Gauss-Codazzi. Fundamentalne jednačine površi

Diferencijalna geometrija – Vježbe 12

Rješenja predati na vježbama, u utorak 26. maja 2020. god.

Vježba 1. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ paramterizacija linijom krivine površi sa konstantnom Gaussovom krivinom $K \equiv -1$ tako da, bez gubitka općenitosti, $\kappa_1 = \tan\varphi$ i $\kappa_2 = -\cot\varphi$ sa odgovarajućom funkcijom φ.

Pokažite da postoji reparametrizacija linijom krivine, $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$, tako da

$$\tilde{\mathrm{I}} = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 \quad \text{i} \quad \tilde{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,(du^2 - dv^2).$$

(Pomoć: pokažite da je $(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = 0$ iz Codazzijevih jednačina.)

Rješenje : Iz Codazzijevih jednačina

$$E_v = -2E\frac{(\kappa_1)_v}{\kappa_1 - \kappa_2} = -2E\varphi_v \tan\varphi \quad \text{i} \quad G_u = 2G\frac{(\kappa_2)_u}{\kappa_1 - \kappa_2} = 2G\varphi_u \cot\varphi$$

tako da

$$(\frac{E}{\cos^2\varphi})_v = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{E_v + 2E\varphi_v\tan\varphi\} = 0, \quad \text{i} \quad (\frac{G}{\sin^2\varphi})_u = \frac{1}{\sin^2\varphi}\{G_u - 2G\varphi_u\cot\varphi\} = 0.$$

Kao posljedica ovoga, možemo riješiti diferencijalne jednačine

$$u' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{E}}(u) \quad \text{i} \quad v' = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}}(v)$$

sa dvije funkcije $u = u(\tilde{u})$ i $v = v(\tilde{v})$ jedne promjenjljive kako bismo dobili, za $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{x}(u(\tilde{u}), v(\tilde{v}))$:

$$\tilde{\mathrm{I}} = (Eu'^2)\, d\tilde{u}^2 + (Gv'^2)\, d\tilde{v}^2 = \cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2$$

i

$$\tilde{\mathrm{II}} = \kappa_1\cos^2\varphi\, d\tilde{u}^2 + \kappa_2\sin^2\varphi\, d\tilde{v}^2 = \sin\varphi\cos\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\{d\tilde{u}^2 - d\tilde{v}^2\}.$$

♡

Vježba 2. Pokažite da je Gaussova krivina konformalno paramterizovane površi data sa

$$K = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E.$$

Rješenje : Vraćajući se dokazu Gaussove Theoreme egregium nalazimo

$$\begin{aligned}
K &= \frac{|(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uu})^t(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vv})| - |(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})^t(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv})|}{(EG - F^2)^2} \\
&= \frac{1}{E^4}\left(\begin{vmatrix} E & 0 & -\frac{E_u}{2} \\ 0 & E & \frac{E_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & -\frac{E_v}{2} & \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_{vv} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & 0 & -\frac{E_v}{2} \\ 0 & E & \frac{E_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} & \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_{uv} \end{vmatrix}\right) \\
&= -\frac{1}{2E}\{\frac{E_{uu} + E_{vv}}{E} - \frac{E_u^2 + E_v^2}{E^2}\} \quad = \quad -\frac{1}{2E}\Delta \ln E.
\end{aligned}$$

♡

Vježba 3. Neka je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ paramterizacija linijom krivine minimalne površi. Pokažite da $E^2K \equiv const$ i zaključite da $\ln E$ mora zadovoljavati Liouvilleovu jednačinu

$$\Delta \ln E = const\, e^{-\ln E}.$$

Rješenje : Koristimo Codazzijeve jednačine, koristeći $K = -\kappa_1^2 = -\kappa_2^2$, kako bismo našli

$$\begin{aligned}(E^2K)_u &= 2EE_uK + E^2K_u = 2EE_uK - E^2(\kappa_2^2)_u = 2EE_uK - EE_u(\kappa_1\kappa_2 - \kappa_2^2) = 0,\\ (E^2K)_v &= 2EE_vK + E^2K_v = 2EE_vK - E^2(\kappa_1^2)_v = 2EE_vK + EE_v(\kappa_1^2 - \kappa_1\kappa_2) = 0.\end{aligned}$$

Stoga $E^2K \equiv const$ i, iz Gaussove jednačine $K = -\frac{1}{2E}\Delta \ln E$ za konformalno parametrizovanu površ, zaključujemo

$$const \equiv \frac{1}{2}E^2K = -E\Delta \ln E = e^{\ln E}\Delta \ln E.$$

♡

Vježba 4. Pokažite da je Gaussova krivina površi invarijantna pod reparamterizacijom i zaključite da Gaussova krivina nestaje ako je površ (lokalno) izometrična ravni, tojest prima izometričnu parametrizaciju.

