MATEMATIKA

Nermin Okičić
Vedad Pašić

Funkcije više promjenljivih : Uvod i neprekidnost

2016

MATEMATIKA

Sadržaj

Poglavlje 1

Funkcije više promjenljivih

Notacija $y = f(x)$, gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, služila nam je za iskazati da je varijabla y zavisna od jedne varijable x, tojest reći da je y funkcija od x. Domen ovakve funkcije f bio je skup realnih brojeva (ili neki njegov podskup). Mnoge veličine mogu se posmatrati u zavisnosti o više varijabli, te su onda one funkcije više varijabli. Naprimjer, zapremina kružnog cilindra je veličina ovisna o poluprečniku osnove cilindra (r) i njegove visine (H), tj. $V = \pi r^2 H$, pa kažemo da je V funkcija dvije varijable r i H. Izaberemo li notaciju za ovu funkciju sa f, tada je $V = f(r, H)$, te imamo da je

$$f(r, H) = \pi r^2 H \ , (\ r > 0 \ , \ \ H > 0 \ ) \ .$$

Pri tome su ograničenja na poluprečnik osnove ($r > 0$) i visinu ($H > 0$) prirodni uslovi jer te veličine ne mogu biti negativne, a ni nule jer takav cilindar onda ne postoji.

Svaka dva tijela u univerzumu djeluju jedno na drugo silom, direktno proporcionalno njihovim masama i obrnuto proporcionalno kvadratu njihovog rastojanja (Newtonov zakon univerzalne gravitacije). Dakle, intenzitet gravitacionog privlačenja (F) između tijela mase m_1 i tijela mase m_2, koja se nalaze na rastojanju r, je funkcija tri varijable,

$$F = F(m_1, m_2, r) = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \ , \ \ m_1, m_2, r > 0 \ ,$$

gdje je G univerzalna gravitaciona konstanta.

1.1 Pojam funkcije više promjenljivih

Neka su $S_X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $S_Y \subseteq \mathbb{R}^m$ proizvoljni skupovi.

Definicija 1.1.1

Ako svakoj tački $X \in S_X$ po nekom zakonu ili pravilu f dodijelimo tačno jednu tačku $Y \in S_Y$, kažemo da je sa f definisano preslikavanje ili funkcija sa S_X u S_Y.

S obzirom na domen (S_X) i kodomen (S_Y) ovako definisanog preslikavanja, uobičajeno se za ovakvo preslikavanje kaže da je vektorska funkcija (izlazni rezultat je vektor u $\mathbb{R}^m$) vektorske promjenljive (ulazna veličina je vektor iz $\mathbb{R}^n$).

Definicija 1.1.2

Pod realnom funkcijom n realnih promjenljivih podrazumijevamo svako preslikavanje $f : D_f \to \mathbb{R}$, gdje je $D_f \subset \mathbb{R}^n$. Pri tome za proizvoljno $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in D_f$ pišemo

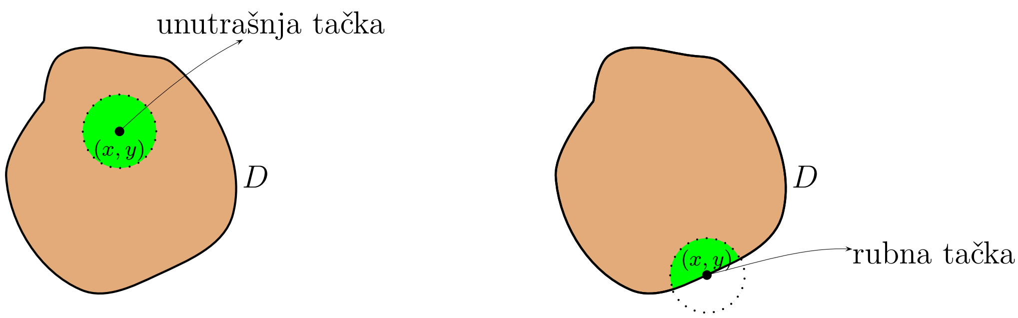
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = y \text{ ili } f(X) = y \ .$$

U kontekstu komentara iza prve definicije, za ovakvo preslikavanje kažemo da je realna funkcija (izlazni rezultat funkcije je realan broj) vektorske promjenljive (ulazna veličina je vektor iz $\mathbb{R}^n$). Kako uređena n-torka označava tačku u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, to ćemo često funkciju f zvati funkcija tačke. Funkcija koja svakoj tački trodimenzionalnog prostora dodjeljuje temperaturu u toj tački, primjer je takve funkcije, ili funkcija koja prikazuje bruto nacionalni dohodak neke države. U prvom slučaju domen funkcije je trodimenzionalan, dok je u drugom slučaju, zbog kompleksnosti pojma "bruto nacionalni dohodak", mnogo većih dimenzija (npr. stotinu). Bez obzira što ćemo mi govoriti o proizvoljnom n-dimenzionalnom prostoru, naši primjeri će najčešće biti u dvije ili tri dimenzije.

1.1.1 Osnovni elementi preslikavanja

U izrazu $f : D_f \to \mathbb{R}$, skup D_f nazivamo domenom funkcije f i kao i kod funkcije jedne varijable, podrazumijevamo da je to "najširi" skup tačaka $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ za koje izraz $f(x_1, x_2, ...x_n)$ ima smisla, tojest da je to neki realan broj. Realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ nazivamo nezavisne varijabe, argumenti ili promjenljive funkcije f. Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $z = f(x, y)$, kažemo da je funkcija dviju nezavisnih varijabli x i y, pri čemu je z zavisna varijabla. Za funkciju $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdje je $w = g(x, y, z)$, w je zavisna varijabla, a x, y, z su nezavisne varijable funkcije tri promjenljive.

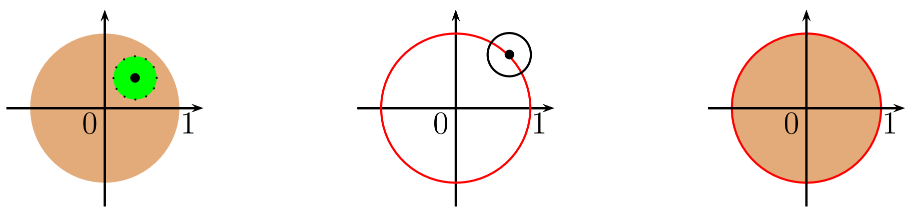
Domen funkcije n varijabli je proizvoljan podskup prostora $\mathbb{R}^n$. On može biti otvoren ili zatvoren skup i u principu se sastoji od unutrašnjih i rubnih tačaka.



(a) (b)

Slika 1.1: Unutrašnja i rubna tačka oblasti u ravni. Unutrašnja tačka je obavezno tačka skupa D, dok to za rubnu tačku nije slučaj.

Tačka X je unutrašnja tačka skupa D ako oko nje možemo opisati kuglu koja komletno leži unutar skupa D ($B(X, r) \subseteq D$). Ako se skup D sastoji samo od unutrašnjih tačaka, onda je on otvoren skup.
Tačka X je rubna tačka skupa D ($X \in \partial D$) ako svaka kugla opisana oko nje sadrži i tačke van tog skupa. Rubne tačke nisu obavezno elementi skupa. Ako skup D sadrži sve svoje rubne tačke, onda je on zatvoren skup.



