični vektor u koji čini konstantan ugao θ sa tangentnim vektorskim poljem T, tj. $T \cdot u = \cos\theta$. [5]

(c) Neka je $F = (T, N_1, N_2)$ prilagodjeni okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$. Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan prilagodjeni okvir. Zatim izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_1, κ_2 i τ) mijenaju. [7]

Rješenje.

(a)

(i) Krivina: $\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = |T'(s)|$.
Torzija: $\tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = N'(s) \cdot (T(s) \times N(s))$

(ii) γ je parametrizirana dužinom luka, $|\gamma'|^2 \equiv 1$, tako da $\gamma'' \perp \gamma'$;
onda $|\gamma' \times \gamma''|^2 = |\gamma'|^2|\gamma''|^2 = |\gamma''|^2 = |T'|^2 = \kappa^2$.

(iii) Računamo

$$\tilde{\gamma}'(s) = t'(s)\gamma(t(s))$$

$$\tilde{\gamma}''(s) = t'^2(s)\gamma''(t(s)) + ?\gamma'(t(s))$$

tako da je $\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma'(t(s)) \times \gamma''(t(s))|^2 t'^{(2\cdot 3)}(s)}{|\gamma'(t(s))|^6 t'^6(s)} = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t(s))$.

(iv) Ako je $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ reparametrizacija dužinom luka krive γ, onda, jer je $|\tilde{\gamma}'| \equiv 1$,
$\kappa^2(t) = \tilde{\kappa}^2(s) = \frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t)$

(b)

(i) Ako je $\gamma(s) = p + qs$, $p, q \in R^3$, $|q| = 1$, onda je $T(s) = q$ konstantno i $T'(s) = 0$, pa je stoga $\kappa(s) = 0$.

Obratno, ako je $\kappa(s) = 0$, onda je T konstatno, $T(s) = q$ recimo. Integrirajući $\gamma'(s) = q$, dobivamo $\gamma(s) = p + qs$, gdje je $p = \gamma(0)$.

(ii) Krivu $t \mapsto \gamma(t)$ zovemo <u>(opšti) heliks</u> ako njene tangente čine konstantan ugao sa fiksnim pravcem $a \in \mathbb{R}^3$ u prostoru, tj., $a \cdot T \equiv const$.

Pretpostavimo da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovan (opšti) heliks. Onda

$$0 = (a \cdot T)' = \kappa\, a \cdot N,$$

to jest, ako $\kappa \neq 0$, onda je a paralelno sa rektifirajućom ravni,

$$a = \lambda T + \mu B$$

sa pogodnim funkcijama λ i μ. Diferencirajući nalazimo da

$$0 = a' = \lambda' T + (\lambda\kappa - \mu\tau)\, N + \mu' B,$$

to jest, λ i μ su konstantne i odnos $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ je konstantan.

Obratno, ako $\frac{\tau}{\kappa} \equiv const$ za krivu $s \mapsto \gamma(s)$ biramo $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da

$$0 = \kappa \cos\alpha - \tau \sin\alpha$$

kako bismo dobili

$$(\cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B)' = (\kappa\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\, N \equiv 0.$$

To jest, $a := \cos\alpha\, T + \sin\alpha\, B$ je konstantan pravac koji čini konstantan ugao α sa T jer je $a \cdot T \equiv \cos\alpha$.

Zadatak 2.

Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ regularna površ sa prvom i drugom fundamentalnom formom I i II.

(a)

(i) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(., \mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}., .)$. [2]

(ii) Iskoristite operator oblika kako bi uveli pojmove srednje krivine, Gaussove krivine i principalnih krivina površi. [1]

(b) Nadjite konformalnu parametrizaciju za

$$\Sigma = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Provjerite rezultat! [7]

(c) Definišite precizno pojam geodezije. Dokažite da geodezija mora imati konstantnu brzinu. [5]

(d) Navedite i dokažite *Rodriguesovu jednačinu*, navodeći jasno sve rezultate kojim se koristite. [5]

Rješenje.

(a) Ako napišemo fundamentalne forme u matričnoj formi,

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

spoznaćemo da $\mathrm{I\!I}(.,.) = \mathrm{I}(., S.)$ ako i samo ako

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simetrija S u odnosu na I prati direktno:

$$\mathrm{I}(\mathrm{S}.,.) - \mathrm{I}(.,\mathrm{S}.) = \mathrm{S}^t\mathrm{I} - \mathrm{IS} = \mathrm{I\!I}^t - \mathrm{I\!I} = 0$$

jer je druga fundamentalna forma simetrična.

