Dužina luka i oskulatorna ravan

Diferencijalna geometrija – Vježbe 2

Rješenja predati na predavanjima, u četvrtak 2. aprila 2021. god.

Zadatak 1. Pokazati da je dužina luka invarijantna pod reparametrizacijom krive.

Dokaz. Želimo izračunati dužinu luka reparametrizovane krive $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \gamma(u(t))$ izmedju dvije tačke $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(u(t_0))$ i $\tilde{\gamma}(t_1) = \gamma(u(t_1))$.

Prvo pretpostavimo da je $u' > 0$ (primjetiti da $t \mapsto u'(t)$ ne mijenja znak jer je neprekidna) tako da obje, γ i $\tilde{\gamma}$ parametrišu krivu u istom pravcu. Onda

$$\int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\gamma}'(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(u(t))|\, u'(t) dt = \int_{u(t_0)}^{u(t_1)} |\gamma'(u)|\, du$$

tako da je dužina luka $\tilde{\gamma}$ izmedju $\tilde{\gamma}(t_0)$ i $\tilde{\gamma}(t_1)$ ista kao dužina luka γ izmedju $\gamma(u(t_0))$ i $\gamma(u(t_1))$ kao što smo i tražili.

Sada pretpostavimo da je $u' < 0$, to jest, da su dvije parametrizacije u suprotnim pravcima. Onda

$$\int_{t_0}^{t_1} |\tilde{\gamma}'(t)|\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(u(t))|\, u'(t) dt = -\int_{u(t_0)}^{u(t_1)} |\gamma'(u)|\, du = \int_{u(t_1)}^{u(t_0)} |\gamma'(u)|\, du$$

tako da su dužine ponovo iste. □

Zadatak 2. Izračunajte dužinu luka i reparametrizirajte, ako je moguće, dužinom luka krive $t \mapsto \gamma_i$:

- $\gamma_1(t) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos(t), 2\sin(t), \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cos(t) \right)$
- $\gamma_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, 1 + \frac{t^2}{2} \right)$.
- $\gamma_3(t) = (1 - \cosh(t), \sinh(t), t)$.

- $\gamma_4(t) = e^t(\cos t, \sin t, 0)$
- $\gamma_5(t) = (e^t \cos 2t, 2, e^t \sin 2t)$

Dokaz. Prva dužina luka je

$$s(t) = \int_0^t |\gamma_1'(\tau)| d\tau = 2 \int_0^t d\tau = 2t.$$

Stoga je reparametrizacija dužinom luka krive γ_1

$$\gamma_1(s) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2}\right), 2 \sin\left(\frac{s}{2}\right), \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right)$$

Druga dužina luka je

$$s(t) = \int_0^t |\gamma_2'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{1+\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arcsinh}(t) \right).$$

Ova je funkcija invertibilna, ali nije lako naći njen invers. Sjetimo se da je

$$\operatorname{arcsinh}(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$$

Treća dužina luka je

$$s(t) = \int_0^t |\gamma_3'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{1+\cosh(2\tau)} d\tau = \tanh(t)\sqrt{1+\cosh(2t)}.$$

Ova je funkcija invertibilna, ali nije lako naći njen invers.

Četvrta dužina luka je

$$s(t) = \int_0^t |\gamma_4'(\tau)| d\tau = \sqrt{2} \int_0^t e^\tau d\tau = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

Stoga je reparametrizacija dužinom luka krive γ_4, za $t(s) = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

$$\gamma_4(s) = (1 + \frac{s}{\sqrt{2}}) \left(\cos\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

Peta dužina luka je

$$s(t) = \int_0^t |\gamma_5'(\tau)| d\tau = \sqrt{5} \int_0^t e^\tau d\tau = \sqrt{5}e^t - \sqrt{5}.$$

itd kao kod γ_4. □

Zadatak 3. Dokažite da je $t \mapsto \gamma(t)$ prava linija ako su $\gamma''(t)$ i $\gamma'(t)$ linearno zavisne za sva t.

