Diferencijalna geometrija – Vježbe 1

Reprezentacija krivih i ponavljanje

Rješenja predati na predavanjima, u četvrtak, 5. marta 2020. god.

4. ožujka 2020.

Potsjetnik iz analitičke geometrije

Ravan u koordinatnom prostoru može biti definisana na više načina. Ravan je data u *parametarskoj formi* ukoliko je pretstavljena kao tačka u prostoru koja ima neku linearnu funkciju kao parametar ili dvije parametarske varijable (recimo t i s) u svakoj od svojih koordinata. Na primjer, $(1 + t - 5s, s + t, 5 - 7t), t, s \in \mathbb{R}$, je parametarski data ravan u $\mathbb{R}^3$. Nađite njenu implicitnu jednačinu!

Koristeći sličan pristup kao kod parametarski datih linija u $\mathbb{R}^3$, ukoliko su nam date 3 tačke na ravni $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$ i $C = (x_c, y_c, z_c)$, *koje se ne nalaze na istoj liniji*, dakle nisu *kolinearne*, prvo definišemo vektore

$$u = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \; i \; v = (x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a)$$

koji idu od A do B i od A do C. Sada će svi vektori oblika $(x_a, y_a, z_a) + t \cdot u + s \cdot v$ za sve vrijednosti parametarskih varijabli t i s ići kroz tačke na ravni koja prolazi kroz tačke A, B, C. Stoga ova ravan ima parametarsku formu:

$$\begin{aligned} x &= x_a + t(x_b - x_a) + s(x_c - x_a), \\ y &= y_a + t(y_b - y_a) + s(y_c - y_a), \\ z &= z_a + t(z_b - z_a) + s(z_c - z_a). \end{aligned}$$

Pažnja vektori u i v mogu, ali ne moraju biti ortonormalni jedinični vektori.

Zadatak 1. Naći tangentu na kružni heliks $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ u tački $t = \frac{\pi}{3}$ i napisati je u kanonskom obliku.

Dokaz. Koristeći se formulom da je tangenta $u \mapsto t(u)$ na krivu $t \mapsto \gamma(t)$ u tački t_0 data sa

$$t(u) = \gamma(t_0) + u \cdot \gamma'(t_0),$$

lako dobijamo da je

$$t(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{u}{2}, \frac{\pi}{3} + u\right).$$

Kanonski oblik ove prave je

$$t: \qquad \frac{-2x+1}{\sqrt{3}} = 2y - \sqrt{3} = z - \frac{\pi}{3}$$

□

Zadatak 2. Ispitajte regularnost parametrizacija krivih:

- $\gamma_1(t) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos(t), 2\sin(t), \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cos(t)\right)$
- $\gamma_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, 1 + \frac{t^2}{2}\right)$.
- $\gamma_3(t) = (1 - \cosh(t), \sinh(t), t)$.
- $\gamma_4(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0)$
- $\gamma_5(t) = (e^t\cos 2t, 2, e^t \sin 2t)$

Dokaz.

- $\gamma_1(t) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos(t), 2\sin(t), \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cos(t)\right)$. S obzirom da je

$$\gamma_1'(t) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin(t), 2\cos(t), -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\sin(t)\right), \ ||\gamma_1'(t)|| = 2 \neq 0 \forall t.$$

- $\gamma_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, 1 + \frac{t^2}{2}\right)$.
- $\gamma_3(t) = (1 - \cosh(t), \sinh(t), t)$.
- $\gamma_4(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0)$
- $\gamma_5(t) = (e^t\cos 2t, 2, e^t \sin 2t)$

□

Zadatak 3. Posmatrajmo krivu datu implicitno sa

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \qquad \sqrt{\frac{3}{5}}\,z = \frac{x}{3},$$

Provjerite regularnost krive (Slika 1) i parametrizirajte je.

