Rodriguesova jednačina. Eulerov teorem. Minimalne površi

Diferencijalna geometrija – Vježbe 11

Rješenja predati na predavanjima, u utorak 19. maja 2020. god.

Vježba 1. Pretpostavimo da površ bez umbiličnih tačaka $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ ima konstantnu srednju krivinu $H \neq 0$.

Dokažite da površ $(u,v) \mapsto \mathbf{x}^*(u,v) := \mathbf{x}(u,v) + \frac{1}{H}\mathbf{n}(u,v)$ ima konformalno ekvivalentnu metriku $\mathrm{I}^* = \frac{H^2-K}{H^2}\,\mathrm{I}$ i konstantnu srednju krivinu $H^* = H$.

Vježba 2. Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ.

Vježba 3. Neka su $(u,v) \mapsto \mathbf{x}_1(u,v), \mathbf{x}_2(u,v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u,0) = x_2(u,0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u,0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za obje krive. Pokažite da se površi sjeku pod konstantnim uglom.

Vježba 4. (a) Dokažite Eulerov teorem, odnosno "popunite praznine" dokaza sa predavanja.

(b) Koristeći se već izračunatim fundamentalnim formama sa prethodnih vježbi, odredite površi i tačke na tim površima koje su eliptične, hiperbolične i parabolične.

(c) Demonstrirajte kako se priroda tih tačaka ogleda u presjeku tangentnih ravni sa površi, koristeći se Mathematicom.

Vježba 5. Pokažite da je helikoid minimalna površ i odredite njegove asimptotske linije i linije krivine.

Vježba 6. Pokažite da je *Enneperova površ* $(u,v) \mapsto (u^3 - 3u(1+v^2), v^3 - 3v(1+u^2), 3(u^2 - v^2))$ konformalno parametrizovana minimalna površ.

Vježba 7. Odredite sve umbilične tačke na sferi. Šta možete zaključiti iz rezultata?

Odredite sve umbilične tačke na elipsoidu.

Odredite sve umbilične tačke na torusu.

Vježba 8. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ konformalno parametrizovana minimalna površ. Pokažite da se njena druga fundamentalna forma može napisati kao $\mathbb{II} = \mathrm{Re}\,\{(e - if)(du + idv)^2\}$ i da je $(e^\alpha - if^\alpha) = e^{i\alpha}(e - if)$ za površi $\mathbf{x}^\alpha$ asocijativne porodice od $\mathbf{x}$.

Zaključite da asimptotske linije i linije krivine površi $\mathbf{x}$ postaju asimptotske linije i linije krivine površi $\mathbf{x}^*$, respektivno.

Vježba 9. Pokažite da je površ revolucije krive $y = \cosh x$ (katenoida) minimalna.

Vježba 10. (a) Napravite u Wolfram Mathematica funkciju koja računa Gaussovu i srednju krivinu površi.

(b) Napravite u Wolfram Mathematica funkciju koja računa Weingartenov tenzor površi.