

Prva fundamentalna forma

Diferencijalna geometrija – Vježbe 8

Rješenja predati na predavanjima, u utorak 28. maja 2021. god.

Vježba 1. Ispitajte šta su to parametarske krive $u = \text{const}, v = \text{const}$ za površi:

- (a) Elipsoid parametrizovan kao na prethodnim vježbama.
- (b) Dvokrilni hiperboloid $(u, v) \mapsto (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, \pm c \cosh u)$.
- (c) Eliptična kupa $(u, v) \mapsto (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \sinh u)$
- (d) Eliptični paraboloid parametriziran kao površ revolucije.
- (e) Hiperbolični paraboloid.

Vježba 2. Pokažite da se jednokrili hiperboloid može parametrizirati kao

$$(u, v) \mapsto \left(a \frac{u-v}{u+v}, b \frac{1+uv}{u+v}, c \frac{uv-1}{u+v} \right)$$

Šta su parametarske krive u ovom slučaju?

Vježba 3. Dokazite da je ugao presjeka parametarskih linija na proizvoljnoj površi

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Vježba 4. Izračunate prvu fundamentalnu formu za površ $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ datu sa

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u \right).$$

Kakva je ovo parametrizacija? Koja je ovo površ?

Vježba 5. Uvjerite se da je površ parametrizovana konformalno ako i samo ako parametrizacija prezervira uglove.

Vježba 6. Pokažite da je kupa $(r, \theta) \mapsto r \gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni.

Pokažite da je $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$ izometrična ravni.

Vježba 7. Pokazati da je inverzna stereografska projekcija sfere (bez sjevernog i južnog pola)

$$\mathbf{x}(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1} (2u, 2v, \pm(u^2 + v^2 - 1))$$

konformalna parametrizacija iste.

Vježba 8. Nadjite konformalnu parametrizaciju za površ

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z^2 < 1\}.$$

Provjerite rezultat!

Vježba 9. (a) Napravite u Wolfram Mathematica animaciju koja pokazuje da Gaussovo preslikavanje mijenja smjer kada jednom obiđemo Möbiusovu traku.

(b) Napravite funkciju `tangentnaRavan[x_, u_, v_, u0_, v0_]` koja računa tangentnu ravan površi $\mathbf{x}(u, v)$ u tački $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.

(c) Napravite funkciju `gaussovo[x_, u_, v_]` koja računa Gaussovo preslikavanje date površi.

(d) Napravite funkciju `pff[x_, u_, v_]` koja računa prvu fundamentalnu formu date površi i vraća je kao listu $\{E, F, G\}$.