(a) Otvorena jedinična kugla, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

(b) Rub jedinične kugle, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (kružnica)

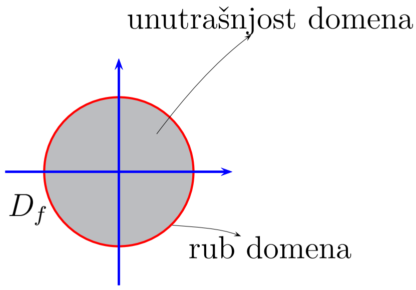
(c) Zatvorena jedinična kugla, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Slika 1.2: Unutrašnje i rubne tačke jedinične kugle u ravni.

Slično intervalima na realnoj pravoj koji mogu biti otvoreni ((a, b)), zatvoreni ($[a, b]$) ili ni otvoreni ni zatvoreni ($(a, b]$ ili $[a, b)$), i oblast u višedimenzionalnom prostoru ne mora biti ni zatvorena ni otvorena. Na slici 1.2 je prikazana situacija da ako otvorenoj kugli (a) "dodamo" sve tačke ruba (b), dobijamo zatvorenu kuglu (c). Naravno, ako otvorenom skupu dodamo samo neke tačke ruba (ne sve), takav skup ne bi bio ni otvoren ni zatvoren.

Dio prostora je ograničen ako leži unutar neke kugle fiksnog radijusa, u suprotnom kažemo da je on neograničen. Dakle, skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je ograničen ako postoji kugla $B(X, r)$ ($X \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$), takva da je $A \subseteq B(X, r)$. Primjeri ograničenih skupova u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ su: segment, trougao, pravougaonik, unutrašnjost kruga, elipsoid i sl. Neograničeni skupovi su npr. prava linija, kvadranti, poluravni, oktanti i sl.

Primjer 1.1.



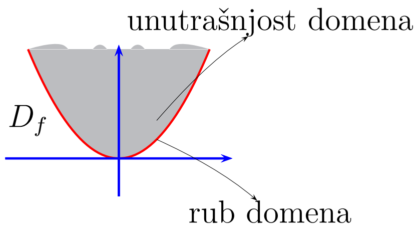
Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ ,$$

x i y su nezavisne varijable, a domen je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Domen je ograničen i zatvoren skup.

♢

Primjer 1.2.



Za funkciju $f : D_f \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \log\left(y - x^2\right) \ ,$$

x i y su nezavisne varijable, a domen je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$. Domen je neograničen skup i u ovom primjeru on se sastoji samo od unutrašnjih tačaka.

♢

Kodomen funkcija više varijabli je dio realne prave i naravno diktiran je samom funkcijom.

Funkcija	Domen	Kodomen
$f(x, y) = x + y$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}$
$f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$	$\mathbb{R}^2$	$(0, 1)$
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, +\infty)$
$z = \log(1 - x^2 - y^2)$	$x^2 + y^2 < 1$	$(-\infty, +\infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$w = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \neq 0$	$[0, +\infty)$

1.1.2 Grafičko predstavljanje funkcija

U grafičkom predstavljanju funkcija više varijabli uobičajena su dva načina, pomoću nivo linija i pomoću grafa.

Definicija 1.1.3

Za datu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i realan broj c, skup

$$L = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n |\ f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}$$

nazivamo nivo skup funkcije f za nivo c. Za $n = 2$, L nazivamo nivo kriva funkcije f, a za $n = 3$, kažemo da je L nivo površ funkcije f. Crtanje koje prikazuje nivo skupove za različite nivoe nazivamo konturno crtanje funkcije.

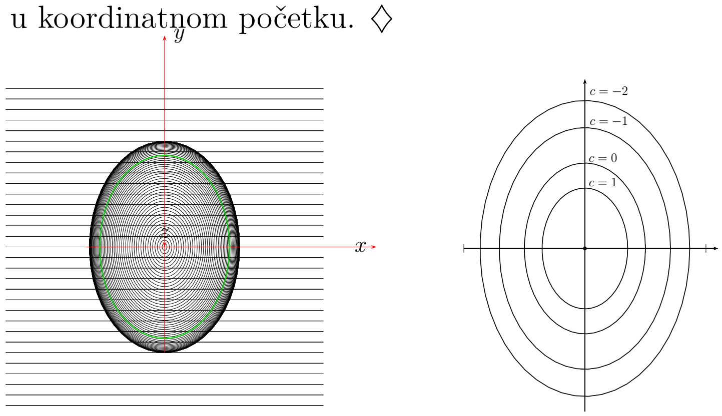
Naprimjer, kod funkcije dvije promjenljive $z = f(x, y)$, držeći z fiksnim, tj. stavljajući $f(x, y) = c$, geometrijski to tumačimo kao presjecanje površi $f(x, y)$ sa ravni $z = c$. U presjeku (crvena linija) dobijamo sve tačke površi $f(x, y)$ čija je vrijednost (vrijednost zavisne promjenljive z) jednaka c i datu liniju nazivamo *konturna linija (kriva)*. Projektovanjem konturne linije u xOy ravan dobijamo liniju koju nazivamo *nivo linija (kriva)*. Ovo možemo zamisliti kao da figuru gledamo iz neke "daleke" tačke na z-osi. Radeći ovaj postupak za razne c, dobijamo konturnu sliku grafa.

Primjer 1.3. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$. Za zadato $c \in \mathbb{R}$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednakost $4 - 2x^2 - y^2 = c$ predstavlja nivo skup funkcije f. Jasno, ako je $c > 4$, taj skup je prazan jer bi u tom slučaju imali da je $-2x^2 - y^2 > 0$, što očigledno nije moguće niti za jedno $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; za $c = 4$ on se sastoji samo od jedne tačke, $(0, 0)$ (rješenje jednačine $-2x^2 - y^2 = 0$ je samo jedna tačka $(x, y) = (0, 0)$); za $c < 4$ taj skup je elipsa sa centrom u koordinatnom početku, tj. za svako $c < 4$ nivo linija je predstavljena elipsom, što je prikazanao na donjoj slici (slika 1.3 desno) za nekoliko različitih nivoa (izborom vrijednosti konstante $c = -2,\ c = -1,\ c = 0$ i $c = 1$). $\diamondsuit$

Primjer 1.4. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa

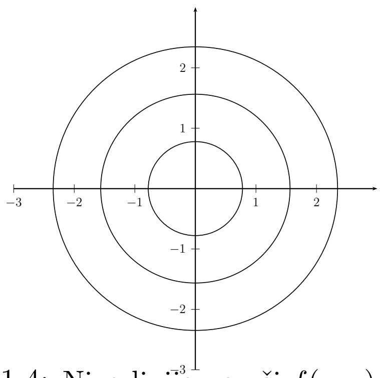
$$f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Za proizvoljnu tačku (x, y) na centralnoj kružnici $x^2 + y^2 = r^2$, poluprečnika $r > 0$, funkcija $f(x, y)$ ima konstantnu vrijednost $\frac{\sin r}{r}$, pa će nivo linije ove funkcije, kao što je prikazano na slici (1.4 (a)), biti koncentrični krugovi sa centrom u koordinatnom početku. ♢



(a) Pogled sa z-ose (b) Nivo linije funkcije $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$.

