Krivina

Diferencijalna geometrija – Vježbe 3

Rješenja predati na predavanjima, u petak 9. aprila 2021. god.

***Primjer* 1.** Uvjerite se da se oskulatorna kružnica dužinom luka parametrizovane krive γ u tački $\gamma(s_0)$ (koristite $s_0 = 0$ kako bi vam bilo lakše) doista može parametrizovati (dužinom luka) tako da se Taylorovi polinomi drugog reda zaista poklapaju. $\diamondsuit$

Dokaz. Parametiziramo oskulatornu kružnicu na slijedeći način (uz pretpostavku da je $s_0 = 0$):

$$s \mapsto \alpha(s) := \gamma(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)}\, N(0) + \tfrac{1}{\kappa(0)}\{\sin(\kappa(0)s)\, T(0) - \cos(\kappa(0)s)\, N(0)\}.$$

Primjetimo da je ovo parametrizacija dužinom luka jer

$$|\alpha'(s)|^2 = |\cos(\kappa(0)s)\, T(0) + \sin(\kappa(0)s)\, N(0)|^2 \equiv 1.$$

Onda:

$$\begin{aligned}
\alpha(0) &= \gamma(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\, N(0) - \frac{1}{\kappa(0)}\, N(0) = \gamma(0)(\text{dodir nultog reda}),\\
\alpha'(0) &= \cos(0)\, T(0) = \gamma'(0)(\text{dodir prvog reda}),\\
\alpha''(0) &= \kappa(0)\cos(0)\, N(0) = T'(0) = \gamma''(0)(\text{dodir drugog reda});
\end{aligned}$$

stoga se izvodi od γ i α poklapaju u $s = s_0 = 0$ do drugog reda i, posljedično, Taylorovi polinomi drugog reda od γ i α su isti u $s = 0$. ∎

***Primjer* 2.** Izračunati oskulatornu kružnicu i centar krivine kružnog heliksa u proizvoljnoj tački. $\diamondsuit$

Dokaz. Koristeći formulu za oskulatornu kružnicu

$$\alpha(s) := \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\{\sin(\kappa(s_0)s)\, T(s_0) + [1 - \cos(\kappa(s_0)s)]\, N(s_0)\}, \qquad (1)$$

te ranije izračunate formule za krivinu, tangentni i principalni normalni vektor, ovo treba biti pravolinijski. Napomena - obavezno se treba koristiti parametrizacija dužinom luka!

Stoga sada želimo izračunati oskulatornu kružnicu na kružni heliks

$$\gamma(s) = (\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$$

u $s_0 = 0$. S obzirom da znamo da su

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, 1\right),\ N(s) = -(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$$

lako vidimo da je $\kappa(s) = \frac{1}{2}$. Tako da, bez obzira u kojoj tački posmatrali, radijus oskulatorne kruvnice je uvijek konstantan, u ovom slučaju $\rho = 2$.

Kako bismo odredili centar kružnice, koristimo

$$c(s_0) = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0) = \left(-\cos\frac{s_0}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s_0}{\sqrt{2}}, \frac{s_0}{\sqrt{2}}\right) = (-1, 0, 0)$$

Konačno, koristeći se formulom (1), dobijamo da je oskulatorna kružnica parametrizirana dužinom luka data sa

$$\alpha(s) = \left(-1 + \cos\frac{s}{2}, \sqrt{2}\sin\frac{s}{2}, \sqrt{2}\sin\frac{s}{2}\right)$$

■

Primjer 3. Po definiciji izračunati krivinu krivih $t \mapsto \gamma_i(t)$:

- $\gamma_1 = (e^t\cos t, e^t\sin t, 0)$;
- $\gamma_2 = (t, \cosh t, 1)$;
- $\gamma_3 = (\cos^2 t, \sin^2 t, \sin^2 t + 1)$;
- $\gamma_4 = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 + \sin t, 2 - \frac{3}{5}\cos t\right)$;
- $\gamma_5 = \left(\frac{t+\sin t}{2}, \frac{-t+\sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)$

