

Frenet-Serret okvir i torzija

Diferencijalna geometrija – Vježbe 4

Rješenja predati na predavanjima, u petak 16. aprila 2021. god.

Zadatak 1. Po definiciji izračunati torziju krivih $t \mapsto \gamma_i(t)$:

- $\gamma_1 = (e^t \cos t, e^t \sin t, 0)$;
- $\gamma_2 = (t, \cosh t, 1)$;
- $\gamma_3 = (\cos^2 t, \sin^2 t, \sin^2 t + 1)$;
- $\gamma_4 = (\frac{4}{5} \cos t, 1 + \sin t, 2 - \frac{3}{5} \cos t)$;
- $\gamma_5 = \left(\frac{t + \sin t}{2}, \frac{-t + \sin t}{2}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)$

Zadatak 2. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ parametrizovana kriva tako da $T'(t) \neq 0, \forall t$. Pokazati da možemo izabrati $N = \frac{T'}{|T'|}$ i da je, sa ovakvim izborom N ,

$$\tau = \frac{|\gamma', \gamma'', \gamma'''}{|\gamma' \times \gamma''|^2}. \quad (1)$$

Zadatak 3. Izračunati torziju krive $t \mapsto \gamma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$ formulom (1).

Zadatak 4. Neka je $s \mapsto \tau(s)$ proizvoljna funkcija. Naći dužinom luka parametrizovanu krivu $s \mapsto \gamma(s)$ sa krivinom $\kappa \equiv 0$ i torzijom τ .

Zadatak 5. Izračunati Frenet-Serret okvire svih krivih iz zadatka 2, vježbi 2.

Zadatak 6. Dokazati da je torzija krive (sa $T' \neq 0$) identično jednaka nuli ako i samo je kriva u ravni.

Zadatak 7. (a) Neka je $t \mapsto \beta(t) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ regularna kriva. Definišimo

$$t \mapsto \gamma(t) := \int_{t_0}^t \beta(t) \times \beta'(t) dt. \quad (\dagger)$$

Pokazati da γ ima konstantnu torziju.

- (b) Sada pretpostavimo da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ (parametrizovana dužinom luka) ima konstantnu torziju $\tau \equiv 1$. Pokazati da je γ oblika $(\dagger)$ sa odgovarajućom krivom $s \mapsto \beta(s) \in S^2$.

Zadatak 8. Izračunati krivinu i torziju krive $u \mapsto \gamma(u)$ čije su parametarske funkcije date sa

$$\begin{aligned}x(u) &= -\sqrt{2} \sin \frac{3u}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{21} \sin \frac{7u}{2} - \frac{\sqrt{2}}{39} \sin \frac{13u}{2}, \\y(u) &= \frac{102\sqrt{2}}{91} - \sqrt{2} \cos \frac{3u}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{21} \cos \frac{7u}{2} - \frac{\sqrt{2}}{39} \cos \frac{13u}{2}, \\z(u) &= \frac{2}{15} \sin 5u.\end{aligned}$$

Šta je to posebno u ovom primjeru?

Zadatak 9. Izračunati torziju krive $t \mapsto \gamma(t)$ date sa $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\right)$.

Zadatak 10 (Bonus). • Napraviti funkciju `torzija[g_, t_]` u Mathematici koja računa krivinu date proizvoljno parametrizovane krive g parametra t .

- Napravite animaciju trobrida (T, N, B) na proizvoljnoj krivoj. Opcionalno, prikažite i vrijednosti krivine i torzije prilikom animacije.