Slika 1.3: Formiranje konturne slike.



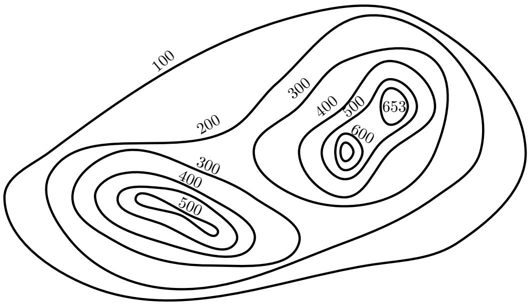
Slika 1.4: Nivo linije površi $f(x,y) = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Primjer nivo linija imamo u kartografiji. Naime, kada na karti, koja je dvodimenzionalni prikaz trodimenzionalnog terena, želimo prikazati planinu, onda to upravo činimo prikazom punom linijom onih tačaka te planine koje su na istoj nadmorskoj visini. To je prikazano na slici 1.5, gdje se "uvećanje" nivo linija (nadmorske visine) dobija uvećanjem nadmorske visine za 100 metara. Ovim načinom takođe predstavljamo izobare (područja sa istim pritiskom), izoterme (područja sa istom temperaturom) i sl.

Primjer 1.5. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Jedna nivo površ ove funkcije zadata je jednačinom

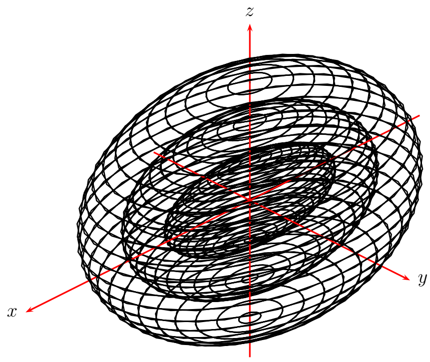
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 ,$$

što predstavlja jednačinu elipsoida. Primjetimo da ako u gornjoj jednačini fiksiramo $z = z_0$, dobijamo jednačinu $x^2 + 2y^2 = 1 - 3z_0^2$, a to su elipse u xOy



Slika 1.5: Prikazivanje nadmorskih visina pomoću nivo linija.

ravni, što opravdava činjenicu da su nivo površi funkcije f elipsoidi (slično smo mogli fiksirati i varijable x i y i dobiti da su projekcije u yOz ravan i u xOz ravan takođe elipse). Generalno, nivo površi date funkcije su elipsoidi $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = c$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. $\diamondsuit$

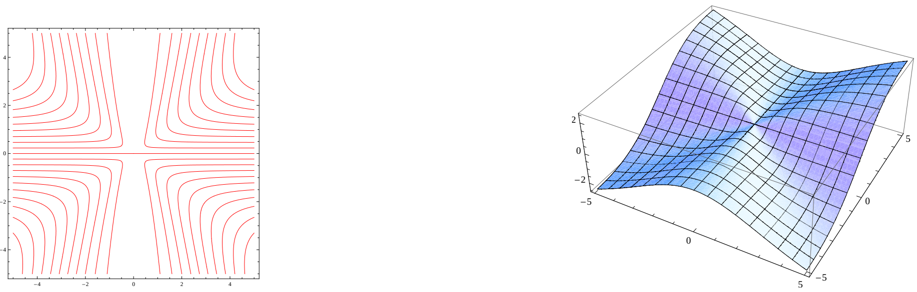


Slika 1.6: Nivo površi funkcije $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ (elipsoidi).

Kod proučavanja funkcije jedne promjenljive, $y = f(x)$, svakom smo paru (x, y) pridruživali jednu tačku $M(x, y)$ u realnoj ravni. Skup svih takvih tačaka M, činio je grafik funkcije f i on je bio predstavljen kao kriva linija u ravni. U slučaju kada posmatramo funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, grafik funkcije će biti izražen tačkama $M(x, y, z)$, dakle u trodimenzionalnom prostoru. Pri tome vrijedi

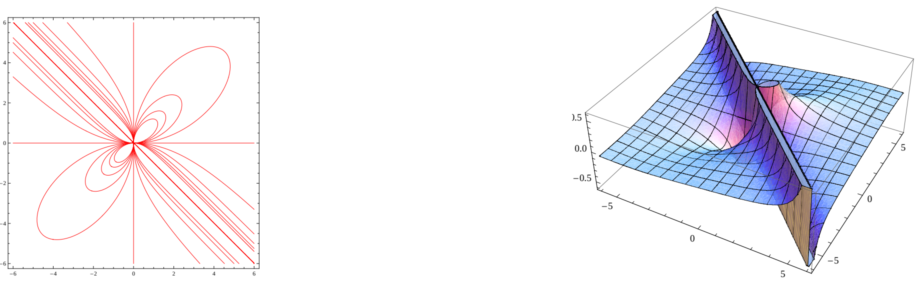
1° Svaka tačka grafika, $M(x, y, z)$, ima apscisu (po x-osi) i ordinatu (po y-osi) koje predstavljaju koordinate neke tačke $X(x, y)$ iz domena funkcije, i aplikatu (po z-osi) koja je jednaka vrijednosti funkcije u tački $X(x, y)$.

2° Svaka tačka $M(x, y, z)$ prostora za koju tačka $X(x, y)$ pripada domenu funkcije, a aplikata z je jednaka vrijednosti funkcije u tački X, pripada grafiku funkcije.



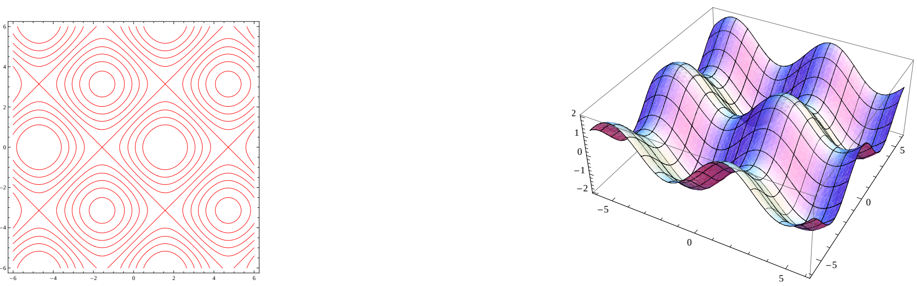
(a) (b)

Slika 1.7: Nivo linije (a) i graf (b) funkcije $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$



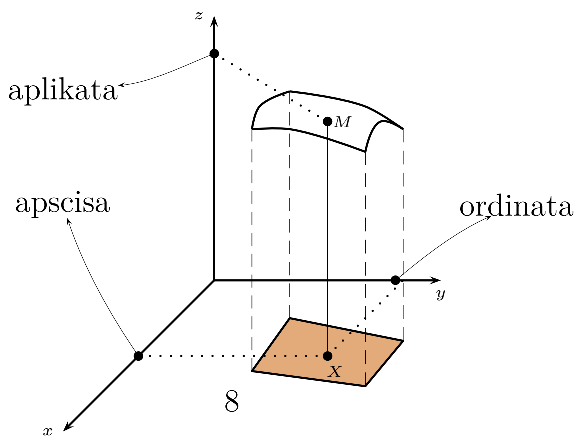
(a) (b)

Slika 1.8: Nivo linije (a) i graf (b) funkcije $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^3+y^3}$



(a) (b)

Slika 1.9: Nivo linije (a) i graf (b) funkcije $f(x,y) = \sin x + \cos y$



Na osnovu rečenog zaključujemo da je grafik funkcije slika njene oblasti definisanosti. Ako je $z = f(x, y)$ definisana u oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$, njen grafik predstavlja površ u prostoru $\mathbb{R}^3$, čija je projekcija na xy-ravan oblast D.