Dokaz. Prvo, neka su

$$F_1(x,y,z) := 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 36, \qquad F_2(x,y,z) := \sqrt{\frac{3}{5}}z - \frac{x}{3},$$

kako bismo dobili skup

$$C = \{(x,y,z) \,|\, F_1(x,y,z) = F_2(x,y,z) = 0\}.$$

Gradijenti gornjih funkcija su

$$\nabla F_1 = (8x, 18y, 72z), \qquad \nabla F_2 = \left(-\frac{1}{3}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Dva vektora su linearno zavisni ako i samo ako im je vektorski proizvod jednak nuli, tj.

$$0 = \nabla F_1(x,y,z) \times \nabla F_2(x,y,z) \iff y = 0 \,\wedge\, x = -\sqrt{15}z,$$

dakle ovaj vektorski proizvod nestaje za $\lambda(-1, 0, \sqrt{15})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Stavivši ovo nazad u F_1 i F_2, dobijamo

$$F_1 = 544\lambda^2 - 36, \qquad F_2 = \frac{10}{3}\lambda,$$

koji ne mogu istovremeno nestati, tako da se date tačke $\lambda(-1, 0, \sqrt{15})$ ne nalaze na krivoj. Dakle, pošto vektorski proizvod gradijenata ne može nestati, prema teoremi implicitnog preslikavanja, C je regularna kriva.

Primjenjujući pristup naveden iznad, nađimo tri tačke na zadatoj ravni. Npr. to su

$$A(0,0,0),\ B\left(3\sqrt{3}, 0, \sqrt{5}\right),\ C(0,1,0).$$

Zatim formiramo dva vektora

$$u = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3\sqrt{3}, 0, \sqrt{5}), v = (0,1,0)$$

koji čine bazu date ravni, koja je još ortonormirana baza. Stoga ravan možemo predstaviti kao

$$\{p = \lambda\, u + \mu\, v \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Stavljajući ovaj ansatz u jednačinu elipsoida, dobijamo

$$\lambda^2 + \mu^2 = 4,$$

to jest, jednačinu kružnice radijusa 2. Parametrizacija kružnice je data sa

$$\lambda(t) = 2\cos t, \qquad \mu(t) = 2\sin t,$$

tj.,

$$\gamma(t) = \left(\tfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos(t), 2\sin(t), \tfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cos(t)\right).$$

□

Zadatak 4. Pokažite da su konični presjeci ispod regularne krive i nađite njihove parametrizacije.

(a) $x^2 + y^2 = z^2$, $x + z = \sqrt{2}$;

(b) $x^2 + y^2 = z^2$, $x + \sqrt{3}z = 2$;

(c) $x^2 + y^2 = z^2$, $\sqrt{3}x + z = 2$.

Dokaz. Uradit ćemo pod (a). Prvo posmatrajmo funkcije

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \qquad F_2(x, y, z) = x + z - \sqrt{2}.$$

Njihovi gradijenti su

$$\nabla F_1 = (2x, 2y, -2z), \qquad \nabla F_2 = (1, 0, 1).$$

Vektorski proizvod gradijenata je

$$\nabla F_1 \times \nabla F_2 = 2(y, z - x, y) = 0 \iff y = 0 \wedge z = x.$$

Dakle, gradijenti su linearno zavisni u tačkama $(\lambda, 0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako bi ove tačke bila na krivoj, onda bi istovremeno morale biti zadovoljene jednačine

$$F_1(\lambda, 0, \lambda) = F_2(\lambda, 0, \lambda) = 0,\ tj.$$

$$\lambda^2 = 0 \ \wedge \ 2\lambda - \sqrt{2} = 0$$

što je nemoguće. Dakle, gradijenti su linearno nezavisni, pa je stoga sa $C = \{F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0\}$ definisana regularna kriva.

Dalje, parametrišemo ravan pomoću tri nekolinearne tačke na ravni

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C(0, 0, \sqrt{2}),$$

kako bismo dobili parametrizaciju ravni

$$\begin{aligned}
x &= x_a + \tau(x_b - x_a) + \sigma(x_c - x_a) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma, \\
y &= y_a + \tau(y_b - y_a) + \sigma(y_c - y_a) = \tau, \\
z &= z_a + \tau(z_b - z_a) + \sigma(z_c - z_a) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma.
\end{aligned}$$

gdje su $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$. Ubacivši ovo u jednačinu konusa, dobijamo

$$\frac{1}{2} - \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 + \tau^2 = \frac{1}{2} + \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 \iff 2\sigma = \tau^2$$

Ovo direkno možemo parametrizovati sa

$$\tau(t) = t, \qquad \sigma(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

tako da je parametrizacija krive, vraćajući ovo u jednačinu ravi

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, 1 + \frac{t^2}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 5. Dokažite teoremu implicitnog preslikavanja pomoću teoreme inverznog preslikavanja, koristeći se našom notacijom.

