

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 19/06/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2 + y^2) = 1 + z^2, z = 2x + 1\}$.

- (a) Napišite C kao bazni skup, tj. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$, sa dvije odgovarajuće funkcije F_1 i F_2 ; zatim

(i) provjerite da C definiše regularnu krivu tako što ćete pokazati da su gradijenti $\nabla F_1(x, y, z)$ i $\nabla F_2(x, y, z)$ linearno nezavisni za sva $(x, y, z) \in C$; [2]

(ii) nadjite regularnu parametrizaciju za krivu. [4]

- (b) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s .

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ , kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$. [2]

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$. [2]

- (c) Nadjite krivinu (do znaka) i torziju krive date u (a). [5]

- (d) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara – metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s ,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(s)$$

(**Pomoć:** Razmislite o koeficijentima koje trebate prije računanja!) [5]

Zadatak 2. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ regularna površ sa prvom i drugom fundamentalnom formom I i II.

- (a) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\text{II}(\cdot, \cdot) = \text{I}(\cdot, S\cdot);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\text{I}(\cdot, S\cdot) = \text{I}(S\cdot, \cdot)$. [5]

- (b) Definišite precizno pojam *geodezije*. Dokažite da geodezija mora imati konstantnu brzinu. [5]

- (c) Neka je površ $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ parametrizirana sa $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Pokažite da je kriva $\beta(t) = \mathbf{x}(t, 0)$ geodezija površi $\mathbf{x}$. [3]

- (d) Neka je $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ cilindar na krivoj u (x, y) -ravni. Dokažite da je geodezija na Σ (opšti) heliks. [7]

Zadatak 3.

- (a) Pretpostavite da je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ regularna parametrizirana površ.
- (i) Šta su *prva i druga fundamentalna forma* I i II površi $\mathbf{x}$? [2]
- (ii) Objasnite šta to znači kada kažemo da je $\mathbf{x}$ *konformalna*. [1]
- (iii) Šta znači kada kažemo da $\mathbf{x}$ parametrizira *minimalnu površ*? [2]
- (b) Pokažite da je *Enneperova površ* $(u, v) \mapsto (u^3 - 3u(1 + v^2), v^3 - 3v(1 + u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ. [7]
- (c) Izračunajte drugu fundamentalnu formu helikoida. [8]