Adaptirani okviri

Diferencijalna geometrija – Vježbe 6

Rješenja predati elektronskim putem do petka, 7. maja 2021.

Vježba 1. Neka γ parametrizira pravu, tj. neka je $\gamma' \times \gamma'' \equiv 0$. Neka je F bilo koji adaptirani okvir krive γ. Pokažite da su $\kappa_n = \kappa_g = 0$. Nađite strip (γ, N) takav da je $\kappa_n = \kappa_g = 0$ i $\tau \equiv 1$.

Rješenje : Pretpostavit ćemo da je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizacija tako da je

$$Fe_1 = T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$$

jedinično tangentno vektorsko polje duž krive γ. Izvodeći dobijamo

$$|\gamma'|(\kappa_n N - \kappa_g B) = T' = \frac{1}{|\gamma'|}\left(\gamma'' - \frac{\gamma'' \cdot \gamma'}{|\gamma'|^2}\gamma'\right) = 0,$$

tako da zbog linearne nezavisnosti vektora $N = Fe_2$ i $B = Fe_3$, mora biti $\kappa_n = \kappa_g \equiv 0$.

Neka je $s \mapsto \gamma(s) := se_1$ i napravimo postavku

$$N = \cos\varphi e_2 + \sin\varphi e_3$$

sa odgovarajućom funkcijom $\varphi = \varphi(s)$. Dobijamo torziju pomoću:

$$\tau(s) = (N' \cdot B)(s) = \varphi'(s)(-\sin\varphi e_2 + \cos\varphi e_3) \cdot (e_1 \times (\cos\varphi e_2 + \sin\varphi e_3)) = \varphi'(s).$$

Stoga strip (γ, N) sa nestajućim krivinama i konstantnom torzijom $\tau \equiv 1$ ako postavimo da je $\varphi(s) := s$. ♡

Vježba 2. Neka su $s \mapsto \kappa(s), \kappa_g(s), \tau(s)$ tri neprekidne funkcije.

Onda postoji kriva parametrizovana dužinom luka $s \mapsto \gamma(s)$ i adaptirani okvir F za krivu γ tako da su zadovoljene strukturne jednačine

$$F'(s) = F(s)\,\Phi, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Štaviše, ova kriva i okvir su jedinstveni do izbora rigidnog kretanja. Dokazati.

Rješenje : Potpuno analogno dokazu FTPK. ♡

Vježba 3. Neka je $F = (T, N, B)$ adaptirani okvir i neka je $\tilde{F} = FA$, gdje je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sa nekom funkcijom $t \mapsto \varphi(t)$.

- Uvjerite se da je $\tilde{F}$ još jedan adaptirani okvir.
- Izračunajte kako se strukturne jednačine (tj., κ_n, κ_g i τ) mijenjaju.

Rješenje :

(a) Očito, $\tilde{F} = FA$ će biti još jedan adaptirani okvir, jer sa gornjim oblikom A, $\tilde{F}e_1 = Fe_1 = T$ i A ima vrijednosti u $SO(3)$ tako da je $\tilde{F}$, sa F, s vrijednostima u $SO(3)$.

(b) Zbog jednostavnosti, pretpostavićemo da je kriva paramtetrizovana dužinom luka, tj. $|\gamma'| \equiv 1$.
Izračunajmo $\tilde{\Phi} = \tilde{F}^T \tilde{F}' = A^T F^T (F'A + FA') = A^T \Phi A + A^T A'$ tako da je

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_n \cos\varphi + \kappa_g \sin\varphi & \kappa_n \sin\varphi + \kappa_g \cos\varphi \\ \kappa_n \cos\varphi - \kappa_g \sin\varphi & 0 & -(\tau + \varphi') \\ -\kappa_n \sin\varphi - \kappa_g \cos\varphi & \tau + \varphi' & 0 \end{pmatrix},$$

gdje su κ_n, κ_g i τ su krivine i torzija koje dolaze iz Φ. Stoga:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_n &= \kappa_n \cos\varphi - \kappa_g \sin\varphi, \\ \tilde{\kappa}_g &= \kappa_n \sin\varphi + \kappa_g \cos\varphi, \\ \tilde{\tau} &= \tau + \varphi'. \end{aligned}$$

Konačno razmotrimo šta se događa kada kriva nije parametrizovana dužinom luka : sve krivine i torzija dobivaju faktor $|\gamma'|$ u jednačinama. Stoga se prve dvije jednačine ne mijenjaju, ali u trećoj jednačini koja je veza torzija dva okvira dobijamo faktor $\frac{1}{||\gamma'||}$, tj

$$\tilde{\tau} = \tau + \frac{\varphi'}{||\gamma'||}$$

♡

Vježba 4. Dokažite slijedeće iskaze koji uvezuju prethodno izrečeno sa adaptiranim okvirima:

(a) Pokažite da je N principalno normalno vektorsko polje krive γ ako i samo ako je $\kappa_g \equiv 0$, tj. ako je (γ, N) geodezijski strip.

(b) Pokažite da je dužinom luka parametrizovana kriva $s \mapsto \gamma(s)$ planarna ako i samo ako ima adaptirani okvir za koji je $\tau = \kappa_g = 0$.

(c) Pokažite da je dužinom luka parametrizovana kriva $s \mapsto \gamma(s)$ planarna ako i samo ako ima adaptirani okvir za koji je $\tau = \kappa_n = 0$.