Dokaz. Predavanja iz Analize 3 i 4.

Posmatrajmo $G : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $G(x, y) := (x, F(x, y))$. G je, zajedno sa F, neprekidno diferencijabilna sa izvodom

$$(u, v) \mapsto d_{(p,q)}G(u, v) = (u, d_{(p,q)}F(u, v)),$$

koja je invertibilna jer je $v \mapsto d_{(p,q)}F(0, v)$ takva (Jacobijeva matrica je donja triangularna blok matrica gdje su dva diagonalna bloka invertibilna).

Odavdje vidimo, po teoremi inverznog preslikavanja, da G ima (jedinstveno) neprekidno diferencijabilno inverzno preslikavanje G^{-1} definisano u okolini tačke $(p, F(p, q))$.

Sad definišimo g sa $(x, g(x)) := G^{-1}(x, F(p, q))$, tj, g je projekcija G^{-1} na $\mathbb{R}^k$ i stoga je neprekidno diferencijabilna, te primjetite da

$$(x, F(x, g(x))) = G(G^{-1}(x, F(p, q))) = (x, F(p, q))$$

tako da je $F(x, g(x)) \equiv F(p, q)$ kako smo i zeljeli. □

Zadatak 6. Dokažite Picard-Lindelöfovu teoremu: Neka su I otvoreni potskup $\mathbb{R}$ i U otvoreni potskup $\mathbb{R}^n$ i neka je $I \times U \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ neprekidna i Lipschitz neprekidna po y i $(x_0, y_0) \in I \times U$; onda *problem početne vrijednosti*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

ima jedinstveno lokalno rješenje ako je f diferencijabilna funkcija.

hvala Amar Bapić. Izaberimo $a, b > 0$ tako da zatvoreni cilindar

$$Z = \left\{(x, y) \in I \times U \middle| |x - x_0| \le a, \ \| y - y_0 \| \le b\right\}$$

bude u potpunosti sadržan u $I \times U$. Kako je funkcija f neprekidna na $I \times U$, ona je neprekidna i na zatvorenom cilindru Z, pa je kao takva ona ograničena, tj. postoji konstanta $M > 0$ takva da za sve $(x, y) \in Z$ vrijedi $\| f(x, y) \| \le M$. Izaberimo da je $M := \max\left\{\| f(x,y) \| \,\middle|\, (x,y) \in Z\right\}$. Uzmimo da je $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Dokaz ćemo izvesti u više koraka.

I korak

Formirajmo niz funkcija $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_{k+1}(x) &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_k(t))dt, \quad k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Trebamo pokazati da niz (1) ravnomjerno konvergira na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ka nekoj neprekidnoj funkciji $y(x)$ definisanoj na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

II korak

Principom potpune matematičke indukcije pokažimo da svaka od funkcija iz niza (1) zadovoljava sljedeće osobine:

1. dobro definirana, tj. postoje vrijednosti $y_n(x)$ za sve $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;
2. neprekidna je na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$;
3. $\| y_n(x) - y_0 \| \leq b$ za sve $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Za $n = 0$, tj. za funkciju $y_0(x)$ imamo da vrijedi:

1. $y_0(x) = y_0$ $(x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha])$, tj. dobro je definisana.
2. $y_0(x)$ je neprekdina funkcija, jer je ona konstanta.
3. Jasno je da je $\| y_0(x) - y_0(x) \| = \| y_0 - y_0(x) \| = 0 \leq b$

Pretpostavimo sada da funkcija $y_n(x)$ zadovoljava sve osobine $(i), (ii), (iii)$, te pokažimo da tada i funkcija $y_{n+1}(x)$ mora zadovoljavati te osobine.

