Druga fundamentalna forma. Operator oblika. Krivine na površima.

Diferencijalna geometrija – Vjeđbe 10

RjeŽenja predati na predavanjima, 11.6.2021. god.

Vježba 1. Izračunajte druge fundamentalne forme sfere, helikoida, eliptičnog paraboloida, hiperboličnog paraboloida i jednokrilnog hiperboloida.

Rješenje : Helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$$

(sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \, \{du^2 + dv^2\}$, kao što je izračunato ranije). Stoga

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \cosh u \, (\cos v, \sin v, 0) \quad \text{ i } \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 1)$$

tako da je

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{E} \, (u, v) = \left(\frac{\sin v}{\cosh u}, -\frac{\cos v}{\cosh u}, \tanh u \right)$$

i

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= \sinh u \, (\cos v, \sin v, 0) \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= \cosh u \, (-\sin v, \cos v, 0) \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= -\sinh u \, (\cos v, \sin v, 0) \end{aligned}$$

tako da

$$e(u, v) = 0, \;\; f(u, v) = -1 \;\; \text{i} \;\; g(u, v) = 0$$

i stoga, $\mathrm{II}|_{(u,v)} = -2 \, du dv$.

Ostale površi ostavljamo za vježbu. ♡

Vježba 2. Neka je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ (regularna) kriva na parametrizovanoj površi $\mathbf{x}$, ne obavezno parametrizovana duđinom luka. Dokađite da je normalna krivina krive γ onda data sa

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{II}(\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix})}{\mathrm{I}(\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix})} = \frac{e \, u'^2 + 2f \, u'v' + g \, v'^2}{E \, u'^2 + 2F \, u'v' + G \, v'^2}.$$

Rješenje : Ako je $\tilde{\gamma}(s) = \mathbf{x}(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)) = \mathbf{x}(u(t(s)), v(t(s)))$ reparametrizacija dužinom luka krive, onda

$$\begin{aligned} \frac{e \, u'^2 + 2f \, u'v' + g \, v'^2}{E \, u'^2 + 2F \, u'v' + G \, v'^2} &= \frac{\{e \, u'^2 + 2f \, u'v' + g \, v'^2\} \, t'^2}{\{E \, u'^2 + 2F \, u'v' + G \, v'^2\} \, t'^2} \\ &= \frac{e \, \tilde{u}'^2 + 2f \, \tilde{u}'\tilde{v}' + g \, \tilde{v}'^2}{E \, \tilde{u}'^2 + 2F \, \tilde{u}'\tilde{v}' + G \, \tilde{v}'^2} \\ &= \frac{\tilde{\kappa}_n}{1} \\ &= \kappa_n. \end{aligned}$$

jer je $\kappa_n(t) = \tilde{\kappa}_n(s)$ (po definiciji). ♡

Vježba 3. Pokazati da koeficijente druge fundamentalne forme možemo računati kao

$$e = \frac{(x_{uu}\ x_u\ x_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\ f = \frac{(x_{uv}\ x_u\ x_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\ g = \frac{(x_{vv}\ x_u\ x_v)}{\sqrt{EG-F^2}},$$

Rješenje : S obzirom da je

$$\frac{(\mathbf{x}_{uu}\ \mathbf{x}_u\ \mathbf{x}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{(\mathbf{x}_{uu}\cdot(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v)}{||\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v||} = \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{n} = e.$$

Slično za koeficijente f, g. ♡

Vježba 4. Pokađite da su prave linije na linijskoj povrŽi asimptotske linije.

Rješenje : Fiksirajmo $u \equiv const$; Onda uslov kako bi kriva $v \mapsto \gamma(v) = \mathbf{x}(u,v)$ bila asimptotska linija ima oblik

$$0 \equiv e\,u'^2 + 2f\,u'v' + g\,v'^2 = g\,v'^2.$$

Stoga izračunamo

$$g(u,v) = \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{n}(u,v) = 0;$$

kako bismo vidjeli da je uslov ispunjen i da je γ asimptotska linija. ♡

Vježba 5. Potvrdite formule za srednju i Gaussovu krivnu povrŽi koristeći se operatorom oblika. Izrazite ih pomoću principalnih krivina.

Rješenje : S obzirom da je Weingaretnov tenzor

$$\mathrm{S} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}.$$

imamo da je

$$H = \frac{1}{2}tr\mathrm{S} = \frac{1}{2(EG-F^2)}(Ge-Ff+Ge-Ff) = \frac{Ge-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)},$$

$$\begin{aligned} K = \det\mathrm{S} &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}[(Ge-Ff)(Eg-Ff)-(Gf-Fg)(Ef-Fe)] \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}(GeEg-GeFf-FfEg+(Ff)^2-GfEf+GfFe+FgEf-F^2ge) \\ &= \frac{-F^2(eg-f^2)+EG(eg-f^2)}{(EG-F^2)^2} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}. \end{aligned}$$

Ako sada izračunamo, nakon malo truda,

$$\det(\mathrm{S}-\kappa\cdot id) = \frac{eg-f^2-\kappa(eG-2fF+Eg)+\kappa^2(EG-F^2)}{EG-F^2} = K-2\kappa H+\kappa^2$$

Ako ovo sada izjedančimo s nulom, da bi dobili svojstvene vrijednosti, imamo

$$\kappa_{1/2} = H \pm \sqrt{H^2-K}.$$

Ako sada saberemo ove dvije formule za κ_1 i κ_2, dobijemo

$$\kappa_1+\kappa_2 = 2H.$$

S druge strane, ako ih pomnođimo, imamo

$$\kappa_1\kappa_2 = H^2-(H^2-K) = K.$$

Primijetite da je

$$H^2 \geq K$$

jer je

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

(odnos aritmetičke i geometrijske sredine), ali i po definiciji:

$$H^2 - K = \frac{(Eg - 2Ff + eG)^2}{4(EG - F^2)^2} - \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \geq 0$$

uz pretpostavku pozitivne definitinosti prve fundamentalne forme ($E > 0, EG - F^2 > 0$).