Neka je S operator oblika regularne površi $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$. Zovemo:

- $H := \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{S} = \frac{Eg-2Ff+eG}{2(EG-F^2)}$ srednjom krivinom površi;
- $K := \det \mathrm{S} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ Gaussovom krivinom površi;
- svojstvene vrijednosti κ_i od S principalnim krivinama površi.

(b) Parametrišemo Σ_2 (što je jednična sfera probijena na svojim sjevernim i južnim polovima) kao površ revolucije:

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) := (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u))$$

sa funkcijama $u \mapsto r(u) \in (0, \infty)$ i $u \mapsto h(u) \in \mathbb{R}$. Koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = r'^2 + h'^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = r^2.$$

Stoga konformalnost čita

$$r^2 = r'^2 + h'^2;$$

zajedno sa jedačinom sfere, $r^2 + h^2 = 1$ izvedemo diferencijalnu jednačinu za h:

$$1 - h^2 = \frac{h^2 h'^2}{1-h^2} + h'^2 \quad \Leftrightarrow \quad h'^2 = (1 - h^2)^2;$$

rješenje ove (Riccatijeve) jednačine je $h(u) = \tanh u$. Sa ovim dobijemo $r(u) = \sqrt{1 - h^2(u)} = \frac{1}{\cosh u}$ i stoga

$$\mathbf{x}(u, v) = (\tfrac{\cos v}{\cosh u}, \tfrac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

Kako bismo završili, provjerimo značajke:

$$(\tfrac{\cos v}{\cosh u})^2 + (\tfrac{\sin v}{\cosh u})^2 + (\tanh u)^2 = 1 \quad \text{i} \quad (\tanh u)^2 < 1,$$

u stvari, $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$ tako da $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \Sigma_2$ pokriva Σ_2 u potpunosti; i konformalnost:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= \tfrac{1}{\cosh u}(-\tanh u \cos v, -\tanh u \sin v, \tfrac{1}{\cosh u}) \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \tfrac{1}{\cosh u}(-\sin v, \cos v, 0) \end{aligned}$$

tako da

$$E(u, v) = \tfrac{1}{\cosh^2 u} = G(u, v) \quad \text{i} \quad F(u, v) = 0.$$

(c) Neka je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ kriva i neka je $t \mapsto \xi(t)$ vektorsko polje duž γ tangentno na površ; neka je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t), v(t))$.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \xi := \xi' - (\xi' \cdot N)\, N$$

će se zvati kovarijantni izvod od ξ duž krive.
Kriva se zove geodezijom ako

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \gamma' \equiv 0.$$

Očito

$$(|\gamma'|^2)' = 2\gamma' \cdot \gamma'' = 2\gamma' \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \gamma' + (\gamma'' \cdot N)\, N) = 0,$$

što pokazuje da $|\gamma'|^2 \equiv const.$

(d) $d_{(u,v)}\mathbf{x}(\lambda, \mu)$ je pravac krivine ako i samo ako

$$\exists \kappa \in \mathbb{R} : (d_{(u,v)}\mathbf{n} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x}) \binom{\lambda}{\mu} = 0;$$

κ je onda odgovarajuća principalna krivina.

Rodriguesova jednačina/formula se često piše kao

$$d\mathbf{n} + \kappa\, d\mathbf{x} = 0,$$

u kojem slučaju $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ označava pravac krivine.

Po prethodnoj lemi, imamo

$$(d_{(u,v)}\mathbf{n} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x}) \binom{\lambda}{\mu} = d_{(u,v)}\mathbf{x}\, (\kappa \binom{\lambda}{\mu} - \mathrm{S}|_{(u,v)} \binom{\lambda}{\mu})$$

tako da $(d_{(u,v)}\mathbf{n} + \kappa\, d_{(u,v)}\mathbf{x}) \binom{\lambda}{\mu} = 0$ ako i samo ako $\kappa \binom{\lambda}{\mu} = \mathrm{S}|_{(u,v)} \binom{\lambda}{\mu}$ jer $d_{(u,v)}\mathbf{x}$ injektira.

Pomoćna lema : $d_{(u,v)}\mathbf{n} = -d_{(u,v)}\mathbf{x} \circ \mathrm{S}|_{(u,v)}$. ili, ekvivalentno, $\mathrm{S}|_{(u,v)} = -(d_{(u,v)}\mathbf{x})^{-1} \circ d_{(u,v)}\mathbf{n}$