1. $y_{n+1}(x) \stackrel{(1)}{=} y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$

   Kako je po pretpostavci funkcija $y_n(x)$ neprekidna na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, a funkcija f neprekidna na zatvorenom cilindru Z, onda je i funkcija $f(t, y_n(t))$ neprekidna za sve $t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ kao kompozicija neprekidnih funkcija y_n i f. No, kako integral neprekidne funkcije postoji, to zaista postoji svaka vrijednost $y_{n+1}(x)$ za sve $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

2. $y_{n+1}(x)$ je zbir konstante i integrala $\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$ od kojih je svaka pojedinačno neprekidna funkcija (konstanta je neprekdina, integral neprekidne funkcije je neprekidna funkcija) za sve $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

3. $$\begin{aligned} \| \; y_{n+1} - y_0 \; \| &= \left\| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt - y_0 \right\| \\ &= \left\| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \right\| \\ &\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(t, y_n(t))\|}_{\leq M} dt \right| \\ &\leq M \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| \\ &= M \cdot |x - x_0| \\ &\leq M\alpha \\ &\leq b \end{aligned}$$

Dakle, prema principu potpune matematičke indukcije svaka od datih funkcija u nizu (1) zadovoljava osobine (i), (ii) i (iii).

III korak

Pokažimo sada principom matematičke indukcije po n da za sve $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ vrijedi:

$$\|y_n(x) - y_{n-1}(x)\| \leq ML^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{k!} < ML^{n-1} \frac{\alpha}{k!}, \tag{2}$$

pri čemu je $L > 0$ konstanta iz Lipschitzove neprekidnosti funkcije f po y:

$$\|f(x, y) - f(x, \overline{y}\| \leq L\|y - \overline{y}\|, \;\; (x, y), (x, \overline{y}) \in Z. \tag{3}$$

Za $n = 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
\|y_1(x) - y_0(x)\| &= \left\| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt - y_0 \right\| \\
&\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(t, y_0(t))\|}_{\leq M} dt \right| \\
&\leq M \cdot \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| \\
&= M|x - x_0| < M\alpha
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je nejednakost (2) tačna za neki prirodan broj $n > 1$. Dokažimo sada tačnost nejednakosti i za idući prirodan broj $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}(x) - y_n(x)\| &= \left\| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \right\| \\
&\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\|f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t)\|}_{\overset{(3)}{\leq} L\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\|} dt \right| \\
&\leq L \left| \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\|}_{\overset{pp}{\leq} \frac{ML^{n-1}|t-x_0|^n}{n!}} dt \right| \\
&\leq \frac{ML^n}{n!} \cdot \left| \int\limits_{x_0}^{x} |t - x_0|^n dt \right| \\
&= \frac{ML^n}{n!} \cdot \frac{|t - x_0|^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_0}^{x} \\
&= ML^n \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} < ML^n \cdot \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Dakle, nejednakost (2) vrijedi za svaki prirodan broj n.

IV korak

Pokažimo sada da niz funkcija $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ definisanih sa (1) uniformno konvergira na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ka nekoj neprekidnoj funkciji $y = y(x)$ definiranoj na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

U tu svrhu formirajmo funkcionalni red

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \tag{4}$$

Primijetimo da je n-ta parcijalna suma $S_n(x)$ reda (4) jednaka

$$\begin{aligned} S_n(x) &= y_0 + \sum_{k=1}^{n} [y_k(x) - y_{k-1}(x)] \\ &= y_0 + y_1(x) - y_0(x) + y_2(x) - y_1(x) + \ldots + y_n(x) - y_{n-1}(x) \\ &= y_n(x), \end{aligned}$$

za sve $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \; n = 1, 2, \ldots$. Napravimo majorizaciju reda (4) nekom konstantom kako bismo mogli iskoristiti Weierstrasse-ov M-test.

$$\begin{aligned} \left\| y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \right\| &\leq \|y_0\|| + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n(x) - y_{n-1}(x)\| \\ &\overset{(2)}{<} \|y_0\| + M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{n-1}\alpha^n}{n!} \\ &= \|y_0\| + \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^n}{n!} \\ &= \|y_0\| + \frac{M}{L}(e^{L\alpha} - 1) \end{aligned}$$

Dakle, dati red se zaista može majorizirati nekom konstantom, pa prema Weierstrasse-ovom M-testu niz parcijalnih suma reda (4), tj. niz $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ uniformno konvergira na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ka nekoj funkciji $y = y(x)$ definisanu na tom intervalu. Kako je $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ niz neprekidnih funkcija na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, to je onda i $y = y(x)$ neprekidna funkcija na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

V korak

Pokažimo sada da je $y = y(x)$ rješenje problema jedinstvene vrijednosti, tj. da je ono rješenje integralne jednadžbe

