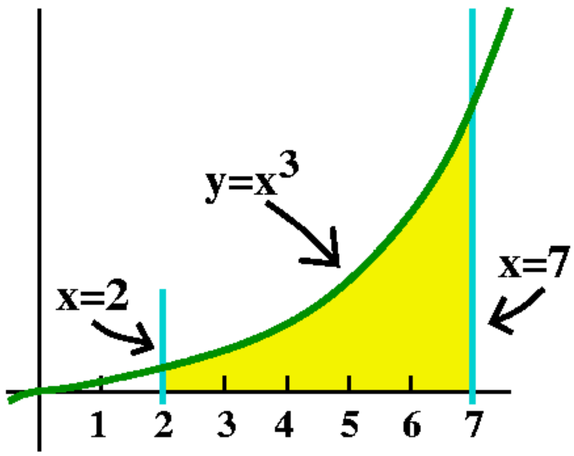


1 Integrali

1.1 Pojam neodređenog integrala

Uvod u površinski problem

- Iako većina razmišlja o integralu isključivo kao o obratu izvoda, osnove integralnog računa sežu mnogo dalje u prošlost od modernih vremena. Jedan od velikih problema više matematike je:

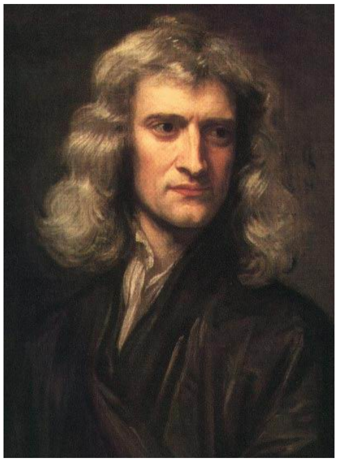
- **Definicija 1.1.** Ako je data realna funkcija f koja je neprekidna i nenegativna na intervalu $[a, b]$, nadjite površinu koja se nalazi između grafa funkcije f i intervala $[a, b]$ na x-osi.

Uvod u površinski problem

Uvod u površinski problem

- Površinske formule za osnovne geometrijske figure, kao što su pravougaonici, poligoni i krugovi idu nazad do najranijih matematičkih zapisa. Prvi pravi napredak od najprimitivnih pokušaja je napravio starogrčki matematičar *Arhimed* (‘$A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\varsigma$), koji je razvio genijalnu, ali napornu tehniku, koja se zove *tehnika iscrpljenja*, kako bi našao površine regija koje su ograničene parabolama, spiralama i raznim drugim krivim.

- Do 17-og stoljeća mnogi su matematičari otkrili načine kako izračunati ove površine koristeći limese. Međutim, svim ovim metodama je nedostajala generalnost.



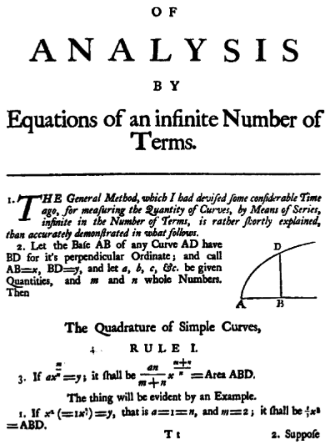
Uvod u površinski problem

- Veliki napredak su napravili nezavisno jedan od drugoga Newton i Leibnitz, koji su otkrili da se površine mogu dobiti obrćući proces diferencijacije.
- Newtonov rad *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* izdat 1711 se smatra početkom više matematike.

Sir Isaac Newton FRS

Gottfried Wilhelm Leibniz

Početak moderne matematike


OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

1. *THE General Method, which I had devised some considerable Time ago, for measuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather shortly explained, than accurately demonstrated in what follows.*

2. Let the Base AB of any Curve AD have BD for it's perpendicular Ordinate; and call AB=x, BD=y, and let a, b, c, &c. be given Quantities, and m and n whole Numbers. Then

The Quadrature of Simple Curves,

RULE I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}} = y$; it shall be $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ = Area ABD.

The thing will be evident by an Example.

1. If $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, that is $a = 1 = n$, and $m = 2$; it shall be $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

T t   2. Suppose

Neodređeni integral

- **Definicija 1.2.** Funkciju F definisanu na intervalu I, nazivamo *primitivom* ili *primitivnom funkcijom* ili *prim funkcijom* ili *anti-izvodom* ili *integralom* funkcije $f(x)$, ako je na tom intervalu $f(x)$ izvod funkcije $F(x)$, tj. ako vrijedi relacija

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{1}$$

- Definicija 1.2 se može formulisati tako da umjesto termina "izvod" koristimo termin "diferencijal" i tada vrijedi

$$d\,F'(x) = F'(x)dx = f(x)dx, \quad \forall x \in I. \tag{2}$$

Primitiv

- **Primjer 1.3.** *Funkcija* $\frac{1}{3}x^3$ *je primitiv funkcije* $f(x) = x^2$ *na intervalu* $(-\infty, \infty)$*, zato što je za svako* $x \in (-\infty, \infty)$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = x^2 = f(x).$$