Dokaz. Pretpostavićemo da je γ regularna kriva tako da je $\gamma'(t) \neq 0$ za sva t.

Jedan mogući nastavak je da pretpostavimo da je γ parametrizovana dužinom luka (reparametrizacija dužinom luka ne mijenja pretpostavku da su γ'' i γ' linearno zavisne!).

Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$. Neka je $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Zbog toga što su γ'' i γ' linearno zavisne, imamo

$$\begin{aligned} x''(t) &= \lambda(t)x'(t), \\ y''(t) &= \lambda(t)y'(t), \\ z''(t) &= \lambda(t)z'(t), \end{aligned}$$

odakle itegracijom dobijamo

$$\begin{aligned} x'(t) &= C_1 e^{\int \lambda(t)dt}, \\ y'(t) &= C_2 e^{\int \lambda(t)dt}, \\ z'(t) &= C_3 e^{\int \lambda(t)dt}, \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \int e^{\int \lambda(t)dt} dt + D_1, \\ y(t) &= C_2 \int e^{\int \lambda(t)dt} dt + D_2, \\ z(t) &= C_3 \int e^{\int \lambda(t)dt} dt + D_3. \end{aligned}$$

Dakle

$$\gamma(t) = Cu(t) + D$$

pri čemu su $u(t) = \int e^{\int \lambda(t)dt} dt$, $C = (C_1, C_2, C_3)$ i $D = (D_1, D_2, D_3)$, što predstavlja jednačinu prave.

Napomena: Razmislite o jednačini oskulatorne ravni u ovom slučaju!

Drugi način je slijedeći, radeći sa proizvoljnom parametrizacijom: Činjenica da su γ'' i γ' linearno zavisne se može formulisati kao $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ (jer $\gamma' \neq 0$) za pogodnu funkciju $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}$.

Fiksirajmo t_0 i $n_1, n_2 \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ tako da $n_1, n_2 \perp \gamma'(t_0)$ i $n_1 \perp n_2$ (konkretno, n_1 i n_2 su linearno nezavisni). Sada posmatrajmo funkcije

$$t \mapsto g_i(t) := n_i \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)).$$

Spoznajemo da

$$g_i(t_0) = g_i'(t_0) = 0 \text{ i } g_i''(t) = \lambda(t) g_i'(t),$$

to jest, g_i zadovoljavaju linearnu običnu diferencijalnu jednačinu, koja ima jedinstveno, globalno definisano rješenje $g_i \equiv 0$. Stoga, $t \mapsto \gamma(t)$ zadovoljava jednačine prave:

$$n_1 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = n_2 \cdot (\gamma(t) - \gamma(t_0)) = 0.$$

□

Zadatak 4. Označite sa $T(t) := \frac{\gamma'}{||\gamma'||}$. Dokažite da je $T'(t) \perp T(t), \forall t$. Dokažite da je $T'(t) \neq 0$ ako je $\gamma' \times \gamma''(t) \neq 0, \forall t$.

U tom slučaju, dokažite da $N := \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$ definiše principalnu normalu duž γ.

Dokaz. Sa obzirom da je $T \cdot T = ||T||^2 = 1$, diferencirajući, dobivamo

$$2\, T' \cdot T = 0 \Rightarrow T \perp T'.$$

Pretpostavimo dakle da je $\gamma' \times \gamma''(t) \neq 0, \forall t$, što znači da su to linearno nezavisna vektorska polja. Dalje

$$T' = \left(\frac{\gamma'}{||\gamma'||}\right)' = \left(\frac{1}{||\gamma'||}\right)' \gamma' + \left(\frac{1}{||\gamma'||}\right) \gamma''. \tag{1}$$

S obzirom da γ' i γ'' množe skalari, a to su dva linearno nezavisna vektorska polja, zaključujemo da je $T' \neq 0, \forall t$.

