

Dužina luka i oskulatorna ravan

Diferencijalna geometrija – Vježbe 2

Rješenja predati na predavanjima, u petak 2. aprila 2021. god.

Zadatak 1. Pokazati da je dužina luka invarijantna pod reparametrizacijom krive.

Zadatak 2. Izračunajte dužinu luka i reparametrizirajte, ako je moguće, dužinom luka krive $t \mapsto \gamma_i$:

- $\gamma_1(t) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos(t), 2 \sin(t), \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cos(t) \right)$
- $\gamma_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, 1 + \frac{t^2}{2} \right)$.
- $\gamma_3(t) = (1 - \cosh(t), \sinh(t), t)$.
- $\gamma_4(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0)$
- $\gamma_5(t) = (e^t \cos 2t, 2, e^t \sin 2t)$

Zadatak 3. Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t .

Zadatak 4. Označite sa $T(t) := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$. Dokažite da je $T'(t) \perp T(t), \forall t$. Dokažite da je $T'(t) \neq 0$ ako je $\gamma' \times \gamma''(t) \neq 0, \forall t$.

U tom slučaju, dokažite da $N := \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ definiše principalnu normalu duž γ .

Zadatak 5. Izračunajte tangenta vektorska polja i principalne normale krivih iz zadatka 2.

Zadatak 6. Izračunati oskulatornu ravan na kružni heliks u proizvoljnoj tački.

Zadatak 7 (Bonus). (a) Iskoristiti Software Mathematica, kako biste napravili funkciju koja računa jednačine tangente i principalne normale neke parametrizovane krive.

- (b) Iskoristiti Software Mathematica, kako biste napravili funkciju koja računa jedinačinu oskulatorne ravni $paramOskRavan[\gamma_-, t_-, t0_-]$ na krivoj γ parametra t u tački $t0$ u parametarskom obliku.
- (c) Napraviti animaciju oskulatorne ravni na kružnom heliksu, kao što je to urađeno na slici na stranici predmeta, vidi slijedeću stranicu.