♢

Rješenje :

1. Na osnovu drugog zadatka sa prošlih vježbi, znamo da je

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

reparametrizacija dužinom luka krive γ_1. Sada, njena krivina je, do znaka, data sa

$$\kappa^2(s) = |\tilde{T}'(s)|^2 = |\tilde{\gamma}''(s)|^2 = \frac{1}{(\sqrt{2}+s)^2} = \frac{1}{2e^{2t}}.$$

2. Brzina je
$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t,$$
jer je hiperbolni kosinus striktno pozitivna funkcija i kriva γ_2 je regularna na cijelom $\mathbb{R}$. Dužina luka je
$$s(t) = \int_0^t \cosh t dt = \sinh t \ \Rightarrow \ t(s) = \text{arcsinh } s.$$
Odavdje je
$$\tilde{\gamma}(s) = (\text{arcsinh } s, \sqrt{1+s^2}, 1).$$
Dakle
$$T(s) = \tilde{\gamma}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, 0\right),$$
$$N(s) = T'(s)/|T'(s)| = \left(-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, 0\right),$$
$$B(s) = (0,0,1).$$
$$\kappa(s) = |\gamma''(s)| = \frac{1}{1+s^2}.$$

3. Za treću krivu imamo da je brzina
$$|\gamma'(t)| = 2\sqrt{3}|\sin t \cos t|$$
S obzirom da kriva mora biti regularna, izabrat ćemo interval $t \in (0, \pi/2)$, pa je $|\gamma'(t)| = 2\sqrt{3} \sin t \cos t$. Dužina luka je
$$s(t) = \sqrt{3}\sin^2 t \ \Rightarrow \ \sin^2 t = \frac{s}{\sqrt{3}},$$
pa je stoga
$$\tilde{\gamma}(s) := (1 - 3^{-1/2}s, 3^{-1/2}s, 1 + 3^{-1/2}s)$$
parametrizacija dužinom luka. Vidimo da je u pitanju prava! Dakle krivina je nula.

Lako je uvidjeti, vidi prethodne vježbe, da je
$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = 2(-\sin 2t, \sin 2t, \sin 2t) \times 4(-\cos 2t, \cos 2t, \cos 2t) = 0,$$
što je jasno i iz činjenice da su γ' i γ'' linearno zavisni, jer je
$$\gamma''(t) = 2\text{ctg } 2t \ \gamma'(t).$$

4. S obzirom da je $|\gamma'(t)| = 1$, kriva je već parametrizovana dužinom luka, tj. $\gamma(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s, 1 + \sin s, 2 - \frac{3}{5}\cos s\right)$; Tangentni vektor je
$$T(s) = \gamma'(s) = \left(-\frac{4}{5}\sin s, \cos s, \frac{3}{5}\sin s\right).$$

Principalna normala je

$$N(s) = T'(s)/|T'(s)| = \left(-\frac{4}{5}\cos s, -\sin s, \frac{3}{5}\cos s\right).$$

Binormala je

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right).$$

S obzirom da je $\kappa(s) = |\gamma''(s)| = 1$, te da je $B' = 0 \;\; \Rightarrow \tau = 0$, pa je u pitanju jednična kružnica!

5. S obzirom da je kriva već parametrizovana dužinom luka, imamo da je

$$T(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t, -1 + \cos t, -\sqrt{2}\sin t)$$

$$N(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sin t, \sin t, 2\cos t)$$

Odavdje slijedi da je

$$\kappa(t) = T'(t) \cdot N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. S obzirom da je $||\gamma_5'|| = 1$, kriva je već parametrizovana dužinom luka. Dakle, imamo da je

$$T(s) = \frac{1}{2}(1 + \cos s, -1 + \cos s, -\sqrt{2}\sin s),$$

$$N(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, \sin s, \sqrt{2}\cos s)$$