Definicija 1.1.4

Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Skup

$$G = \Big\{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\Big\} \ ,$$

nazivamo graf funkcije f.

Primjetimo da je graf G funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, pa kao posljedicu toga imamo da smo u mogućnosti geometrijski predstavljati samo slučajeve kada je $n = 1$ i tada imamo krivu koja predstavlja funkciju jedne varijable, i kada je $n = 2$ u kom slučaju je graf površ u trodimenzionalnom prostoru. Šta bi bila geometrijska interpretacija grafika funkcije 3 i više promjenljivih za sada nam je nemoguće reći, s obzirom da nemamo način da prikažemo uređene četvorke, petorke itd.

Primjer 1.6. Graf funkcije $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, prestavlja skup uređenih trojki $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, koje zadovoljavaju jednakost $z = 2x^2 + y^2$. Da bi smo predstavili graf ove funkcije u $\mathbb{R}^3$, koristimo ideju da predstavljamo dijelove tog grafa koji leže iznad mreže linija paralelnih osama u xy-ravni. Npr., za jedno fiksirano $x = x_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu

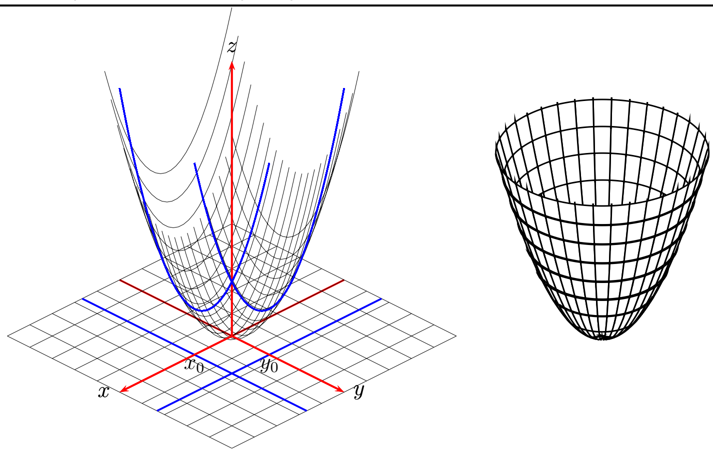
$$z = 2x_0^2 + y^2 \ ,$$

predstavlja parabolu koja leži iznad linije $x = x_0$ u xy-ravni. Na isti način, ako fiksiramo $y = y_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu $z = 2x^2 + y_0^2$, je parabola koja leži iznad linije $y = y_0$. Ako istovremeno nacrtamo više tih parabola za razne $x = x_0$ i $y = y_0$, dobijamo mrežnu predstavu te površi (grafa) i u ovom slučaju ta površ je paraboloid (Slika 1.10). $\diamondsuit$

Primjer 1.7. Mada se za grafove mnogih funkcija možemo poslužiti idejom mreže, izloženom u gornjem primjeru, za većinu funkcija dobra slika njihovih grafova zahtjeva upotrebu računarske grafike ili eventualno mnogo umjetničke vještine. Tako naprimjer, za predstavljanje grafa funkcije

$$f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ ,$$

možemo se poslužiti konturnim crtanjem i zaključiti da graf funkcije osciluje ukoliko se pomjeramo od koordinatnog početka u bilo kom pravcu, tačnije da



Slika 1.10: Paraboloid; Graf funkcije $z = 2x^2 + y^2$.

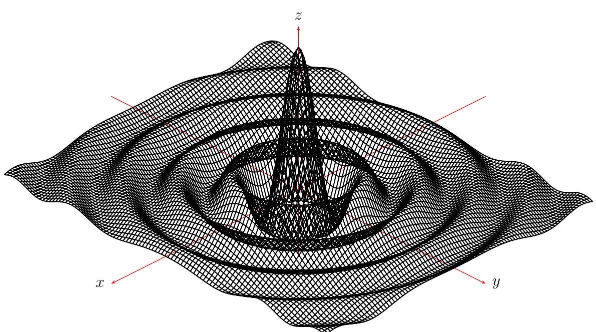
nivo krugovi iz konturnog crtanja rastu i opadaju sa oscilacijom $\frac{\sin r}{r}$, gdje je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ekvivalentno, dijelovi grafa funkcije f iznad proizvoljne linije u xy-ravni koja prolazi kroz koordinatni početak, predstavljeni su funkcijom

$$z = \frac{\sin r}{r} \ .$$

Ovo zaista jeste dobra ideja za predstavljanje grafa funkcije f, ali iskreno govoreći mnogi ne bi bili u stanju produkovati sliku tog grafa koja je prikazana na slici (1.11). Primjetimo takođe da naša funkcija nije definisana u tački $(0, 0)$ ali da ona teži ka vrijednosti 1, kada tačka (x, y) teži ka $(0, 0)$, što je opravdano činjenicom

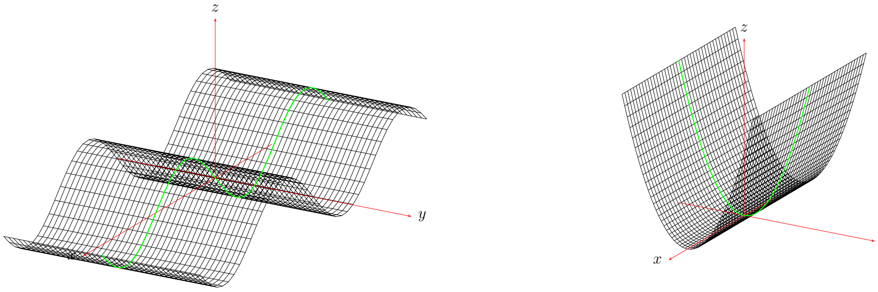
$$\lim_{r \to 0} \frac{\sin r}{r} = 1 \ .$$

$\diamondsuit$



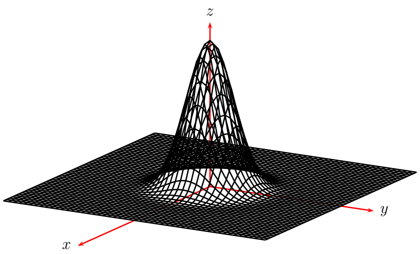
Slika 1.11: Graf funkcije $f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ovdje treba otkloniti i nedoumicu oko funkcija oblika $z = \sin x$ (Slika 1.12 lijevo) ili $z = y^2$ (Slika 1.12 desno). Naime, u oba slučaja podrazumijevamo da je $z = z(x, y)$ pa grafici predstavljaju površi u prostoru, a nepojavljivanje neke od varijabli znači njenu proizvoljnost u definisanosti funkcije.

