Heliksi i Frenetove jednačine

Diferencijalna geometrija – Vježbe 5

Rješenja predati na predavanjima i na online platformi, u petak 23. aprila 2021. g.

Zadatak 1. Popunite ‘praznine’ u dokazu Frenetovih jednačina te pokažite da doista jeste

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases} .$$

Zadatak 2. Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ krivina i torzija krive γ. Definišimo “Darboux-ovo vektorsko polje”

$$\delta := N \times N' = \tau(s)\, T + \kappa(s)\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

Zadatak 3. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovana kriva i neka je s_0 fiksirano. Dokazati da je

$$\begin{aligned} \gamma(s) = \gamma(s_0) \quad & + \quad ((s - s_0) - \frac{1}{6}(s - s_0)^3 \kappa^2(s_0))\, T(s_0) \\ & + \quad (\frac{1}{2}(s - s_0)^2 \kappa(s_0) + \frac{1}{6}(s - s_0)^3 \kappa'(s_0))\, N(s_0) \\ & + \quad \frac{1}{6}(s - s_0)^3 \kappa(s_0)\tau(s_0)\, B(s_0) + O(s - s_0)^3. \end{aligned}$$

Zadatak 4. Pokazati da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ uzima vrijednosti na sferi ako i samo ako njene normalne ravni prolaze kroz (fiksnu) tačku $c \in \mathbb{R}^3$ (centar sfere).

Zadatak 5. Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ data realna funkcija. Definišimo funkciju $\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(s) ds$. Provjerite da

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s) ds, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(s) ds, 0 \right)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$.

Zadatak 6. (a) Pokazati da je kriva $t \mapsto \gamma(t)$ data sa $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t \sin t + \cos t - 1, -t \cos t + \sin t, t^2/2 \right)$ opći heliks, $t \in \mathbb{R}, t > 0$.

(b) Dokazati da se iz planarne krive uvijek može konstruisati opći heliks.

(c) Naći opći heliks koji generiše planarna kriva $t \mapsto \gamma(t) = (t \sin t + \cos t - 1, -t \cos t + \sin t, 0)$.

(d) Dokazati teorem : Kriva parametrizovana dužinom luka $s \mapsto \gamma(s)$ je opći heliks ako i samo ako je

$$\gamma''(s) \cdot (\gamma'''(s) \times \gamma^{(4)}(s)) \equiv 0.$$

Pomoć: prvo iskoristite, a onda i dokažite pomoćni rezultat koji kaže da je

$$\gamma''(s) \cdot (\gamma'''(s) \times \gamma^{(4)}(s)) = \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'.$$

Zadatak 7 (Bonus)**.** Koristeći se Mathematica-om, naći i nacrtati planarne krive koje imaju krivinu

$$\kappa_1(s) = 1/2, \quad \kappa_2(s) = 1/10 + s, \quad \kappa_3(s) = \sqrt{s}, \quad \kappa_4(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$$