♡

Vježba 6. Izračunajte Gaussovu krivinu razvojne površi.

Rješenje : Razvojna površ je oblika $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = \gamma(u) + v\eta(u)$ sa $\mathbf{n}_v \equiv 0$. Stoga, računajući koeficijente druge fundamentalne forme nalazimo

$$f = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v \equiv 0 \quad \text{i} \quad g = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v \equiv 0.$$

Stoga je $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \equiv 0$. ♡

Vježba 7. Izračunajte Gaussovu, srednju i principalne krivine sfere, helikoida, eliptičnog paraboloida, hiperboličnog paraboloida i jednokrilnog hiperboloida.

Rješenje : Izračunat ćemo krivine za helikoid. S obzirom da helikoid možemo parametrizirati sa

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v),$$

sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u \{du^2 + dv^2\}$ i drugom fundamentalnom formom $\mathrm{II}|_{(u,v)} = -2\, du dv$, imamo da su

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-1}{\cosh^4 u}, \\ H &= \frac{Eg - 2Ff + eG}{2(EG - F^2)} = 0, \\ \kappa_{1/2} &= H \pm \sqrt{H^2 - K} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cosh^4 u}} = \pm\frac{1}{\cosh^2 u}. \end{aligned}$$

Ostalo ostavljamo za vjeđbu. ♡

Vježba 8. Neka je $(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$ regularna parametrizovana površ.

(a) Dokažite da su $\mathbf{n}(u,v)$ i $\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v(u,v)$ međusobno paralelni vektori za sva u, v.

(b) Izračunajte $(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}$ i zaključite da je

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = K\sigma_u \times \sigma_v$$

(c) Neka nam je sada data nova površ: $(u,v) \mapsto \rho(u,v) + a\mathbf{n}(u,v)$, $a \in \mathbb{R}$. Dokažite da su $\mathbf{n}(u,v)$ i $\rho_u \times \rho_v(u,v)$ međusobno paralelni vektori za sva u, v. Dokažite da je

$$\rho_u \times \rho_v = (1 - 2H\ a + K\ a^2)\sigma_u \times \sigma_v$$

Rješenje :

(a) $\mathbf{n} \times (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) = \mathbf{n}_u(\mathbf{n}.\mathbf{n}_v) - \mathbf{n}_v(\mathbf{n}.\mathbf{n}_u) = 0$, pa su vektori paralelni.

(b) Direktnom primjenom Lagrangeovog identiteta $(a\times b).(c\times d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$ i definicije Gaussovog preslikavanja i Gaussove krivine, tojest

$$\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v = [(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).\mathbf{n}]\mathbf{n} = \left(\frac{(\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v).(\sigma_u \times \sigma_v)}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\mathbf{n}$$

$$= \frac{(\mathbf{n}_u.\sigma_u)(\mathbf{n}_v\sigma_v) - (\mathbf{n}_u.\sigma_v)(\mathbf{n}_v\sigma_u)}{\sqrt{EG - F^2}}\ \mathbf{n} = \frac{eg - f^2}{\sqrt{EG - F^2}}\mathbf{n} = K\sigma_u \times \sigma_v.$$

(c)

$$n \times (\rho_u\rho_v) = \rho_u(n.\rho_v) - \rho_v(n.\rho_u) = \rho_u(n.(\sigma_v + a\mathbf{n}_v) - \rho_v(n.(\sigma_u + a\mathbf{n}_u)) = 0.$$

Ostatak je pravolinijski, sa istim fazonom kao u (b).

$\heartsuit$

Vježba 9. Dokađite Cayley-Hamiltonovu formulu:

$$S^2 = 2H \cdot S - K \cdot id.$$

Rješenje : kako bismo dokazali da je

$$\mathrm{S}^2 = 2H\,\mathrm{S} - K\,id,$$

posmatrajmo prvo

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix}^2 \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{pmatrix} -fF(Eg+3eG)+f^2(F^2+EG)+e(F^2g+eG^2) & (2fF-Eg-eG)(Fg-fG) \\ (Ef-eF)(-2fF+Eg+eG) & g(eF^2+E^2g)-fF(3Eg+eG)+f^2(F^2+EG) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} 2H\,\mathrm{S} \quad - \quad K\,id &= \frac{Eg-2Ff+eG}{(EG-F^2)}\begin{pmatrix} Ge-Ff & Gf-Fg \\ Ef-Fe & Eg-Ff \end{pmatrix} - \frac{eg-f^2}{EG-F^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{pmatrix} -fF(Eg+3eG)+f^2(F^2+EG)+e(F^2g+eG^2) & (2fF-Eg-eG)(Fg-fG) \\ (Ef-eF)(-2fF+Eg+eG) & g(eF^2+E^2g)-fF(3Eg+eG)+f^2(F^2+EG) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\heartsuit$

Vježba 10. (a) Napravite funkciju `dff[x_,u_,v_]` koja računa drugu fundamentalnu formu date površi i vraća je kao listu `{e,f,g}`.

(b) Napravite funkciju `srednjaKrivina[x_,u_,v_]` koja računa srednju krivinu date površi.

(c) Napravite funkciju `gaussovaKrivina[x_,u_,v_]` koja računa Gaussovu krivinu date površi.

(d) Napravite funkciju `prinKrivine[x_,u_,v_]` koja računa principalne krivine date površi.