Rješenje :

(a) Neka je $T := \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ jednično tangentno vektorsko polje duž γ. Prvo pretpostavimo da je N principalno normalno vektorsko polje, tj. $\gamma'' \in \mathrm{span}\{T, N\}$; onda je

$$\kappa_g = -\frac{1}{|\gamma'|}(T' \cdot B) = -\frac{1}{|\gamma'|}\left(\left(\frac{\gamma''}{|\gamma'|} + ? \cdot \gamma'\right) \cdot B\right) = 0$$

jer je $\gamma'' \in \mathrm{span}\{T, N\}$ i $T, N \perp B$.
Obratno, pretpostavimo da je $\kappa_g \equiv 0$. Onda nam strukturne jednačine daju

$$\gamma'' = |\gamma'|T' + (|\gamma'|)'T = |\gamma'|^2 \kappa_n N + (|\gamma'|)'T \in \mathrm{span}\{T, N\}$$

pa je N principalno normalno polje.

(b) Prvo pretpostavimo da su $\kappa_g = \tau \equiv 0$. Međutim, po prethodnom dijelu, pošto je $\kappa_g \equiv 0$, onda je N principalna normala $\frac{T(s)}{|T(s)|}$ i adaptirani okvir je u stvari Frenetov okvir! Prema već dokazanom na predavanjima, pošto je $\tau = 0$, kriva je ravninska. To takođe možemo vidjeti iz strukturnih jednčina, koje impliciraju

$$T' = \kappa_n N, \quad N' = -\kappa_n T, \quad B' = 0,$$

tj. binormala je konstantna, pa je oskulatorna ravan $\lambda N + \mu T$ fiksna, tj. sadrži krivu γ.
Obratno, neka je kriva ravninska i neka je $|\gamma''(s)| \neq 0$. Tada postoji okvir (T, N, B) takav da je $\kappa_g = 0$, naime to je Frenetov principalni okvir $\left(\gamma'(s), \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \gamma'(s) \times \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}\right)$. U tom slučaju torzija je ekvivalentna nuli, kao što smo već pokazali, jer je vektor binormale konstantan.

(c) Pretpostavimo da kriva nije prava. Primjetite da je prema prethodnom, traženi iskaz ekvivalentan iskazu : kriva ima adaptirani okvir za koji je $\tau = \kappa_g = 0$ ako i samo ako ima adaptirani okvir za koji je $\tau = \kappa_n = 0$. Takav okvir se dobije iz originalnog obrtanjem uloga vektora N i B, tj. ako je okvir bio (T, N, B), novi okvir je $(T, B, N) = \left(\gamma'(s), \gamma'(s) \times \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}\right)$!

Drugi način: Prvo pretpostavimo da su $\kappa_n = \tau \equiv 0$ za neki adaptirani okvir (T, N, B) dužinom luka paramterizovane krive γ. Onda je

$$N' = -\kappa_n T + \tau B \equiv 0,$$

odnosno $N \equiv const$. Odatle je

$$(\gamma \cdot N)' = T \cdot N \equiv 0,$$

pa γ zadovoljava jednačinu ravni $\gamma \cdot N \equiv d$, tj. γ je planarna.

Obratno, pretpostavimo da je γ planarna kriva, tj. zadovoljava jednačinu ravni u općem vektorskom obliku iz analitičke geometrije:

$$\gamma \cdot N \equiv d,$$

sa nekim konstantnim (jedniničnim) vektorom $N \in \mathbb{R}^3$ i za neko $d \in \mathbb{R}$. Onda je

$$\gamma' \cdot N = (\gamma \cdot N)' \equiv 0$$

i N definiše konstantno jedinično normalno polje duž γ. Pošto je N konstantno,

$$0 = N' = -\kappa_n T + \tau B$$

tako da je $\kappa_n = \tau \equiv 0$, jer su vektori T i B linerano nezavisni.

♡

Vježba 5. Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna kriva takva da je

$$\gamma' \times \gamma''(t) \neq 0, \ \forall t.$$

Dokazati da onda γ ima jedinstven principalni, Frenetov okvir sa $\kappa_n > 0$.

Rješenje : Neka su

$$T := \frac{\gamma'}{|\gamma'|}, \qquad N := \frac{T'}{|T'|}.$$

Primjetite da je

$$T' = \frac{\gamma''}{|\gamma'|} + ? \cdot \gamma' \neq 0$$

jer je po pretpostavci kriva regularna i γ' i γ'' su linearno nezavisni za sva t, tako da je definicija vektora N korektna i smislena. Dalje,

$$N \cdot T = \frac{1}{2|T'|}(|T|^2)' = 0,$$

tako da je N jedinično normalno polje i

$$\gamma''(t) = (|\gamma'|T' - ? \cdot \gamma')(t) \in \mathrm{span}\{T, N\},$$

tako da je N principalna normala. Na kraju

$$\kappa_n = \frac{1}{|\gamma'|} T' \cdot N = \frac{|T'|^2}{|\gamma'||T'|} > 0.$$

S obzirom da u tačkama $\gamma(t)$ gdje je $\gamma' \times \gamma'' \neq 0$ kriva ima jedinstvenu oskulatornu ravan, principalna normala je jedinstvena do znaka. Stoga uslov $\kappa_n > 0$ uslovljava znak principale. ♡