Stoga je krivina

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} = ||\gamma_5''(s)||.$$

♡

Primjer 4. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ parametrizovana kriva tako da $T'(t) \neq 0$, $\forall t$. Pokazati da možemo izabrati $N = \frac{T'}{|T'|}$ i da je, sa ovakvim izborom N,

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}. \tag{2}$$

♢

Rješenje : Prvo, $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ je jedinično tangentno vektorsko pokje duž γ i stoga

$$T' \cdot T = \frac{1}{2}(|T|^2)' \equiv 0$$

tako da $N := \frac{T'}{|T'|}$ definiše jedinično normalno polje duž γ čim imamo $T' \neq 0$. Dalje,

$$\gamma'' = (|\gamma'|\,T)' = |\gamma'|'\,T + |\gamma'|\,T' \in \text{span}\,\{T, N\}$$

tako da je N principalno normalno polje.

Sada posmatrajmo reparametrizaciju dužinom luka $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ krive $t \mapsto \gamma(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(s) &= t'(s)\,\gamma'(t(s)) \\
\tilde{\gamma}''(s) &= t'^2(s)\,\gamma''(t(s)) + t''(s)\,\gamma'(t(s))
\end{aligned}$$

sa $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$ i $t''(s) = -\frac{\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^3}\,t' = -\frac{\gamma'(t)\cdot\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^4}$. Stoga

$$\begin{aligned}
\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s) &= \tilde{T}'(s)\cdot\tilde{N}(s) = |\tilde{T}'(s)| = |\tilde{\gamma}''(s)| \\
&= \frac{\sqrt{|\gamma'(t)|^2|\,\gamma''(t)|^2 - (\gamma'(t)\cdot\gamma''(t))^2}}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3};
\end{aligned}$$

♡

***Primjer* 5.** Izračunati krivinu krive $t \mapsto \gamma(t) = \left(t, \dfrac{1+t}{t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right)$ koristeći se formulom (2). Pokušajte izračunati krivinu po definiciji! ♢

Rješenje : Koristimo formulu (2):

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right), \\
\gamma''(t) &= \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right),
\end{aligned}$$

tako da je

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \frac{2}{t^3}(1, -1, 1).$$

Intenzitet je $||\gamma'(t)\times\gamma''(t)|| = \frac{2\sqrt{3}}{|t|^3}$, dok je

$$||\gamma'(t)|^3 = 2\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Stoga imamo da je

$$\kappa(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{t^3}{(1+t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}}\text{sign } t$$

(Primjetiti da je kriva samo definisana za $t \neq 0$ i da znak krivine zavisi od izbora pravca za principalnu normalu.)

Po definiciji ovo bi išlo jako teško, jer je

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{2 + \frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^4}},$$

pa je izračunavanje dužine luka netrivijalno. $\heartsuit$

***Primjer* 6.** Pokažite da je krivina krive identicno jednaka nuli ako i samo ako slika krive leži na pravoj. $\diamondsuit$

Dokaz. Pretpostavimo da je krivina dužinom luka parametrizovane krive jednaka nuli. Onda je, po definiciji krivine

$$\kappa(s) = ||T'(s)|| = ||\gamma''(s)|| = 0,$$

odnosno izvod vektor tangente je uvijek jednak nuli, tojest drugi izvod krive je jednak nuli. To znači

$$x'(s) = \alpha_1, y'(s) = \alpha_2, z'(s) = \alpha_3,$$

za $\alpha_i \in \mathbb{R}$, odnosno

$$x(s) = \alpha_1 s + \beta_1, y(s) = \alpha_2 s + \beta_2, z(s) = \alpha_3 s + \beta_3,$$

za $\beta_i \in \mathbb{R}$ i kriva je u stvari prava $\alpha s + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$.

