Heliksi i Frenetove jednačine

Diferencijalna geometrija – Vježbe 5

Rješenja predati na predavanjima, u petak 23. aprila 2021. g.

Vježba 1. Popunite 'praznine' u dokazu Frenetovih jednačina te pokažite da doista jeste

$$F' = F \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} T' = & & \kappa N & \\ N' = & -\kappa T & & +\tau B \\ B' = & & -\tau N & \end{cases}.$$

Rješenje : Standardno: Neka je $F = (T, N, B)$ principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$. Krivina i torzija su date sa

$$\kappa(s) = T'(s) \cdot N(s) \quad \text{i} \quad \tau(s) = N'(s) \cdot B(s)$$

i znamo da je $t \mapsto F(t) \in O(3)$, to jest, $F^T F \equiv I$. Diferencirajući dobivamo

$$0 = (F^T F)' = (F^T)'F + F^T F' = (F^{-1}F')^T + (F^{-1}F')$$

tako da je $s \mapsto \Phi(s) := F^{-1}F'(s) \in \mathfrak{o}(3)$ antisimetrično. Eksplicitnije,

$$\begin{aligned} \Phi = F^T F' = \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} (T' \ N' \ B') \quad &= \quad \begin{pmatrix} 0 & T \cdot N' & T \cdot B' \\ N \cdot T' & 0 & N \cdot B' \\ B \cdot T' & B \cdot N' & 0 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Drugi način: Neka je $\gamma(s)$ parametrizovana dužinom luka krive. Tada je $\kappa(s) = |T^{'}|$. S druge strane, principalna normala je data sa $N = \dfrac{T^{'}}{|T^{'}|} = \dfrac{T^{'}}{\kappa}$ odakle slijedi da je $T^{'} = \kappa N$, što je prva jednačina.

Budući da je vektor N' okomit na N, tj. $N' \cdot N = 0$, to znači da se nalazi u ravni određenoj sa vektorima T i B, tj. $N' = \alpha_1 T + \alpha_2 B$. Ali onda, budući da su T i B vektori baze ravni u kojoj se nalazi N', imamo da je

$$N' = (N' \cdot T)T + (N' \cdot B)B = (-T' \cdot N)T + (N' \cdot B)B = -\kappa T + \tau B,$$

što je druga jednačina.

Vektor $B^{'}$ leži u pravcu principalne normale N, jer iz jednačine $B \cdot T = 0$ imamo

$$B' \cdot T + B \cdot T = 0 \ \Rightarrow \ B' \cdot T = -B \cdot \kappa N = 0,$$

a pošto je $B \cdot B = 1$, imamo da je $B' \cdot B = 0$. Zato je

$$B' = (B' \cdot N)N = (-B \cdot N')N = -\tau N,$$

što je treća jednačina. ♡

Vježba 2. Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ krivina i torzija krive γ. Definišimo "Darboux-ovo vektorsko polje"

$$\delta := N \times N' = \tau(s)\, T + \kappa(s)\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

Rješenje : Pretpostavimo da naš okvir $F = (T, N, B)$ zadovoljava Frenetove jednačine i neka je $\delta := N \times N'$; onda, prvo,

$$\delta = N \times (-\kappa T + \tau B) = \kappa B + \tau T$$

kako smo tvrdili jer F uzima vrijednosti u $SO(3)$; drugo,

$$\begin{aligned} T' - \delta \times T &= \kappa N - (\tau T + \kappa B) \times T = 0, \\ N' - \delta \times N &= -\kappa T + \tau B - (\tau T + \kappa B) \times N = 0, \\ B' - \delta \times B &= -\tau N - (\tau T + \kappa B) \times B = 0. \end{aligned}$$

Stoga, Frenetove jednačine impliciraju jednačine $X' = \delta \times X$, gdje je $X = T, N, B$.

S druge strane, pretpostavimo da je $s \mapsto F(s) = (T(s), N(s), B(s)) \in SO(3)$ okvir koji zadovoljava $X' = \delta \times X$ za $X = T, N, B$ sa $\delta := \tau T + \kappa B$. Onda, obrčući gornju pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &= T' - \delta \times T = T' - \kappa N, \\ 0 &= N' - \delta \times N = N' + \kappa T - \tau B, \\ 0 &= B' - \delta \times B = B' + \tau N. \end{aligned}$$

Stoga, dobijamo Frenetove jednačine. ♡

***Primjer* 1.** Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovana kriva i neka je s_0 fiksirano. Dokazati da je

$$\begin{aligned} \gamma(s) = \gamma(s_0) &+ ((s - s_0) - \frac{1}{6}(s - s_0)^3 \kappa^2(s_0))\, T(s_0) \\ &+ (\frac{1}{2}(s - s_0)^2 \kappa(s_0) + \frac{1}{6}(s - s_0)^3 \kappa'(s_0))\, N(s_0) \\ &+ \frac{1}{6}(s - s_0)^3 \kappa(s_0)\tau(s_0)\, B(s_0) + O(s - s_0)^3. \end{aligned}$$

♢

Rješenje : Rezultat slijedi iz Taylorovog razvoja

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}\gamma''(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(s_0)(s - s_0)^3 + O(s - s_0)^3,$$

te Frenet-Serretovih jednačina. ♡

Vježba 3. Pokazati da kriva $s \mapsto \gamma(s)$ uzima vrijednosti na sferi ako i samo ako njene normalne ravni prolaze kroz (fiksnu) tačku $c \in \mathbb{R}^3$ (centar sfere).