Rješenje : Gaussova krivina parametrizovane površi je data sa

$$\begin{aligned}K &= \frac{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_u)}{EG - F^2}\\ &= \frac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v)}{EG - F^2}\\ &= \frac{|\mathbf{n}, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v|}{\sqrt{EG - F^2}}\\ &= \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v)}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}.\end{aligned}$$

Sada, ako je $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \mathbf{x}(u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v}))$ reparametrizacija, onda

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} \times \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}$$

tako da $\tilde{n} = \pm\mathbf{n}$, gdje je znak znak determinante $\begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}$ i

$$\tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{u}} \times \tilde{\mathbf{n}}_{\tilde{v}} = \mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}.$$

Stoga

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{n}}_u \times \tilde{\mathbf{n}}_v)}{|\tilde{\mathbf{x}}_u \times \tilde{\mathbf{x}}_v|} = \pm\frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix}}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \left| \begin{vmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ v_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \end{vmatrix} \right|} = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v)}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = K.$$

Sada, ako površ prima izometričnu paramterizaciju, onda je odgovoarajuća prva fundamentalna forma $\mathrm{I} = du^2 + dv^2$. To jest, prima konformalnu parametrizaciju sa $E \equiv 1$.

Stoga $K = -\frac{1}{2}\Delta \ln 1 = 0$. ♡

Vježba 5. (a) Koristeći se lemom sa predavanja, izračunati eksplicitne formule za Christoffelove simbole Γ_{ij}^k koristeći se koeficijentima prve fundamentalne forme.

(b) Dokazati stoga posljedicu s predavanja :

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k g^{km}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}).$$

(c) Izračunati Christofellove simbole za sferu, helikoid i jednokrilni hiperboloid.

(d) Napraviti funkciju `Christoffel[x_,u_,v_]` u Mathematici.

Rješenje :

(a) Koristeći se strukturnim jednačinama koje nam kažu da je

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{11}\mathbf{x}_v + e\mathbf{n}\\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{12}\mathbf{x}_v + f\mathbf{n}\\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2_{22}\mathbf{x}_v + g\mathbf{n}\end{aligned}$$

uzimajući skalarni proizvod svake jednačine sa x_u i x_v, dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F &= \frac{1}{2}E_u, & \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G &= F_u - \frac{1}{2}E_v,\\ \Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F &= \frac{1}{2}E_u, & \Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G &= \frac{1}{2}G_u,\\ \Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F &= F_v - \frac{1}{2}G_u, & \Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G &= \frac{1}{2}G_v.\end{aligned}$$

Rješavajući ovaj sistem u parovima, dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma^2_{11} &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)},\\ \Gamma^1_{12} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)},\\ \Gamma^1_{22} &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG-F^2)}, & \Gamma^2_{22} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG-F^2)}.\end{aligned}$$

(b) Dugačko, ali dosta pravolinijski kada se dokaže (a). Najjednostavnije krenuti s desna na lijevo. Naprimjer, za prvi koficijent imamo da treba da vrijedi

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\sum_k g^{k1}(\partial_1 g_{1k} + \partial_1 g_{1k} - \partial_k g_{11})\\ &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) + \frac{1}{2}g^{21}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11})\\ &= \frac{G}{2(EG-F^2)}(E_u + E_u - E_u) - \frac{F}{2(EG-F^2)}(F_u + F_u - E_v)\\ &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)},\end{aligned}$$

kao što smo i očekivali.

(c) Izračunat ćemo simbole za helikoid. S obzirom da je kod helikoida sa parametrizacijom

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) = (\sinh u\cos v, \sinh u \sin v, v),$$

sa prvom fundamentalnom formom $\mathrm{I}|_{(u,v)} = \cosh^2 u\,\{du^2 + dv^2\}$ imamo da $F = 0$ i $E = G$, tojest konformalno je parametrizovan, to su onda formule značajno jednostavnije, tojest

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma^2_{11} &= -\frac{E_v}{2G},\\ \Gamma^1_{12} &= \frac{E_v}{2E}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{G_u}{2G},\\ \Gamma^1_{22} &= -\frac{G_u}{2E}, & \Gamma^2_{22} &= \frac{G_v}{2G}.\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \sinh u, & \Gamma^2_{11} &= 0,\\ \Gamma^1_{12} &= 0, & \Gamma^2_{12} &= \sinh u,\\ \Gamma^1_{22} &= -\sinh u, & \Gamma^2_{22} &= 0.\end{aligned}$$

♡