Gauss-Codazzi. Fundamentalne jednačine površi

Diferencijalna geometrija – Vježbe 12

Rješenja predati na vježbama, u utorak 26. maja 2020. god.

Vježba 1. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gaussovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka općenitosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ.

Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\,(du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.)

Vježba 2. Pokažite da je Gaussova krivina konformalno paramterizovane površi data sa

$$K = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E.$$

Vježba 3. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine minimalne površi. Pokažite da $E^2 K \equiv const$ i zaključite da $\ln E$ mora zadovoljavati Liouvilleovu jednačinu

$$\Delta \ln E = const\, e^{-\ln E}.$$

Vježba 4. Pokažite da je Gaussova krivina površi invarijantna pod reparamterizacijom i zaključite da Gaussova krivina nestaje ako je površ (lokalno) izometrična ravni, tojest prima izometričnu parametrizaciju.

Vježba 5. (a) Koristeći se lemom sa predavanja, izračunati eksplicitne formule za Christoffelove simbole Γ_{ij}^k koristeći se koeficijentima prve fundamentalne forme.

(b) Dokazati stoga posljedicu s predavanja :

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k g^{km}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}).$$

(c) Izračunati Christofellove simbole za sferu, helikoid i jednokrilni hiperboloid.

(d) Napraviti funkciju `Christoffel[x_,u_,v_]` u Mathematici.