S druge strane ako pretpostavimo da je kriva prava, ona se uvijek stoga može predstaviti u obliku

$$x = a_1 + tb_1, \ y = a_2 + tb_2, \ z = a_3 + tb_3, \ t \in \mathbb{R},$$

što se uvijek može reparametrizovati dužinom luka kao

$$\tilde{\gamma}(s) = \left(a_1 + \frac{b_1 s}{\sqrt{b1^2 + b2^2 + b3^2}}, a_2 + \frac{b_2 s}{\sqrt{b1^2 + b2^2 + b3^2}}, a_3 + \frac{b_3 s}{\sqrt{b1^2 + b2^2 + b3^2}}\right),$$

a s obzirom da je $\tilde{\gamma}''(s) = 0$, imamo da je krivina

$$\kappa(s) = ||\gamma''(s)|| = 0.$$

$\blacksquare$

***Primjer* 7.** Neka je $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4(x^2 + y^2) = 1 + z^2, z = 2x + 1\}$.

1. Provjerite da C definiše regularnu krivu.
2. Nadite regularnu parametrizaciju za krivu C.

3. Izracunajte krivinu krive C.

$\diamondsuit$

Dokaz. Uzmimo $F_1(x,y,z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 - 1$ i $F_2(x,y,z) := 2x - z + 1$; Onda $\nabla F_1(x,y,z) \times \nabla F_2(x,y,z) = -4(2y, z-2x, 4y) = -4(2y,1,4y) \neq 0$ jer je $z = 2x+1$; stoga su $\nabla F_1(x,y,z)$ i $\nabla F_2(x,y,z)$ linearno nezavisni za sva $(x,y,z) \in C$.

Teorema implicitnog preslikavanja sada osigurava da je C regularna kriva.

Posmatrajmo $0 = F_1(x,y,2x+1) = 4y^2 - 4x - 2$, što daje $x = y^2 - \frac{1}{2}$; stoga $t \mapsto \gamma(t) := (t^2 - \frac{1}{2}, t, 2t^2)$ daje regularnu parametrizaciju jer je $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t) \neq 0, \forall t$.

S obzirom da je sada

$$\gamma'(t) = (2t, 1, 4t),$$

$$\gamma''(t) = (2, 0, 4)$$

to je $\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (4, 0, -2)$. Stoga je krivina

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{(1+20t^4)^3}}$$

■

Primjer 8. Izracunati krivinu krive $t \mapsto \gamma(t)$ date sa $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\right)$. $\diamondsuit$

Dokaz. Krivina je

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}.$$

■

Primjer 9 (Bonus)**.**

- Napraviti funkcije *krivina*[g_, t_] i *torzija*[g_, t_] u Mathematici koje računaju krivinu i torziju date proizvoljno parametrizovane krive g parametra t.

$\diamondsuit$

Rješenje :

```
krivina[g_, t_] :=
 Module[{prvi, drugi, temp1, temp2, krivina},
  prvi = Simplify[D[g, t]];
  drugi = Simplify[D[g, {t, 2}]];
  temp1 = Simplify[Cross[prvi, drugi], Element[t, Reals]];
  krivina =
```

```
   Simplify[Sqrt[temp1.temp1]/Sqrt[prvi.prvi]^3, Element[t, Reals]];
  Return[krivina]
  ]

kruznica[gamma_, t_, t0_] := Module[
  {c, tT, nN, kK, kriv, tmp, tmp2},
  tmp2 := D[gamma, t];
  tT := Simplify[tmp2/Sqrt[tmp2.tmp2], Element[t, Reals]];
  tmp = D[tT, t];
  nN := Simplify[tmp/Sqrt[tmp.tmp], Element[t, Reals]];
  kriv := krivina[gamma, t] /. t -> t0;
  c = (gamma /. t -> t0) + (1/kriv)*(nN /. t -> t0);
  alpha :=
   c + 1/(kriv)*(Sin[kriv*t]*(tT /. t -> t0) -
       Cos[kriv*t]*(nN /. t -> t0));
  Return[Simplify[alpha]]
  ]
```

♡