

Reprezentacija i regularnost površi

Diferencijalna geometrija – Vježbe 7

Rješenja predati na predavanjima, u petak 21. maja 2021. god.

Vježba 1. Pokažite da $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (u, v, g(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, nije *površ*, iako je

$$g(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{ako je } u = v = 0 \\ \frac{uv^2}{u^2+v^2} & \text{ako je } (u, v) \neq (0, 0), \end{cases}$$

neprekidna i svi su joj parcijalni izvodi definisani.

Vježba 2. Pokažite da $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (u, v, g(u, v)) \in \mathbb{R}^3$, nije *površ*, iako je

$$g(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{ako je } u = v = 0 \\ \frac{uv^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^4} & \text{ako je } (u, v) \neq (0, 0), \end{cases}$$

neprekidna i svi su joj izvodi u pravcu definisani.

Vježba 3. Pokažite da je cilindrična površ, koja je definisana kao trag prave linije paralelene sa z -osom koja je se kreće po zatvorenoj regularnoj krivoj $(x(t), y(t), 0)$, regularna površ i nađite njezinu regularnu parametrizaciju. (Pomoć: prvo to uradite za standardni, kružni cilindar $x^2 + y^2 = 1$).

Vježba 4. (a) Pokažite da je hiperbolični paraboloid

$$\Sigma_1 := \left\{ (x, y, z) \mid \frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

regularna površ i nađite jednu njegovu regularnu parametrizaciju.

(b) Pokažite da je eliptični paraboloid

$$\Sigma_2 := \left\{ (x, y, z) \mid \frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

regularna površ i nađite njegovu jednu regularnu parametrizaciju. Zatim ga također parametrizirajte kao površ revolucije u slučaju da je $a = b = c = 1$. Zatim tu parametrizaciju iskoristite za nalaženje opće parametrizacije.

Vježba 5. Pokažite da je elipsoid regularna površ i nađite regularne parametrizacije koje ga pokrivaju:

(a) Koristeći se implicitnim oblikom površi.

(b) Podešavanjem sfernih koordinata na "elipsoidne".

Vježba 6. Posmatrajmo $\Sigma := \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, gdje je $0 < r < R$. Pokažite da je Σ regularna površ i nađite njenu regularnu parametrizaciju. Kako se zove ova površ?

Vježba 7. (a) Napravite funkciju `regularna[x_, u_, v_]` koja ispituje regularnost parametrizovane površi $\mathbf{x}(u, v)$.

(b) Napravite funkciju `regularnaImp[F_, x_, y_, z_]` koja ispituje regularnost implicitno zadate krive $F(x, y, z) = 0$.

(c) Napravite funkciju `povrsRevolucije[alpha_, u_, v_]` koja vraća parametrizovanu površ revolucije kreiranu revolucijom krive $\alpha(t)$ oko z ose.