Prva fundamentalna forma, Gaussovo preslikavanje i tangentna površ

Diferencijalna geometrija – Vjeđbe 8

RjeŽenja predati na predavanjima, u utorak 28. maja 2021. god.

Vježba 1. Ispitajte Žta su to parametarske krive $u = const, v = const$ za povrŽi:

(a) Elipsoid parametrizovan kao na prethodnim vjeđbama.

(b) Dvokrilni hiperboloid $(u, v) \mapsto (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, \pm c \cosh u)$.

(c) Eliptična kupa $(u, v) \mapsto (a\ \sinh u \cos v, b\ \sinh u \sin v, c\ \sinh u)$

(d) Eliptični paraboloid parametriziran kao površ revolucije.

(e) Hiperbolični paraboloid parametriziran kao površ revolucije.

Rješenje : Ispitajte Žta su to parametarske krive $u = const, v = const$ za povrŽi:

(a) Elipse.

(b) Elipse i hiperbole.

(c) Elipse i prave.

(d) Elipse i parabole.

(e) Ne mođe kao površ revolucije, jer to nije. Standardna parametrizacija daje parabole.

♡

Vježba 2. Pokađite da se jednokrilni hiperboloid mođe parametrizirati kao

$$(u, v) \mapsto \left(a\frac{u - v}{u + v}, b\frac{1 + uv}{u + v}, c\frac{uv - 1}{u + v} \right)$$

Łta su parametarske krive u ovom slučaju?

Rješenje : Jednokrilni hiperboloid mođe parametrizirati kao

$$(u, v) \mapsto \left(a\frac{u - v}{u + v}, b\frac{1 + uv}{u + v}, c\frac{uv - 1}{u + v} \right)$$

zato Žto gornji parametri elementarno zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Parametarske krive su prave, Žto nam joŽ jednom potvruje da je jednokrilni hiperboloid dvostruko linijska povrŽ. ♡

Vježba 3. Dokažite da je ugao presjeka parametarskih linija na proizvoljnoj površi

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Rješenje : Ugao presjeka parametarskih linija $u_1 = c_1$, $v_2 = c_2$ je

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{(d\mathbf{x})_1}{||(d\mathbf{x})_1||}\frac{(d\mathbf{x})_2}{||(d\mathbf{x})_2||}\\ &= \frac{E\ du_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + G\ u_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2 + 2Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2}}\\ &= \frac{Fdu_2dv_1}{\sqrt{Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.\end{aligned}$$

S druge strane, znamo da je $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\alpha}$, pa rezultat slijedi. ♡

Vježba 4. Izračunate prvu fundamentalnu formu, Gaussovo preslikavanje i tangentnu ravan za površ $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ datu sa

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, \tanh v\right).$$

Kakva je ovo parametrizacija? Koja je ovo površ?

Rješenje : Prva fundamentalna forma je data sa

$$E = \frac{1}{\cosh v^2},\ F = 0,\ G = \frac{1}{\cosh v^2}.$$

Stoga je gaussovo preslikavanje dato sa

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh v\right).$$

Tangentna ravan je

$$\cos uX + \sin uY + \sinh vZ = \cosh v.$$

S obzirom da je

$$x(u,v)^2 + y(u,v)^2 + z(u,v)^2 = 1,$$

ovo je jednična sfera, s tim da primjetite $z(u,v) = \tanh u \neq \pm 1$, jer je kodomen hiperbolnog tangensa $(-1,1)$, tako da nemamo dvije tačke na sferi, naime južni i sjeverni pol! ♡

Vježba 5. Uvjerite se da je površ parametrizovana konformalno ako i samo ako parametrizacija prezervira uglove.

Rješenje : Prvo pretpostavimo da je $(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v)$ konformalna parametrizacija površi, $E = G$ i $F \equiv 0$.

Uzmimo dvije krive $t \mapsto \gamma_i(t) = \mathbf{x}(u_i(t), v_i(t))$ $(i = 1,2)$ na površi koje se sijeku u $t = 0$; onda je njihov ugao presjeka α

$$\cos\alpha = \frac{\gamma_1'\cdot\gamma_2'}{|\gamma_1'|\,|\gamma_2'|} = \frac{E\,u_1'u_2' + F\,(u_1'v_2' + v_1'u_2') + G\,v_1'v_2'}{\sqrt{E\,u_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + G\,v_1'^2}\sqrt{E\,u_2'^2 + 2Fu_2'v_2' + G\,v_2'^2}} = \frac{u_1'u_2' + v_1'v_2'}{\sqrt{u_1'^2 + v_1'^2}\sqrt{u_2'^2 + v_2'^2}}$$

dat pomoću ugla presjeka krivih u parametarskoj ravni. To jest, parametrizacija prezervira uglove.