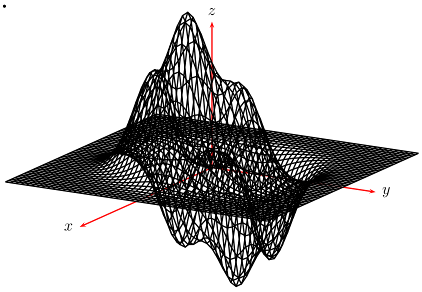


Slika 1.12: (lijevo) $z = \sin x$, (desno) $z = y^2$.

Primjeri još nekih funkcija dvije varijable:



$f(x,y) = (4 - x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$



$f(x,y) = 10\left(x^3 + xy^4 - \frac{x}{5}\right)e^{-(x^2+y^2)} + e^{-((x-1.225)^2+y^2)}$

1.2 Granična vrijednost funkcije n varijabli

1.2.1 Pojam granične vrijednosti

Neka je data funkcija $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Sa U_A označimo proizvoljnu okolinu tačke A i neka je $L \in \mathbb{R}$ i U_L okolina tačke L.

Definicija 1.2.1

Funkcija n nezavisnih projenljivih, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$, ima u tački $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ graničnu vrijednost jednaku L, ako vrijedi,

1° tačka A je tačka nagomilavanja domena funkcije f,

2° za proizvoljnu okolinu U_L, postoji okolina U_A, tako da se vrijednost funkcije $f(X)$ nalazi u okolini U_L za svaku tačku $X \neq A$ koja se nalazi u U_A.

Činjenicu da funkcija f ima u tački A graničnu vrijednost jednaku L, simbolički zapisujemo sa

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(X) = \lim_{x_1\to a_1,\ldots,x_n\to a_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = L\ .$$

Posmatrani limes nazivamo simultani limes, a odgovarajuću graničnu vrijednost nazivamo simultana granična vrijednost.

Istaknimo da za postojanje granične vrijednosti, sama tačka A ne mora pripadati domenu funkcije f, što ističemo prvim zahtjevom u gornjoj definiciji. Ako se za okoline U_A koriste sferne okoline, onda gornju definiciju možemo iskazati na sljedeći način.

Definicija 1.2.2

Funkcija f u tački $A \in \mathbb{R}^n$ ima graničnu vrijednost jednaku L ako vrijedi,

1° tačka A je tačka nagomilavanja domena funkcije f,

2° za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve X za koje je $0 < d(X,A) < \delta \;\Leftrightarrow\; \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta$, vrijedi $|f(X) - L| < \varepsilon$.

Ukoliko koristimo kubne okoline, Definicija 1.2.1 izgleda ovako.

Definicija 1.2.3

Funkcija f u tački $A \in \mathbb{R}^n$ ima graničnu vrijednost jednaku L ako vrijedi,

1° tačka A je tačka nagomilavanja domena funkcije f,

2° za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve X za koje je $0 < d(X,A) < \delta \;\Leftrightarrow\; 0 < |x_i - a_i| < \delta,\ i = 1,2,\ldots,n$, vrijedi $|f(X) - L| < \varepsilon$.

Posmatrajmo neke slučajeve graničnog procesa za funkciju dvije promjenljive.

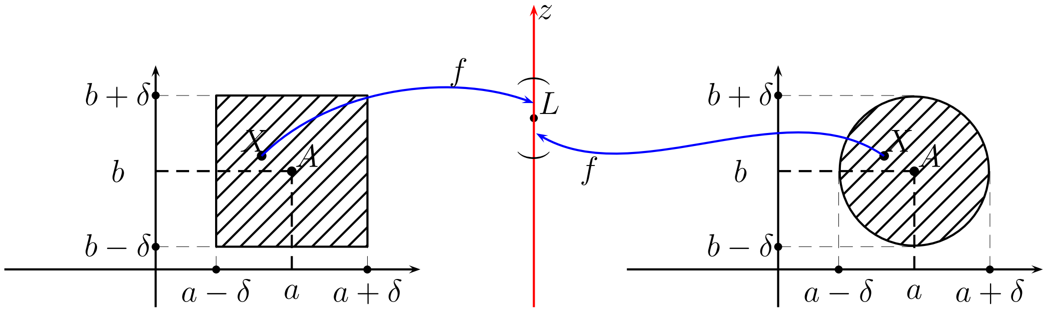
Primjer 1.8. Naprimjer, slučaj

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\,\to\,a\\ y\,\to\,b}} f(x,y) = L\ , \tag{1.2.1}$$

tumačimo na sljedeći način:
Ako fiksiramo $\varepsilon > 0$, onda postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \ ,$$

kad god su x i y takvi da važi $|x-a| < \delta$ i $|y-b| < \delta$ (kubna okolina), ili $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ (sferna okolina). Pri tome je okolina tačke $A(a,b)$, u zavisnosti od metrike data na slici,



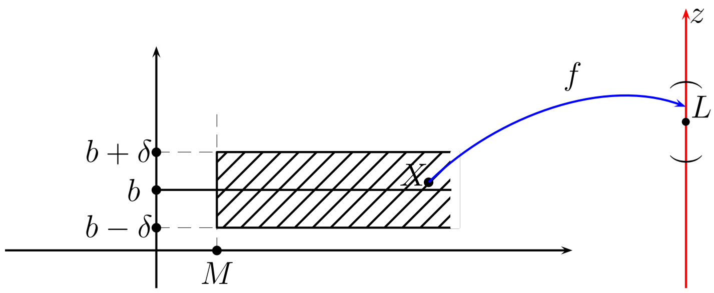
(a) Kugla sa metrikom d_∞ (b) Kugla sa metrikom d_2

Sada nam granični proces (1.2.1) govori da je slika svakog X iz odgovarajuće okoline tačke A, u nekoj okolini broja L na z-osi. $\diamondsuit$

Primjer 1.9. Granični proces

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} f(x,y) = L \ ,$$

tumačimo na sljedeći način: Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ i $M(\varepsilon) > 0$ takvi da važi $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, kad god su x i y takvi da je $x > M$ i $|y - b| < \delta$. Pri tome je okolina tačke A beskonačni pravougaoni pojas prikazan na slici



Kao i u prethodnom primjeru, za svako X iz pravougaonog pojasa (formalno okolina tačke $A(x \to \infty, b)$), vrijednost $f(X)$ će ležati u okolini broja L na z-osi. $\diamondsuit$

Sljedeće osobine graničnih vrijednosti funkcija više varijabli, analogon su i iskazom i dokazom odgovarajućih tvrdnji za funkcije jedne varijable.

Teorem 1.2.1

Neka su $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka postoje

$$\lim_{X\to A} f(X) = F \quad \text{i} \quad \lim_{X\to A} g(X) = G\ .$$

Tada postoje i granične vrijednosti funkcija $f(X) \pm g(X)$, $f(X)\cdot g(X)$, $\frac{f(X)}{g(X)}$ $(g(X) \neq 0)$ i $kf(X)$ $(k \in \mathbb{R})$ i pri tome vrijedi,

1. $\lim\limits_{X\to A}(f(X) \pm g(X)) = F \pm G$,
2. $\lim\limits_{X\to A}(f(X)g(X)) = F \cdot G$,
3. $\lim\limits_{X\to A} \dfrac{f(X)}{g(X)} = \dfrac{F}{G}$,
4. $\lim\limits_{X\to A} kf(X) = kF$.