- Primjetite da ovo nije jedini primitiv funkcije f na ovom intervalu. Ako dodamo bilo koju konstantu C na $\frac{1}{3}x^3$, onda je funkcija $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ također primitiv funkcije $f(x) = x^2$, jer je $\forall x \in (-\infty, \infty)$

$$F'(x) = (\frac{1}{3}x^3 + C)' = \frac{1}{3}(x^3)' + C' = x^2.$$

Primitiv

- **Teorema 1.4.** *Neka je $F(x)$, na intervalu I, primitiv funkcije $f(x)$. Tada je i funkcija $F(x) + C$, gdje je C proizvoljna konstanta, također primitiv funkcije $f(x)$.*

- **Teorema 1.5.** *Neka su $F(x)$ i $\Phi(x)$ različiti primitivi funkcije $f(x)$ na intervalu I. Tada je*
$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Primitiv

Dokaz. Na osnovu pretpostavke teoreme je

$$F'(x) = f(x), \quad \Phi'(x) = f(x),$$

odakle slijedi da je

$$\Phi'(x) - F'(x) = [\Phi(x) - F[x]]' = 0,$$

odnosno, vrijedi

$$\Phi(x) - F(x) = C \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C.$$

□

Neodređeni integral

- Proces nalaženja primitiva nazivamo *anti-izvođenjem* ili, poznatije, *integracijom*.
- Skup svih primitiva funkcije $f(x)$ nazivamo *neodređenim integralom funkcije* $f(x)$ i označavamo ga sa
$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$
gdje je C proizvoljna konstanta.

Neodređeni integral

- Produženo S koje se pojavljuje s lijeve strane definicije neodređenog integrala se zove *znak integracije*, što je notacija koju je izumio Leibnitz 1675 godine. Funkcija $f(x)$ se zove *integrand* ili podintegralni izraz. C se naziva *konstanta integracije*.
- Pridjev "neodređen" se odnosi na činjenicu da integracija ne daje jednu, određenu funkciju, već čitav snop funkcija (zbog konstante integracije).

Neodređeni integral

Primjer 1.6. *Provjeriti da je* $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$. *Kako je*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln^2 x}{2} + C\right) = 2\frac{\ln x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x},$$

to je prema definicije neodređenog integrala funkcija $\frac{\ln^2 x}{2} + C$ *neodređeni integral funkcije* $\frac{\ln x}{x}$.

Neke osobine neodređenog integrala

Iz definicije neodređenog integrala direktno slijedi

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x), \tag{4}$$

$$d\int f(x)dx = d[F(x) + C] = F'(x)dx = f(x)dx, \tag{5}$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C, \tag{6}$$

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \tag{7}$$

Jednostavnija pravila integracije

- *Pravilo 1*. Neka je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. Tada vrijedi

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx \tag{8}$$

- *Pravilo 2*. Ako postoje $\int f_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, tada vrijedi

$$\int (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots \int f_n(x)dx. \tag{9}$$

Jednostavnija pravila integracije

- *Pravilo 3*. Neka je $\int f(t)dt = F(t) + C$. Tada je

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C. \tag{10}$$

- *Dokaz*. Kako je

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = f(t),$$

$$\frac{d}{dt}F(ax + b) = a \cdot F'(ax + b) = a \cdot f(ax + b),$$

imamo da je

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a}F(ax + b)\right] = \frac{1}{a}a \cdot F'(ax + b) = F'(ax + b) = f(ax + b).$$

1.2 Tablica osnovnih integrala

Tablica osnovnih integrala

- Integracija je u osnovi čisto pogađanje - no *obrazovano* pogađanje! Mi u osnovi pokušavamo da pogodimo šta je funkcija iz njenog izvoda.
- Veliki broj integrala možemo riješiti koristeći se nekim, osnovnim integralima standardnih funkcija. Ovdje ćemo navesti neke od njih.

Tablica osnovnih integrala

1. $$\int 0 \cdot dx = C; \quad \int dx = x + C,$$
2. $$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq \pm 1, a \in \mathbb{R},$$
3. $$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

Tablica osnovnih integrala

4. $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C; \quad \int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,ctg} x + C,$$
5. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C; \quad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C,$$
6. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

Tablica osnovnih integrala

7. $$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$
8. $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$
9. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Tablica osnovnih integrala

10.
$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C; \quad \int \csc x \operatorname{ctg} x dx = -\csc x + C,$$

Primjeri

- **Primjer 1.7.**
$$\int (x^3 + 2x - 5) dx.$$

- **Primjer 1.8.**
$$\int \sqrt{x} dx.$$

- **Primjer 1.9.**
$$\int \sin(mx) dx.$$

Primjeri

- **Primjer 1.10.**
$$\int \frac{1}{x+3} dx.$$

- **Primjer 1.11.**
$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+1} dx.$$