Obratno, pretpostavimo da parametrizacija prezervira uglove. Fiksirajmo (u,v) i posmatrajmo

- (i) $\gamma_1(t) := \mathbf{x}(u+t,v)$ i $\gamma_2(t) := \mathbf{x}(u,v+t)$; onda

$$\frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}(u,v) = \frac{\gamma_1'\cdot\gamma_2'}{|\gamma_1'|\,|\gamma_2'|}(0) \overset{!}{=} \frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 0 \quad\Rightarrow\quad F(u,v) = 0;$$

- (ii) $\gamma_1(t) := \mathbf{x}(u+t,v+t)$ i $\gamma_2(t) := \mathbf{x}(u+t,v-t)$; onda

$$\frac{E-G}{\sqrt{E+G}\sqrt{E+G}}(u,v) = \frac{\gamma_1'\cdot\gamma_2'}{|\gamma_1'|\,|\gamma_2'|}(0) \overset{!}{=} \frac{0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad E(u,v) = G(u,v).$$

Stoga je $E(u,v) = G(u,v)$ i $F(u,v) = 0$ za proizvoljno (u,v); stoga $E = G$ i $F \equiv 0$ i $\mathbf{x}$ je konformalna. ♡

Vježba 6. Pokažite da je kupa $(r,\theta) \mapsto r\,\gamma(\theta)$, gdje je $\theta \mapsto \gamma(\theta) \in S^2$ dužinom luka parametrizovana sferična kriva, izometrična ravni.

Pokažite da je $\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=z^2, z>0\}$ izometrična ravni.

Rješenje : Izračunaćemo prvu fundamentalnu formu:

$$E(r,\theta) = |\gamma(\theta)|^2 = 1, \quad F(r,\theta) = r\gamma(\theta)\cdot\gamma'(\theta) = 0, \quad G(r,\theta) = |r\gamma'(\theta)|^2 = r^2.$$

S druge strane, posmatrajmo polarne koordinate ravni, tojest $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, kao parametrizaciju ravni kako bismo našli *njenu* prvu fundamentalnu formu:

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2.$$

Stoga, prva fundamentalna forma kupe se podudara sa prvom fundamentalnom formom ravni parametrizovane polarnim koordinatamate su stoga one izometrične površi!

Za drugi dio moramo odrediti γ kao parametrizaciju dužinom luka presjeka kupe sa jediničnom sferom: njene jednačine su

$$2z^2 = 1 \quad \text{i} \quad 2(x^2+y^2) = 1.$$

Stoga će

$$\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}\theta, \sin\sqrt{2}\theta, 1)$$

biti dovoljno.

$$(r,\theta) \mapsto \frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}\theta, \sin\sqrt{2}\theta, 1)$$

onda daje parametrizaciju izometričnu ravni u polarnim koordinatama po prvom dijelu ovoga problema. ♡

Vježba 7. Pokazati da je inverzna stereografska projekcija sfere konformalna parametrizacja iste.

Rješenje : Parametrizacija je data sa

$$\frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1),$$

a elementi prve fundamentalne forme su

$$E = \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2} = G, F = 0,$$

pa je površ parametrizovana konformalno. ♡

Vježba 8. Izračunajte Gaussovo preslikavanje i tangentnu ravan u proizvoljnoj tački svih do sada na predavanjima i vježbama parametrizovanih površi.

Rješenje : Elementarno. ♡

Vježba 9. Nadjite konformalnu parametrizaciju za površ

$$\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1, z^2<1\}.$$

Provjerite rezultat!

Rješenje : Parametrišemo površ Σ (što je jednična sfera probijena na svojim sjevernim i južnim polovima) kao površ revolucije:

$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$$

sa funkcijama $u \mapsto r(u) \in (0,\infty)$ i $u \mapsto h(u) \in \mathbb{R}$.

Koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju

$$E = |\mathbf{x}_u|^2 = r'^2 + h'^2, \quad F = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = 0, \quad G = |\mathbf{x}_v|^2 = r^2.$$

Stoga konformalnost implicira da je
$$r^2 = r'^2 + h'^2;$$
zajedno sa jednačinom sfere, $r^2 + h^2 = 1$ izvedemo diferencijalnu jednačinu za h:
$$1 - h^2 = \frac{h^2 h'^2}{1-h^2} + h'^2 \quad \Leftrightarrow \quad h'^2 = (1-h^2)^2;$$
rješenje ove (Riccatijeve) jednačine je $h(u) = \tanh u$.

