Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 03/07/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

(a) Šta je

(i) *principalno normalno polje* N krive γ? [1]

(ii) *principalni okvir* F krive γ (objasnite sve veličine koje se pojavljuju) [2]

(b) Formulišite i dokažite *Frenetove jednačine.* [4]

(c) Pretpostavimo da sve rektifirajuće ravni $\{P \in \mathbb{R}^3 | (P - \gamma(s)) \cdot N(s) = 0\}$ krive γ prolaze kroz (fiksnu) tačku $P_0 \in \mathbb{R}^3$. Pokažite da postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da $(a - s)\kappa(s) = b\tau(s)$, gdje su κ i τ krivina i torzija krive γ. [6]

(d) Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva i definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^{t} \beta(t) \times \beta'(t) dt.$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju. (Pomoć: $a \times (b \times c) = b\,(a \cdot c) - c\,(a \cdot b)$.) [7]

Zadatak 2. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ regularna površ sa prvom i drugom fundamentalnom formom I i II.

(a) Pokažite da postoji jedinstveno polje linearnih preslikavanja $\mathrm{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (*operator oblika*), tako da

$$\mathrm{II}(.,.) = \mathrm{I}(., \mathrm{S}.);$$

Pokazati da je S simetrično u odnosu na I, tj., $\mathrm{I}(., \mathrm{S}.) = \mathrm{I}(\mathrm{S}., .)$. [5]

(b) Parametrišite $S^2(R) = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ pomoću geodezijskih polarnih koordinata oko $P = (0, 0, R)$. [5]

(c) Pokažite da je Gaussova krivina konformalno paramterizovane površi data sa

$$K = -\tfrac{1}{2E} \Delta \ln E.$$

(pomoć - vratite se dokazu Gaussove Theoreme egregium) [5]

(d) Nadjite Gaussovu i srednju krivinu površi parametrizirane sa $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. [5]

Zadatak 3.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao. [5]

(b)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine. [2]

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{N}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ. [4]

(c) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{N}_1$ i $\mathbf{N}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_1$ i da se obje površi sijeku pod konstantnm uglom α, $\cos\alpha \neq \pm 1$. Pokažite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_2$. [5]

(d) Stoga, dajte geometrijski argument (bez komputacije) da su meridijani, $v = const$, površi revolucije $(u, v) \mapsto (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ linije krivine. [4]