- **Primjer 1.12.**
$$\int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

Primjeri

- **Primjer 1.13.**
$$\int x \cdot e^{x^2+1} dx.$$

- **Primjer 1.14.**
$$\int \frac{dx}{x \ln x} dx.$$

- **Primjer 1.15.**
$$\int \frac{2dx}{\sin 2x} dx.$$

Primjeri

- **Primjer 1.16.**
$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \csc x \operatorname{ctg} x dx = -\csc x + C$$

- **Primjer 1.17.**
$$\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 2 \right) = \int t^{-2} dt + \int (-2) dt$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} - 2t + C = -\frac{1}{t} - 2t + C.$$

1.3 Integracija metodom smjene

Integracija smjenom

- U dosadašnjim primjerima smo se samo koristili osnovnim pravilima i tablicama integrala. Takvi slučajevi su rijetki i u nekim slučajevima uvođenjem smjene nezavisne promjenljive podintegralne funkcije možemo svesti integral na tablični slučaj.

- Neka trebamo izračunati
$$\int f(x) dx. \tag{11}$$
Umjesto nezavisne promjenljive x uvedimo novu promjenljivu t, i neka je
$$x = g(t), \quad dx = g'(t) dt. \tag{12}$$

Integracija smjenom

- Tada integral (11) glasi
$$\int f[g(t)]g'(t)dt. \tag{13}$$
-

Teorema 1.18. *Neka su J_1 i J_2 otvoreni integrali u skupu $\mathbb{R}$. Neka je $f : J_2 \mapsto \mathbb{R}$, $\forall x \in J_2$, neprekidna funkcija na J_2 i neka funkcija $g : J_1 \mapsto J_2$ ima neprekidne izvode na J_1. Tada za svako $t \in J_1$ i svako $x = g(t) \in J_2$ vrijedi*
$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt. \tag{14}$$

Integracija smjenom

- Tačnost tvrdnje prati na osnovu definicije izvoda posredne funkcije i definicije neodređenog integrala.
-

Primjer 1.19.
$$\int \sin^3 x \cos x dx.$$
Uvodimo smjenu $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. *Tada posmatrani integral glasi*
$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$$

Integracija smjenom

-

Primjer 1.20.
$$\int xe^{x^2} dx.$$
-

Primjer 1.21.
$$\int \frac{dx}{1+4x} dx.$$

Integracija smjenom

- **Primjer 1.22.**
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} dx.$$

- **Primjer 1.23.**
$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$$

- **Primjer 1.24.**
$$\int \sin^3 x dx.$$

1.4 Metoda parcijalne integracije

Parcijalna integracija

- Neka su $u = f(x)$ i $v = g(x)$ funkcije promjenljive x i neka imaju izvode $u' = f'(x)$ i $v' = g'(x)$. Tada je po pravilu diferenciranja proizvoda
$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du,$$
odakle slijedi
$$u\,dv = d(u \cdot v) - v\,du$$
odnosno

- $$v\,du = d(u \cdot v) - u\,dv.$$
Iz prethodnih jednakosti integracijom dobivamo

Parcijalna integracija

- $$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \tag{15}$$
odnosno

- $$\int v\,du = u\,v - \int u\,dv. \tag{16}$$

- Gornje relacije daju pravila parcijalne integracije.

Primjeri

Primjer 1.25. *Neka treba naći* $\int xe^{2x}dx$. *Uzmimo da je*

$$u = x,\ du = dx,\ dv = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Tada je prema relaciji (15)

$$\int xe^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Primjeri

- **Primjer 1.26.**

$$\int x^2 \ln x = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right|$$

- $$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 \cdot dx$$

- $$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^9}{9} + C.$$

Primjeri

- **Primjer 1.27.** *Izračunati*

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx.$$

- Označimo dati integral sa J i neka je

$$u = e^{ax},\ dv = \cos(bx)dx.$$

- Tada je prema relaciji (15)

$$J = \int e^{ax}\cos(bx)dx = \left| \begin{array}{c} u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx \\ dv = \cos(bx)dx \Rightarrow v = \frac{1}{b}\sin(bx) \end{array} \right|$$

Primjeri

- $$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

- Ako se za izračunavanje $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ uzme

- $$u = e^{ax}\ (du = ae^{ax}dx),\ dv = \sin(bx)dx\ \left(v = -\frac{1}{b}\cos(bx)\right),$$

  tada slijedi

Primjeri

- $$J = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx\right],$$

- $$J = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}J.$$

- Rješavanjem prethodne jednačine po J dobijamo

Primjeri

- $$J = \frac{b\sin(bx) + a\cos(bx)}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax},$$

  ili

- $$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{b\sin(bx) + a\cos(bx)}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C.$$

Primjeri

- **Primjer 1.28.**

  $$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- **Primjer 1.29.** *Izračunati*

  $$J = \int \sqrt{x^2 + a^2}dx.$$