

Gaussovo preslikavanje. Linijske i razvojne površi

Diferencijalna geometrija – Vježbe 9

Rješenja predati na predavanjima, u utorak 4. juna 2021. god.

Vježba 1. Izračunajte Gaussovo preslikavanje i tangentnu ravan za površ $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ datu sa

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u \right).$$

Vježba 2. Izračunajte prvu fundamentalnu formu, Gaussovo preslikavanje i tangentnu ravan u proizvoljnoj tački svih do sada na predavanjima i vježbama parametrizovanih površi.

Vježba 3. Neka je data implicitna površ $\Sigma := \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$ i pretpostavimo da je Σ regularna površ. Pokažite da je $\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ jedinično normalno vektorsko polje na Σ .

Vježba 4. Pokažite da je jednokrilni hiperboloid $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ linijska površ te ispitajte kako se njegovo Gaussovo preslikavanje mijenja duž pravih linija na Σ .

Vježba 5. Pokažite da su Möbiusova traka i hiperbolični paraboloid linijske površi.

Dodatno, pokažite da je, slično jednokrilnom hiperboloidu, hiperbolični paraboloid *dvostruko* linijska površ, odnosno da kroz svaku tačku ove površi prolaze dvije prave na površi.

Vježba 6. Neka je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizovana kriva sa $\kappa \neq 0$.

(a) Izračunajte prvu fundamentalnu formu odgovarajuće tangentne razvojne površi.

(b) Nađite ortogonalnu ($F \equiv 0$) reparametrizaciju površi (kao razvojne površi).

Vježba 7. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v \eta(u)$ razvojna površ. Pokažite da je $v \mapsto \mathbf{n}(u, v)$ paralelno normalno polje duž $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$.

Vježba 8. Neka je $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = \gamma(u) + v \eta(u)$ linijska površ. Pokažite da su linije $v \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ (u fiksno), asimptotske linije.

Vježba 9. (a) Napravite u Wolfram Mathematica animacije koje pokazuju da su kupa, hiperboloid, kružni helikoid linijske površi.

(b) Napravite u Wolfram Mathematica program koji provjerava da li je data linijska površ razvojna.