Stoga je $N = \frac{T'}{||T'||}$ dobro definisano jedinično vektorsko polje. Ono je vektor normale zbog činjenice da je $T' \perp T$, a principalna je normala na osnovu jednačine (1), jer je $\gamma''(t) \in span\{\gamma'(t), N(t)\}$, odnosno može se predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektorska polja. □

Zadatak 5. Izračunajte tangentna vektorska polja i principalne normale krivih iz zadatka 2.

Dokaz. Koristimo formule

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}, \qquad N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$$

1. $T(t) = (-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \sin t, \cos t, -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \sin t),$
   $N(t) = (-\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \cos t, -\sin t, -\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \cos t)$
2. $T(t) = (-\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{1+4t^2}}),$
   $N(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2+8t^2}}, -\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{2+8t^2}})$

3. $T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tanh t, 1, \text{sech } t), N(t) = (-\text{sech } t, 0, -\tanh t)$.

4. $T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t, 0)), N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t, 0)$

5. $T(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos 2t - 2\sin 2t, 0, 2\cos 2t + \sin 2t)), N(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\cos 2t - \sin 2t, 0, \cos 2t - 2\sin 2t)$

□

Zadatak 6. Izračunati oskulatornu ravan na kružni heliks u proizvoljnoj tački.

Dokaz. Kružni heliks je u proizvoljnoj tački $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (r\cos t, r\sin t, ht), \\
\gamma'(t) &= (-r\sin t, r\cos t, h), \\
\gamma''(t) &= (-r\cos t, -r\sin t, 0)
\end{aligned}$$

tako da je $\mathcal{O}(t) = \gamma(t) + \text{ span } \{\gamma'(t), \gamma''(t)\}$ tojest

$$r((1-b)\cos t - a\sin t, a\cos t + (1-b)\sin t, \frac{h}{r}(a+t)),$$

gdje su $a, b \in \mathbb{R}$. Alternativno,

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - r\cos t & Y - r\sin t & Z - ht \\ -r\sin t & r\cos t & h \\ -r\cos t & -r\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kad izračunamo ovo, dobijemo

$$\mathcal{O} : h\sin tX - h\cos tY + rZ - hrt = 0$$

Uzmimo sada neku konkretnu tačku i konkretni heliks: $r = 2, h = 10, t = \pi$, daje nam

$$(2b - 2, -2a, 10a + 10\pi),$$

tj.

$$5Y + Z - 10\pi = 0.$$

□

Zadatak 7 (Bonus)**.** (a) Iskoristiti Software Mathematica, kako biste napravili funkciju koja računa jednačine tangente i principalne normale neke parametrizovane krive.

(b) Iskoristiti Software Mathematica, kako biste napravili funkciju koja računa jednačinu oskulatorne ravni $paramOskRavan[\gamma\_, t\_, t0\_]$ na krivoj γ parametra t u tački $t0$ u parametarskom obliku.

(c) Napraviti animaciju oskulatorne ravni na kružnom heliksu, kao što je to urađeno na slici na stranici predmeta, vidi slijedeću stranicu.

Dokaz. (a)

```
tangenta[gamma_, t_] := Module[{tmp, tmp2},
  tmp = D[gamma, t];
  tmp2 = Simplify[Sqrt[tmp.tmp], Element[t, Reals]];
  Return[Simplify[tmp/tmp2, Element[t, Reals]]]
  ]
normala[gamma_, t_] := Module[{tmp, tmp2, tmp3},
  tmp3 = tangenta[gamma, t];
  tmp = D[tmp3, t];
  tmp2 = Simplify[Sqrt[tmp.tmp], Element[t, Reals]];
  Return[Simplify[tmp/tmp2, Element[t, Reals]]]
  ]
```

(b)

```
paramOskRavan[gamma_, t_, t0_] :=
 Module[{nulti, izvod, drugi},
  nulti := gamma /. t -> t0;
  izvod := D[gamma, t] /. t -> t0;
  drugi := D[gamma, {t, 2}] /. t -> t0;
  Return[Simplify[nulti + alpha*izvod + beta*drugi]];
  ]
```

(c) Mnogo načina, ali jednostavno kad se ima pod (a).

□