Diferencijalna Geometrija

(*Diferencijalni racun: teoreme implicitnog i inverznog preslikavanja; diferencijalne jednacine*)

Definicija. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \overset{\circ}{\supset} U \to \mathbb{R}^n$ je *diferencijabilno* u tački $p \in U$ ukoliko postoji linearno preslikavanje $d_p f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tako da

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-d_p f(h)}{|h|} = 0.$$

Potsjetnik. Ako je f diferencijabilna u $p \in U \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^m$ onda je njen izvod

$$d_p f \quad \simeq \quad Jf(p) \quad := \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Primjetite da f ne mora biti diferencijabilna u p ako $Jf(p)$ postoji: posmatrajmo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto f(u,v) := \begin{cases} \frac{uv^2\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^4} & \text{for } (u,v) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (u,v) = (0,0) \end{cases}.$$

Ako medjutim Jf postoji svuda i neprekidna je, onda je f *neprekidno diferencijabilna* i, konkretno, je diferencijabilna u svakoj tački.

Ako je f diferencijabilna u $p \in U \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^m$ onda je njen izvod u pravcu $w \in \mathbb{R}^m$ dat sa

$$d_p f(w) \quad = \quad Jf(p) \cdot w \quad = \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tw)-f(p)}{t}.$$

Primjetite da postoje funkcije za koje svi izvodi u pravcu postoje u tački, ali koje nisu diferencijabilne u toj tački (vidjeti gornji primjer).

Dogovor. Za potrebe ovoga predmeta mi ćemo pretpostavti da je svaka funkcija diferencijabilna onoliko puta koliko želimo, tj, da je svaka funkcija u C^∞.

Teoema inverznog preslikavanja. Neka je $f : \mathbb{R}^n \overset{\circ}{\supset} U \to \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna i pretpostavimo da je $d_p f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inverzibilna u $p \in U$. Onda je f lokalno inverzibilna u okolini p sa neprekidno diferencijabilnom inverzijom; konkretno, $d_{f(p)}(f^{-1}) = (d_p f)^{-1}$.

Više formalno : postoji otvorena okolina $B \subset U$ tačke p tako da

(i) $f|_B : B \to \mathbb{R}^n$ je injekcija (tako da je $f : B \to f(B)$ inverzibilna);

(ii) $f(B)$ je otvoren;

(iii) $f^{-1} : f(B) \to B$ je neprekidno diferencijabilna tako da je $d_{f(q)}(f^{-1}) = (d_q f)^{-1}$ za svako $q \in B$.

Teorema implicitnog preslikavanja. Neka je $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \overset{\circ}{\supset} U \times V \to \mathbb{R}^k$ neprekidno diferencijabilna i pretpostavimo da je $\mathbb{R}^k$-dio od $d_{(p,q)}F$ inverzibilna za $(p,q) \in U \times V$. Onda skup $F(x,y) \equiv F(p,q)$ možemo napisati kao graf $y = g(x)$ neprekidno diferencijabilne funkcije g.

Više formalno: ako je $d_{(p,q)}F|_{\{0\}\times\mathbb{R}^k} : \{0\} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ inverzibilna onda postoje otvorene okoline $A \overset{\circ}{\subset} U$ tačke p i $B \overset{\circ}{\subset} V$ tačke q, te (jedinstvena) neprekidno diferencijabilna funkcija $g : A \to B$ sa $g(p) = q$, tako da je $F(x, g(x)) \equiv F(p,q)$.

Zadatak. Dokažite teoremu implicitnog preslikavanja pomoću teoreme inverznog preslikavanja.

Definicija. Neka je $f : \mathbb{R}^m \overset{\circ}{\supset} U \to \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna. Onda se f zove:

- *imerzija* ako je $d_p f$ injekcija za sve $p \in U$ (konkretno, $m \leq n$);
- *submerzija* ako je $d_p f$ surjekcija za sve $p \in U$ (konkretno, $m \geq n$);
- *difeomorfizam* ako je $d_p f$ bijekcija za sve $p \in U$ (konkretno, $m = n$).

Potsjetnik. *Obična diferencijalna jednačina* (reda n) je jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad \leftrightarrow \quad 0 = F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \tag{†}$$

za nepoznatu funkciju $y = y(x)$ koja zavisi od realne promjenljive x — ali može imati vrijednosti u $\mathbb{R}^m$.

Svaka takva ODJ može biti drugačije napisana kao (sistem) ODJ reda $n = 1$ tako što uvedemo izvode kao nove funkcije: sa $y_k := y^{(k-1)}$ jednačina (†) je ekvivalentna sistemu

$$\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & y_2(x) \\ & \vdots & \\ y_{n-1}'(x) & = & y_n(x) \\ y_n'(x) & = & f(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{array}$$

— stoga nikad ne moramo misliti o ODJ višeg reda.

Picard-Lindelöf-ova teorema. Neka je $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \overset{\circ}{\supset} I \times U \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ neprekidna i Lipschitz neprekidna po y i $(x_0, y_0) \in I \times U$; onda *problem početne vrijednosti*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \tag{$\star$}$$

ima jedinstveno $^{(*)}$ (maksimalno) rješenje na malom intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ oko x_0.

Posebni Slučajevi. Dva posebna slučaja Picard-Lindelöf-ove teoreme će biti od posebnog značaja za nas:

(1) ako je $y \mapsto f(y)$ diferencijabilna onda ($\star$) ima jedinstveno lokalno rejšenje;

(2) ako je $y \mapsto f(x, y) = A(x)y$ linearna onda ($\star$) ima jedinstveno globalno (!) rješenje $y : I \to \mathbb{R}^n$.

Zadatak. Dokažite (1).

Potsjetnik iz analitičke geometrije *Ravan* u koordinatnom prostoru može biti definisana na više načina.

Ravan je data u *parametarskoj formui* ukoliko je pretstavljena kao tačka u prostoru koja ima neku linearnu funkciju kao parametar ili dvije parametarske varijable (recimo t i s) u svakoj od svojih koordinata. Na primjer, $(1 + t - 5s, s + t, 5 - 7t), t, s \in \mathbb{R}$, je parametarski data ravan u $\mathbb{R}^3$.

Koristeći sličan pristup kao kod parametarski datih linija u $\mathbb{R}^3$, ukoliko su nam date 3 tačke na ravni $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$ i $C = (x_c, y_c, z_c)$, *koje se ne nalaze na istoj liniji*, dakle nisu *kolinearne*, prvo definišemo vektore $u = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$ i $v = (x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a)$ koji idu od A do B i od A do C. Sada će svi vektori oblika $(x_a, y_a, z_a) + tu + sv$ za sve vrijednosti parametarskih varijabli t i s ići kroz tačke na ravni koja prolazi kroz tačke A, B, C. Stoga ova ravan ima parametarsku formu:

$$R_{(A,B,C)} = (x_a + t(x_b - x_a) + s(x_c - x_a), y_a + t(y_b - y_a) + s(y_c - y_a), z_a + t(z_b - z_a) + s(z_c - z_a))$$

Pažnja vektori u i v mogu, ali ne moraju biti ortonormalni jedinični vektori (ali zašto ne? :))

$^{(*)}$ Naravno, ograničiti "maksimalno" rješenje na manji interval daje "novo" rješenje. Uporedite ovo sa *Peanovom teoremom* koja samo zahtjeva neprekidnost ali ne daje jedinstvenost (objašnjenje: $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$).