

Diferencijalna Geometrija: Pismeni dio ispita 26/09/2008

Nema napuštanja ispita u prvih 30 minuta niti u zadnjih 15 minuta ispita.

Ispit traje 2 sata i 15 minuta.

Imate 5 dodatnih minuta za čitanje pitanja.

Navedeni bodovi su od 60 maksimalnih, po 20 za svaki zadatak.

Koristiti ISKLJUČIVO hemijsku olovku plave ili crne tinte.

Zadatak 1. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva.

- (a) Definišite *jedinično tangentno vektorsko polje* T i *krivinu* κ . [2]
- (b) Pokažite da je krivina identično jednaka nuli ako i samo ako slika krive γ leži na pravoj. [5]
- (c) Definišite *principalno normalno vektorsko polje* N , *binormalu* B i *torziju* τ . Navedite i dokažite *Frenet-Serret formule* za γ . [5]
- (d) Pokažite da je odnos τ/κ konstantan ako i samo ako postoji konstantni jedinični vektor u koji čini konstantan ugao θ sa tangentnim vektorskim poljem T , tj. $T \cdot u = \cos \theta$. Kako se u ovom slučaju zove kriva γ ? [8]

Zadatak 2.

- (a) Neka je kriva $t \mapsto \alpha(t)$ data sa

$$\alpha(t) = \left(\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right).$$

- (i) Nadjite krivinu i torziju krive α . [8]
- (ii) Neka je $t \mapsto \beta(t)$ druga kriva koja ima istu krivinu i torziju kao kriva α . Kakav je odnos između α i β ? [2]
- (b) Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t . [5]
- (c) Izračunajte dužinu luka krive $t \mapsto e^t(\cos t, \sin t)$ i nadjite parametrizaciju dužinom luka. Zatim izračunajte krivinu funkcije krive. [5]

Zadatak 3.

- (a) Definišite *linijsku* i *razvojnu* površ. [4]
- (b) Pokažite da je 1-strani hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ. [10]
- (c) Dokažite da je *cilindar* razvojna površ. Navedite sve razvojne površi koje znate. [6]