Rješenje : Pretpostavljamo da je kriva regularna. Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je parametrizovana dužinom luka.

Ako je $|\gamma - c|^2 \equiv r^2$ za neko $c \in \mathbb{R}^3$ i $r \in (0, \infty)$ onda je, uzimajući izvod, $0 \equiv (\gamma - c) \cdot T$, tojest, c leži na svakoj normalnoj ravni krive γ.

S druge strane, pretpostavimo da sve normalne ravni prolaze kroz fiksnu tačku $c \equiv \gamma + \alpha N + \beta B$. Frenetove jednačine daju

$$0 = (1 - \alpha\kappa)\, T + (\alpha' - \beta\tau)\, N + (\beta' + \alpha\tau)\, B$$

tako da, posebice, $\alpha' = \beta\tau$ i $\beta' = -\alpha\tau$. Onda,

$$(|\gamma - c|^2)' = 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' = 2\alpha\beta\tau - 2\beta\alpha\tau = 0,$$

to jest, $|\gamma - c| \equiv const$ tako da γ leži u sferi centriranoj u c.

Drugi dio se može dokazati i mnogo brže drugim argumentom (medjutim, gornji argument fino demonstrira šire aplikativnu metodu): da sve normalne ravni prolaze prolaze kror fiksnu ta@ cku $c \in \mathbb{R}^3$ znači da

$$0 \equiv (c - \gamma) \cdot T = -\frac{1}{2}(|\gamma - c|^2)';$$

stoga $|\gamma - c|^2 \equiv const$ i kriva uzima vrijednosti u sferi centriranoj u c. ♡

Vježba 4. Neka je $s \mapsto \kappa(s)$ data realna funkcija. Definišimo funkciju $\varphi(s) := \int_{s_0}^{s} \kappa(s)ds$. Provjerite da

$$\gamma(s) := \left(\int_{s_0}^{s} \cos\varphi(s)ds, \int_{s_0}^{s} \sin\varphi(s)ds, 0\right)$$

definiše dužinom luka parametrizovanu planarnu krivu sa krivinom $\kappa(s)$.

Rješenje : Imamo da je

$$\gamma' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

po FTPK, tako da je $|\gamma'| \equiv 1$ i γ je parametrizovana dužinom luka. Kako je (x, y)-ravan fiksna oskulatorna ravan za cijelu krivu možemo izabrati kao principalnu normalu,

$$N := (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

(ovo dobijemo 90° rotacijom iz $T = \gamma'$ u (x, y)-ravni u pozitivnom smislu); sa ovim izborom principalne normale

$$T' \cdot N = (-\varphi' \sin\varphi, \varphi' \cos\varphi, 0) \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \varphi' = \kappa$$

i kriva ima krivinu κ (obrtanje principalne normale bi rezultiralo u krivini $-\kappa$). ♡

Vježba 5. (a) Pokazati da je kriva $t \mapsto \gamma(t)$ data sa

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t\sin t + \cos t - 1, -t\cos t + \sin t, t^2/2\right)$$

opći heliks, $t \in \mathbb{R}, t > 0$.

(b) Dokazati da se iz planarne krive uvijek može konstruisati opći heliks.

(c) Naći opći heliks koji generiše planarna kriva $t \mapsto \gamma(t) = (t\sin t + \cos t - 1, -t\cos t + \sin t, 0)$.

(d) Dokazati teorem : Kriva parametrizovana dužinom luka $s \mapsto \gamma(s)$, koja je u C^4 i koja nije planarna, opći je heliks ako i samo ako je

$$\gamma''(s) \cdot (\gamma'''(s) \times \gamma^{(4)}(s)) \equiv 0.$$

Pomoć: prvo iskoristite, a onda i dokažite pomoćni rezultat koji kaže da je

$$\gamma''(s) \cdot (\gamma'''(s) \times \gamma^{iv}(s)) = \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'.$$

za krivu koja je u C^4 i koja nije planarna.

Rješenje :

(a) Imamo da je $|\gamma'| = |t|$, $|\gamma' \times \gamma''| = \frac{t^2}{\sqrt{2}}$ i $\gamma' \cdot (\gamma'' \times \gamma''') = \frac{t^3}{2\sqrt{2}}$, krivina i torzija su

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}t}, \quad \tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2}t}$$

tako da je odnos krivine i torzije konstantan, pa je kriva prema teoremu sa predavanja opći heliks.