Gornju tvrdnju treba shvatiti kao pravila izračunavanja limesa funkcija više varijabli. Tako naprimjer, tvrdnju pod 1. treba shvatiti da limes zbira ili razlike funkcija računamo kao zbir ili razliku limesa funkcija, tj.

$$\lim_{X\to A}(f(X) \pm g(X)) = \lim_{X\to A} f(X) \pm \lim_{X\to A} g(X)\ ,$$

naravno pod pretpostavkom da limesi pojedinačnih funkcija postoje.

Primjer 1.10. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadata sa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k\ ,\ k \in \{1, 2, ..., n\}\ .$$

Ukoliko sada posmatramo granični proces kada $X \to A$, tj. $X(x_1, x_2, ..., x_n) \to A(a_1, a_2, ..., a_n)$, što u stvari znači da za proizvoljno $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi $x_i \to a_i$, tada imamo

$$\lim_{X\to A} f(x_1, x_2, ...x_n) = \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)} x_k = a_k\ .$$

Specijalno, ako posmatramo funkciju $f(x, y) = x$, onda imamo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a\ .$$

♢

Primjer 1.11. Neka je sada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x, y, z) = xyz$. Koristeći Teorem 1.2.1 i gornji primjer, imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} xyz \\
&= \left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x\right)\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y\right)\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z\right) \\
&= abc\ .
\end{aligned}$$

Dakle, ako imamo da je $A(1, 2, 1)$, tada je

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} xyz = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2\ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.12. Kombinujući prethodno, sada računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(-1,2)} (x^2 + y^2 - 3xy) = (&\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)+ \\
&(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y)(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y) - 3(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y) \\
&= (-1)(-1) + 2 \cdot 2 - 3(-1)2 = 11\ .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Sva tri gornja primjera predstavljaju primjere graničnih procesa posebne grupe funkcija više varijabli. Naime, funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, oblika

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\ ,$$

gdje je c skalar, a k_i $(i = 1, 2, ..., n)$ nenegativni cijeli brojevi, nazivamo *monomom* ili monomijalna funkcija. Funkciju koja predstavlja sumu monoma nazivamo *polinom* ili *polinomijalna funkcija*.

Teorem 1.2.2

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako postoji granična vrijednost

$$\lim_{X\to A} f(X) = F$$

i ako je h neprekidna funkcija, tada vrijedi

$$\lim_{X\to A} h(f(X)) = h(F)\ .$$

Primjer 1.13. Koristeći Teorem 1.2.2 i gornje razmatranje za polinomijalne funkcije, lagano računamo i granične procese složenijih funkcija.

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zadata sa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}\ .$$

Kako je korjena funkcija neprekidna, sada imamo

$$\begin{aligned}\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)} f(x_1, x_2, ..., x_n) &= \sqrt{\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}\ .\end{aligned}$$

Ili

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{(x^3-y^2+3x^2y)} &= e^{(\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^3-y^2+3x^2y))} \\ &= e^3\ .\end{aligned}$$

U oba primjera podrazumijevamo da je tačka A iz domena funkcije f. $\diamondsuit$

Pored polinomijalnih, često su u upotrebi i funkcije oblika

$$f(X) = \frac{g(X)}{h(X)}\ ,$$

gdje su g i h polinomijalne funkcije. Takvu funkciju nazivamo *racionalna funkcija*. I ovdje, ukoliko je tačka graničnog procesa A iz domena funkcije, limes računamo jednostavno. Naime vrijedi,

$$\lim_{X\to A} f(X) = \frac{\lim_{X\to A} g(X)}{\lim_{X\to A} h(X)}\ .$$

Primjer 1.14. Neka je $f(x, y, z) = \dfrac{x^2y + 5xyz}{2x^2 + 3z^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} f(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} \frac{x^2y + 5xyz}{2x^2 + 3z^2} \\ &= \frac{1^2(-1) + 5\cdot 1\cdot(-1)\cdot 2}{2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2} \\ &= \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7}\ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.15.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \ln\left(\frac{xy}{2x^2+y^2}\right) = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy}{2x^2+y^2}\right) = \ln\left(\frac{2}{6}\right) = -\ln 3\ .$$

$\diamondsuit$

Napomenimo još jednom bitnost pretpostavke da je granična tačka u svim gornjim primjerima graničnih procesa, bila tačka oblasti definisanosti posmatrane funkcije. Međutim, u definiciji granične vrijednosti funkcije više varijabli, zahtjevali smo u 1° da je A tačka nagomilavanja domena funkcije, što znači da granične vrijednosti možemo računati i u nekim "drugim" tačkama. Tako naprimjer, za funkciju

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}\ ,$$

tačka $A(0,0)$ nije iz domena, ali jeste tačka nagomilavanja domena funkcije. Iako je naša funkcija racionalna, ne bismo mogli primjeniti raniji postupak izračunavanja limesa ove funkcije u tački A jer bi to dovelo do neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Ipak, ako izaberemo tačku X dovoljno blisku tački A, tj. neka je

$$0 < d(X,A) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon\ ,$$

za proizvoljno $\varepsilon > 0$, tada ćemo imati

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|} \le \frac{d(X,A)^2 d(X,A)}{d(X,A)^2} = d(X,A) < \varepsilon\ .$$

Ovo na osnovu Definicije 1.2.2 znači da vrijedi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Teorem 1.2.3

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka postoji

$$\lim_{X\to A} f(X) = F\ .$$

Tada za proizvoljan niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $X_n \to A$ $(n \to \infty)$, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = F\ .$$

Ovu tvrdnju možemo sada primjeniti na maloprije urađeni primjer. Naime, utvrdili smo da postoji limes funkcije $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ u tački $A(0,0)$.

Na osnovu posljednje tvrdnje, posmatramo li proizvoljan niz tačaka $(X(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka tački $A(0,0)$ mora vrijediti

$$\lim_{X\to A} f(X) = \lim_{n\to\infty} f(X_n) \ .$$

Posmatrajmo niz $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$. Jasno je da vrijedi $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ kada $n \to \infty$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0 \ .\end{aligned}$$

Kako gornja tvrdnja daje samo potrebne, a ne i dovoljne uslove egzistencije granične vrijednosti mnogo ju je bolje koristiti u kontrapoziciji. Naime, ako postoje nizovi $(X_n')_{n\in\mathbb{N}}$ i $(X_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da $X_n' \to A$ i $X_n'' \to A$ kada $n \to \infty$, za koje je

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n') \neq \lim_{n\to\infty} f(X_n'') \ ,$$

tada ne postoji limes $\lim_{X\to A} f(X)$.

Primjer 1.16. Ispitajmo postojanje granične vrijednosti funkcije $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ u tački $A(0,0)$.