Sa ovim dobijemo $r(u) = \sqrt{1-h^2(u)} = \frac{1}{\cosh u}$ i stoga je
$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u\right).$$

Kako bismo završili, provjerimo osobine:
$$\left(\frac{\cos v}{\cosh u}\right)^2 + \left(\frac{\sin v}{\cosh u}\right)^2 + (\tanh u)^2 = 1 \quad \text{i} \quad (\tanh u)^2 < 1,$$
u stvari, $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$ tako da $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \Sigma$ pokriva Σ u potpunosti. Za konformalnost:
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= \frac{1}{\cosh u}\left(-\tanh u \cos v, -\tanh u \sin v, \frac{1}{\cosh u}\right)\\
\mathbf{x}_v(u,v) &= \frac{1}{\cosh u}(-\sin v, \cos v, 0)
\end{aligned}$$
tako da je
$$E(u,v) = \frac{1}{\cosh^2 u} = G(u,v) \quad \text{i} \quad F(u,v) = 0.$$

NAPOMENA: Ovo nije jedina mogućnost konformalne parametrizacije sfere: posmatrajmo inverznu *stereografsku projekciju*
$$(u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) := \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \pm\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$
(primjetite da je $\mathbf{x}(u,v)$ tačka presjeka S^2 sa linijom koja prolazi kroz (u,v), na njenoj ravni ekvatora i njenog južnog (za $+$) respektivno sjevernog (za $-$) pola.)

Onda je
$$\mathbf{x}_u(u,v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}(1-u^2+v^2, -2uv, \mp 2u), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}(-2uv, 1+u^2-v^2, \mp 2v)$$
tako da koeficijenti prve fundamentalne forme onda postaju
$$E(u,v) = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} = G(u,v) \quad \text{i} \quad F(u,v) = 0.$$
Stoga, $\mathbf{x}$ omotava $\mathbb{R}^2$ oko $S^2 \setminus \{\mp(0,0,1)\}$ bijektivno na način koji prezervira uglove; Konkretno $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \ni (u,v) \mapsto \mathbf{x}(u,v) \in \Sigma$ daje jedan-na-jedan konformalnu parametrizaciju Σ. Primjetite da konformalnost parametrizacije osigurava regularnost. ♡

Vježba 10. (a) Napravite u Wolfram Mathematica animaciju koja pokazuje da Gaussovo preslikavanje mijenja smjer kada jednom obiđemo Möbiusovu traku.

(b) Napravite funkciju `tangentnaRavan[x_,u_,v_,u0_,v0_]` koja računa tangentnu ravan površi $\mathbf{x}(u,v)$ u tački $\mathbf{x}(u0,v0)$.

(c) Napravite funkciju `gaussovo[x_,u_,v_]` koja računa Gaussovo preslikavanje date površi.

(d) Napravite funkciju `pff[x_,u_,v_]` koja računa prvu fundamentalnu formu date površi i vraća je kao listu `{E,F,G}`.

Rješenje :

(a) Rađeno na predavanjima.

(b)
```
tangentnaRavan[x_, u_, v_, u0_, v0_] :=
 Module[{},
  Simplify[
   (x /. {u -> u0, v -> v0})
    + a*(D[x, u] /. {u -> u0, v -> v0})
    + b*(D[x, v] /. {u -> u0, v -> v0})
   ]
  ]
```

(c)
```
gaussovo[x_, u_, v_] := Module[{tmp1, tmp2},
  tmp1 =
   Simplify[
    Cross[D[x, u], D[x, v]],
    {Element[u, Reals], Element[v, Reals]}
    ];
  tmp2 =
   Simplify[
    Sqrt[tmp1.tmp1],
    {Element[u, Reals], Element[v, Reals]}
    ];
  Return[Simplify[tmp1/tmp2, {Element[u, Reals], Element[v, Reals]}]]
  ]
```

(d)
```
pff[x_, u_, v_] := Module[{eE, fF, gG},
  eE = Simplify[
    D[x, u].D[x, u],
    {Element[u, Reals], Element[v, Reals]}
    ];
  fF = Simplify[
    D[x, u].D[x, v],
    {Element[u, Reals], Element[v, Reals]}
    ];
  gG = Simplify[
    D[x, v].D[x, v],
    {Element[u, Reals], Element[v, Reals]}
    ];
  Return[{eE, fF, gG}]
  ]
```

♡