(b) Uvijek možemo generisati opći heliks koristeći se planarnom krivom. Neka je stoga data planarna kriva $t \mapsto \alpha(s)$ parametrizovana dužinom luka i različita od prave. Neka takođe postoji s_0 tako da $\alpha(s_0) = 0$.

Budući da je $\alpha(s)$ planarna kriva, njena oskulatorna ravan je fiksna i binormalni vektor je stoga konstantan i okomit na nju.

Neka je $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Definišimo $s \mapsto \gamma(s)$ sa

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \sin\varphi\ \alpha(t) + (s - s_0)\cos\varphi\ B, \tag{2}$$

gdje je s dužina luka, a $\gamma(s_0)$ proizvoljan konstantni vektor. Tada je $\gamma(t)$ opći heliks.

Elementarno se pokaže da je kriva γ parametrizovana dužinom luka, jer je

$$|\gamma'(s)|^2 = \gamma'(s) \cdot \gamma'(s) = \sin^2\varphi|\alpha'(s)|^2 + \cos^2\varphi|B|^2 = 1,$$

jer je $|\alpha'(s)| = 1$, B konstantan jedinični vektor, a tangentni vektor krive α, tojest $\alpha'(s) = T_\alpha$ je okomit na binormalni vektor B.

Diferencirajući jednakost (2), imamo

$$T = \gamma'(s) = \sin\varphi T_\alpha + \cos\varphi B_\alpha$$

Ponovo diferencirajući,

$$\kappa N = T' = \sin\varphi T_\alpha' = \sin\varphi \kappa_\alpha N_\alpha.$$

Odatle je $N = N_\alpha$ i $\kappa = \sin\alpha\kappa_\alpha$, jer su N i N_α jedinični normalni vektori. Kratak račun nam daje

$$B = T \times N = -\cos\varphi T_\alpha + \sin\varphi B_\alpha.$$

Diferencirajući i koristeći da je B_α konstantan, imamo da je $B' = -\cos\varphi T_\alpha'$, odnosno po Frenetu

$$\tau N = \kappa_\alpha \cos\varphi N,$$

odakle je

$$\tau = \kappa_\alpha \cos\varphi = \frac{\kappa}{\sin\varphi}\cos\varphi \;\Rightarrow\; \frac{\tau}{\kappa} = \operatorname{ctg}\,\varphi,$$

što je konstanta i različito od nule, po uslovu koji φ mora zadovoljavati. Stoga je kriva opći heliks.

(c) To je poopćena kriva iz dijela (a), tj.

$$\gamma(t) = C + \left((t\sin t + \cos t - 1)\sin\alpha, (-t\cos t + \sin t)\sin\alpha, t^2/2\cos\alpha\right),$$

gdje je $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, a C neki konstantni vektor.

(d) Pokažimo prvo pomoćni rezultat. Budući da je γ parametrizovana duǐnom luka,

$$\gamma' = T, \quad \gamma'' = T' = \kappa N.$$

Diferencirajući i primjenjujući Frenetove jednačine, dobijamo

$$\gamma''' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B.$$

Ponovo diferencirajući i primjenjujući Frenetove jednačine, dobijamo

$$\gamma^{(4)} = -3\kappa\ \kappa'\ T + \left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\ \tau^2\right) N + (2\tau\ \kappa' + \kappa\ \tau')B.$$

Iz gornjih jednačina za drugi i treći izvod dobijamo

$$\gamma'' \times \gamma''' = \kappa^2\ \tau\ T + \kappa^3\ B.$$

Stoga je

$$(\gamma'' \times \gamma''') \cdot \gamma^{(4)} = \kappa^4\ \tau' - \kappa^3\ \tau\ \kappa' = \kappa^5 \left(\frac{\kappa\tau' - \tau\kappa'}{\kappa^2}\right) = \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

Pokažimo sada glavni rezultat. Očito je da, koristeći pomoćni rezultat, ako je kriva heliks, mješoviti proizvod $(\gamma'' \times \gamma''') \cdot \gamma^{(4)} \equiv 0$, jer je odnos krivine i torzije konstantan. Obratno, neka je $(\gamma'' \times \gamma''') \cdot \gamma^{(4)} \equiv 0$, odnosno prema pomoćnom rezultatu

$$\kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0.$$

Budući da kriva nije planarna, $\kappa \neq 0$, pa je $\frac{\tau}{\kappa}$, tj. kriva je opći heliks.

♡

***Primjer* 2** (Bonus)**.** Koristeći se Mathematica-om, naći i nacrtati planarne krive koje imaju krivinu

$$\kappa_1(s) = 1/2, \quad \kappa_2(s) = 1/10 + s, \quad \kappa_3(s) = \sqrt{s}, \quad \kappa_4(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

♢

Rješenje : Elementarno, koristeći se gornjim zadatkom. ♡