Posmatrajmo nizove tačaka $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Očigledno oba niza konvergiraju ka tački $A(0,0)$. Međutim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2} \ .$$

Dakle, granična vrijednost posmatrane funkcije u tački $A(0,0)$ ne postoji. $\diamondsuit$

1.2.2 Simultana i uzastopna granična vrijednost

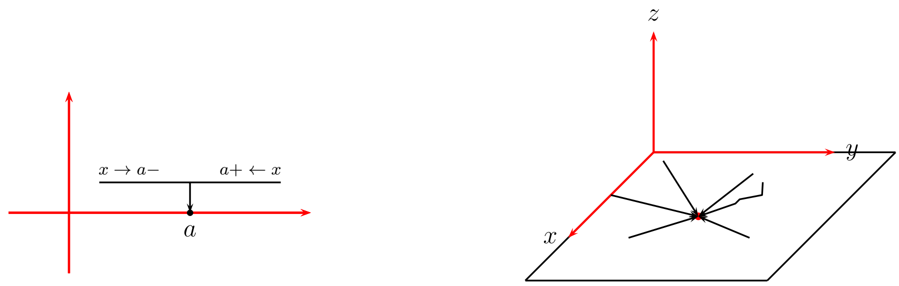
Prisjetimo se da smo za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, postojanje granične vrijednosti

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ ,$$

opravdavali postojanjem i jednakošću lijeve i desne granične vrijednosti u tački a, tj. uslovom

$$\lim_{x\to a-} f(x) = L = \lim_{x\to a+} f(x) \ .$$

Ukoliko jedna od ovih graničnih vrijednosti u tački a ne postoji, tada ne postoji ni granična vrijednost funkcije u toj tački. Slično razmišljanje možemo primjeniti i za funkciju više varijabli, ali razlika leži u činjenici što će sada postojati beskonačno mnogo krivih po kojima se tačka X može približavati nekoj tački A u prostoru $\mathbb{R}^n$, za razliku od samo dvije mogućnosti u prostoru $\mathbb{R}$.



Slika 1.13: Prilaz tački na pravoj (lijevo) i u ravni (desno)

Graničnu vrijednost L, definisanu u Definiciji 1.2.1, nazivamo *simultana granična vrijednost* funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. To je bio slučaj kada tačka $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ teži ka tački $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ tako da sve koordinate x_i tačke X istovremeno teže ka odgovarajućim koordinatama a_i tačke A. Međutim, granični proces možemo posmatrati i tako da puštamo prvo jednu koordinatu da teži odgovarajućoj fiksnoj vrijednosti, a ostale držimo fiksnim. Zatim puštamo neku drugu koordinatu da teži fiksnoj vrijednosti, a preostale držimo fiksnim i tako do posljednje koordinate. Na taj način bi smo posmatrali granični proces u obliku

$$\lim_{x_n \to a_1} \lim_{x_{n-1} \to a_{n-1}} \cdots \lim_{x_2 \to a_2} \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2, ..., x_n) ,$$

i posmatrani proces nazivamo *uzastopni* ili *sukcesivni* limes funkcije.

Posmatrajmo sada funkciju dvije promjenljive $f(x, y)$. Pored simultane granične vrijednosti, prema gore rečenom, od interesa je posmatrati još dvije granične vrijednosti, a to su

$$L_{12} = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) \ , \ L_{21} = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) \ ,$$

koje nazivamo *uzastopne granične vrijednosti* (slika 1.14). Pri tome podrazumijevamo sljedeće,

$$L_{12} = \lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right) \ , \ L_{21} = \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right) \ ,$$

odnosno, u izračunavanju limesa L_{12} prvo računamo $\lim\limits_{y \to b} f(x, y)$, držeći x fiksnim, a zatim od dobijenog rezultata računamo limes, puštajući da $x \to a$.

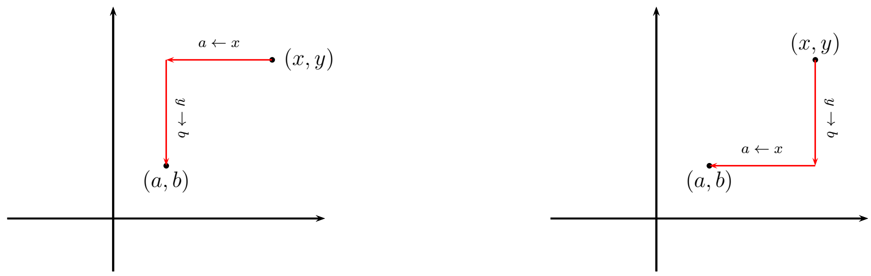
Kod L_{21} princip je obrnut, prvo računamo $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, držeći y fiksnim, a onda od dobijenog posmatramo granični proces kada $y \to b$.

Primjer 1.17. Izračunati uzastopne limese funkcije $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ u tački $A(2,1)$.

$$L_{12} = \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 1} \frac{x-y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1}{5}\ .$$

$$L_{21} = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 2} \frac{x-y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 1} \frac{2-y}{4+y^2} = \frac{1}{5}\ .$$

$\diamondsuit$



(a) Uzastopni limes: $L_{21} = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}$ (b) Uzastopni limes: $L_{12} = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}$

Slika 1.14: Uzastopni limesi funkcije dvije promjenljive.

Teorem 1.2.4: Veza simultane i uzastopnih gr. vrijednosti

Ako postoji simultana granična vrijednost

$$L = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

i ako za svako y postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, tada postoji i uzastopna granična vrijednost

$$L_{21} = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)\ ,$$

i vrijedi $L = L_{21}$.

Dokaz : Ako postoji simultana granična vrijednost L, to znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon\ ,$$

kad god je $|x-a|<\delta$ i $|y-b|<\delta$. Ako fiksiramo y_0 tako da je $|y_0-b|<\delta$, prema pretpostavci teorema, postoji

$$\lim_{x\to a} f(x,y_0) \ .$$

Kako je fiksirano y_0 bilo proizvoljno, postojat će i granična vrijednost

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) \ ,$$

pa je L granična vrijednost funkcije $F(y)=\lim_{x\to a} f(x,y)$ kada $y\to b$, čime je dokaz završen. ♣

Formulaciju gornje teoreme možemo iskazati potpuno analogno koristeći i graničnu vrijednost L_{12}. Posljedice ove teoreme su:

1) Ako postoje simultana i uzastopne granične vrijednosti tada vrijedi

$$L=L_{12}=L_{21} \ .$$

2) Ako je $L_{12}\neq L_{21}$, onda simultana granična vrijednost L ne postoji.