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

Kako niz funkcija $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ uniformno konvergira na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ka funkciji $y(t)$, to onda i niz funkcija $\{f(t, y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ također ravnomjerno konvergira na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ka funkciji $f(t, y(t))$ koja je neprekidna na $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ kao kompozicija dvije neprekidne funkcije f i y. Imamo da je

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t)) \\ &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))dt \\ &= y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \end{aligned}$$

tj. $y(x)$ zadovoljava navedenu integralnu jednačinu i neprekidna je funkcija na $[x_0 - \alpha, x_0+\alpha]$, tj. ona je zaista rješenje problema jedinstvene vrijednosti $y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$.

VI korak

Dokažimo sada jedinstvenost problema početne vrijednosti. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, tj. da su $y(x)$ i $\tilde{y}(x)$ dva različita rješenja problema početne vrijednosti, tj. vrijedi

$$\begin{aligned} y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0 \\ \tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x)),\ \tilde{y}(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

Ako oduzmemo date jednakosti dobit ćemo da je

$$\begin{aligned} & y'(x) - \tilde{y}'(x) = f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)) \\ \Leftrightarrow & \int\limits_{x_0}^{x} (y'(x) - \tilde{y}'(x))dt = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}'(x))dt \\ \Leftrightarrow & y(x) - y(x_0) - \tilde{y}(x) - \tilde{y}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))dt \\ \Leftrightarrow & y(x) - \tilde{y}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))dt \end{aligned}$$

Dalje je,

$$\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{\|(f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))\|}_{\overset{(3)}{\leq} L\|y(t) - \tilde{y}(t)\|} dt \right|$$

$$\Leftrightarrow \|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq L \int\limits_{x_0}^{x} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| dt \tag{5}$$

(Napomena: Pretpostavimo da je $x > x_0$. Dokaz bi bio analogan i za $x < x_0$.)

Označimo sa

$$\Upsilon(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| dt \tag{6}$$

Sada je očigledno:

$$\Upsilon'(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{x_0}^{x} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| dt = \|y(x) - \tilde{y}(x)\|.$$

Zbog toga se nejednakost (5) može napisati u obliku

$$\Upsilon'(x) \leq L\Upsilon(x) \quad (x \in (x_0, x_0 + \alpha])$$

Množeći ovu nejednakost sa $e^{-Lx} > 0$ dobijamo:

$$\Upsilon'(x)e^{-Lx} - L\Upsilon(x)e^{-Lx} \leq 0,$$

tj.

$$\left(\Upsilon(x) \cdot e^{-Lx}\right)' \leq 0, \quad \text{za sve } x \in (x_0, x_0 + \alpha]$$

Integracijom posljednje nejednakosti u granicama od x_0 do x dobit ćemo:

$$\Upsilon(x)e^{-Lx} - \Upsilon(x_0)e^{-Lx_0} \leq 0 \tag{7}$$

Iz (6) vidimo da je $\Upsilon(x_0) = 0$, pa nam nejdnakost (7) postaje

$$\Upsilon(x) \leq 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \alpha])$$

No, iz (6) slijedi da je $\Upsilon(x) \geq 0$ $(x \in (x_0, x_0 + \alpha])$. Prema tome, mora da je $\Upsilon(x) \equiv 0$ na $(x_0, x_0 + \alpha]$, tj. mora da je $y(x) \equiv \tilde{y}(x)$ na $(x_0, x_0 + \alpha]$, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Prema tome, $y = y(x)$ je jedinstveno rješenje problema početne vrijednosti. $\square$

Zadatak 7. (a) Iskoristiti Software Mathematica, kako biste napravili funkciju koja računa jednačinu tangente na datu parametarsku krivu $tangenta[\gamma\_, t\_, t0\_]$ na krivoj γ parametra t u tački $t0$ u parametarskom obliku sa parametrom t.

(b) Iskoristiti pod (a) kako biste nacrtali tangente u različitim tačkama za različite krive.

Dokaz. (a)

```
tangenta[gama_, t_, t0_] :=
 Simplify[(gama /. t -> t0) + t*(D[gama, t] /. t -> t0),
  Element[t, Reals]]
```

(b) Mnogo načina, ali jednostavno kad se ima pod (a).

□