Primjer 1.18. Posmatrajmo funkciju $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ u tački $O(0,0)$.

$$L_{12}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \ .$$

$$L_{21}=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1 \ .$$

$L_{12}\neq L_{21}$ pa dakle L ne postoji. ♢

Primjer 1.19. $f(x,y)=x\cos y$, $x\to 0$ i $y\to +\infty$.
Zbog ograničenosti funkcije kosinus vrijedi

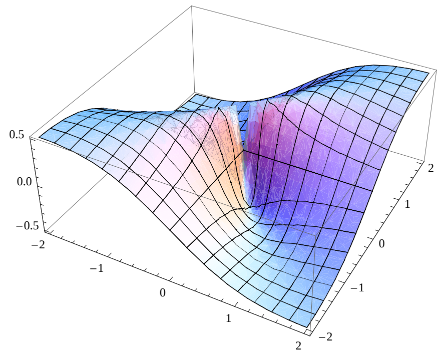
$$L=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to +\infty}} x\cos y=0 \ .$$

$$L_{21}=\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to 0} x\cos y=0 \ .$$

L_{12} ne postoji jer ne postoji granična vrijednost funkcije $\cos y$ kada $y\to+\infty$. ♢

Primjer 1.20. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x\to 0$ i $y\to 0$.

$$L_{12}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=L_{21} \ .$$



Slika 1.15: Graf funkcije $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Simultani limes ne postoji! Zaista, ako se tački $O(0,0)$ približavamo po pravoj $x = y$ (tj. ako posmatramo tačke oblika $X(x,x)$, a to onda znači da ako $X \to O$, onda mora $x \to 0$), tada je

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ ,$$

a ako se ka tački $O(0,0)$ približavamo po pravoj $x = -y$, tj. posmatramo tačke oblika $X(x,-x)$, imamo

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \ ,$$

iz čega je jasno da L ne postoji. $\diamondsuit$

Sa gornjim primjerima smo pokazali neke od mogućnosti ali i probleme kod određivanja graničnih procesa funkcija više varijabli.

1.3 Neprekidnost funkcije n varijabli

Kao i kod funkcije jedne varijable, neprekidnost funkcije više varijabli definisana je direktno u vezi sa limesom funkcije. Pri tome, pričati o neprekidnosti preslikavanja ima smisla samo o tačkama u kojima je preslikavanje definisano.

Definicija 1.3.1

Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u okolini tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Funkcija tačke f je neprekidna u tački A ako vrijedi

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) \ .$$

Iz gornje definicije vidimo da bi funkcija f bila neprekidna u tački A treba biti zadovoljeno:

1° da postoji granična vrijednost funkcije kada $X \to A$,

2° da funkcija bude definisana u tački A,

3° da granična vrijednost funkcije u tački A bude jednaka vrijednosti funkcije u tački A.

Definicija 1.3.2

Funkcija f je neprekidna u tački A ako se za svako $\varepsilon > 0$ može odrediti $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da je za sve X takve da je $0 \leq d(X, A) < \delta$, zadovoljeno

$$|f(X) - f(A)| < \varepsilon \ .$$

Funkcija je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački te oblasti.

Naravno da gornju definiciju možemo posmatrati bilo sa sfernom bilo sa kubnom okolinom tačke A.

Iz razmatranja u prethodnoj sekciji, vezana za polinomijalne i racionalne funkcije imamo sljedeća tvrđenja.

Teorem 1.3.1

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomijalna funkcija. Tada za svako $A \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) \ ,$$

tj. polinomijalna funkcija je neprekidna u svakoj tački $A \in \mathbb{R}^n$.

Primjer 1.21. Za polinomijalnu funkciju $f(x, y) = 3x^3 + 2xy - x + y$ posmatrajmo granični proces kada $(x, y) \to (0, -1)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,-1)} (3x^3 + 2xy - x + y) = -1 = f(0, -1) \ .$$

Generalno, ako $(x,y) \to (x_0,y_0)$ zbog neprekidnosti polinoma imamo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 3x_0^3 + 2x_0y_0 - x_0 + y_0 = f(x_0,y_0)\ .$$

♢

Teorem 1.3.2

Ako je racionalna funkcija f definisana u tački A, tada vrijedi

$$\lim_{X\to A} f(X) = f(A)\ ,$$

tj. racionalna funkcija je neprekidna u svakoj tački svog domena.

Primjer 1.22. Za funkciju $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ posmatrajmo granični proces kada $(x,y) \to (1,1)$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{1+1}{1^2+1^2} = 1 = f(1,1)\ .$$

Kako je $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, tačka $X(1,1) \in D_f$, te je racionalna funkcija neprekidna u toj tački. Generalno, ako tačka $X(x_0,y_0) \in D_f$, tada zbog neprekidnosti vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x_0+y_0}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0)\ .$$

♢

Teorem 1.3.3

Neka su funkcije $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidne u tački $A \in \mathbb{R}^n$. Tada su u toj tački neprekidne i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(A) \neq 0)$ i kf (k proizvoljan skalar iz $\mathbb{R}$).

Teorem 1.3.4

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u tački A i ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada je i $g \circ f$ neprekidna funkcija u tački A.

Primjer 1.23. Kako je funkcija $g(t) = \sin t$ neprekidna za proizvoljno t iz $\mathbb{R}$ i kako je funkcija

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

neprekidna za sve tačke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, onda je i funkcija

$$h(x, y, z) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

neprekidna u svim tačkama iz $\mathbb{R}^3$. $\diamondsuit$

Primjer 1.24. Prema prethodnom primjeru (samo za funkciju dvije varijable), funkcija

$$h(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

je neprekidna za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Takođe je neprekidna i funkcija

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zaključujemo onda da je i funkcija

$$f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

neprekidna u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$, različitoj od tačke $A(0, 0)$. Međutim,

$$\lim_{X \to A} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(d(X, A))}{d(X, A)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,.$$

Dakle, prekid funkcije u tački $A(0, 0)$ je otklonjiv, tj. ako definišemo novu funkciju

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & ; \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

onda je ona neprekidna u svim tačkama $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\diamondsuit$

Definicija 1.3.3

Linija ili površ koja predstavlja skup tačaka prekida funkcije f naziva se linijom ili površinom prekida funkcije.

Ako je funkcija f neprekidna u oblasti D, ona je neprekidna po svakoj liniji i po svakoj površi koja leži u toj oblasti. Ako specijalno posmatramo prave paralelne koordinatnim osama, to onda znači da je funkcija neprekidna po svakoj varijabli posebno. Međutim obrat ne važi, tj. funkcija može biti neprekidna po svakoj varijabli posebno ali da ipak ima prekide. Na primjer, funkcija

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

je u tački $O(0,0)$ neprekidna po svakoj varijabli, ali granična vrijednost (simultana) u tački O ne postoji, tj. funkcija ima prekid u tački O.

Primjer 1.25. $f(x,y) = \dfrac{e^x+e^y}{x^2+y^2-1}$. Linija prekida ove funkcije je kružnica $x^2+y^2=1$. $\diamondsuit$

Primjer 1.26. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(4-x^2-y^2-z^2)}$. Površ prekida funkcije je sfera $x^2+y^2+z^2=4$. $\diamondsuit$

Dio o neprekidnosti završimo sa dva važna stava, koji opet predstavljaju analogone odgovarajućih tvrđenja za funkcije jedne varijable.

Teorem 1.3.5

Svaka funkcija n promjenljivih koja je neprekidna u zatvorenoj i ograničenoj oblasti je ograničena u toj oblasti.

Teorem 1.3.6

Ako je f neprekidna u proizvoljnoj oblasti i ako za $X_1 \neq X_2$ iz te oblasti vrijedi $f(X_1) \neq f(X_2)$, tada za proizvoljno C između $f(X_1)$ i $f(X_2)$, postoji tačka X u toj oblasti takva da je $f(X) = C$.