1 Određeni integral. Integrabilnost ograničene funkcije

Najprije uvedimo dvije pretpostavke. Prva, da je realna funkcija segment $[a, b]$ konačne dužine $(-\infty < a < b < +\infty)$.

Definicija 2. *Podjela segmenta* $[a, b]$*, u oznaci* P*, je svaki konačan skup tačaka iz* $[a, b]$ *koji sadrži skup* $\{a, b\}$*. Tačke skupa* P *su* ***podione tačke*** *segmenta* $[a, b]$. Ako pretpostavimo da podjela P sadrži $n + 1$ – u tačku, tada se često (po dogovoru), piše $(*)$ $\quad \mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ Jasno je da se podionim tačkama segment $[a, b]$ dijeli na podrazmake manje dužine. Svaki od njih je oblika (x_{i-1}, x_i), odnosno $[x_{i-1}, x_i]$ (ili, pak $(x_{i-1}, x_i]$, $[x_{i-1}, x_i)$) i predstavljaju *razmake podjele* P. Dužina razmaka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$, a

$$d(\mathrm{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

nazivamo *dijametrom podjele* P. Na svakome razmaku podjele $[x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ izaberimo po jednu proizvoljnu tačku ξ_i. Skup tako odabranih tačaka nazivamo *skupom odabranih tačaka* i označavamo sa

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}.$$

Na ovaj smo način dobili par (P, Ξ) , *podjelu zadatog segmenta* $[a, b]$ *sa skupom odabranih tačaka,* koji iz praktičnih razloga zovemo ***podjelom segmenta*** $[a, b]$, kada nas to ne dovodi do konfuzije.

Definicija 3. *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i* (P, Ξ) *podjela sa odabranim tačkama segmenta* $[a, b]$*. Sumu*

$$\sigma(f; \mathrm{P}, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{1}$$

gdje je $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ *nazivamo* ***integralnom sumom*** *funkcije* f *za datu podjelu* (P, Ξ) .

Primjer prvi. Pretpostavimo, za tren, da je $f \in \mathrm{C}\,[a, b]$ kao i da je za svako $x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$.

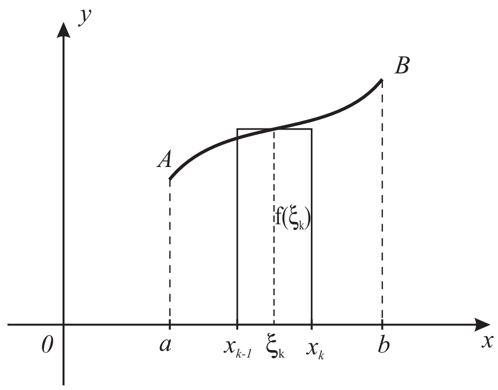
Krivolinijski trapez $ABba$ je ravna figura ograničena dijelom $Ox-$ ose, pravim $x = a$ i$x = b$ i grafikom funkcije $y = f(x)$; slika (6.1).

Uočimo podjelu $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ sa skupom odabranih tačaka $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, te odgovarajuće pravougaonike osnovica $[x_{k-1}, x_k]$ i visina $f(\xi_k), k = 1, 2, \dots, n$; kao na slici (6.1).

Intuitivno možemo ustvrditi da je površina krivolinijskog trapeza $ABba$, približno, jednaka integralnoj sumi datoj relacijom (1).

Definicija 4. *Za funkciju* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, kažemo da je Riemann - integrabilana na segmentu* $[a, b]$ *ako postoji realan broj* L *takav da*

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists \delta > 0) \, (|\sigma(f; \mathrm{P}, \Xi) - L| < \varepsilon) \tag{2}$$



za svaku podjelu $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *i svaki skup odabranih tačaka* $\Xi = \{\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)\,, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *za koje je* $d(\mathrm{P}) < \delta$.

Broj L *se naziva Riemannov integral funkcije* f *na segmentu* $[a, b]$ *i označava* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *a čita: određeni integral funkcije* f *od* a *do* b.

Segment predstavlja *područje integracije*, a funkcija f je *integrand*. Dakle, *funkcija* f *je* $R-$ *integrabilna* ili $f \in \mathrm{I}\,[a, b]$, ako ima konačan Riemannov integral. Ovaj se integral zove i određeni integral od f, na segmentu $[a, b]$, za razliku od skupa svih primitivnih funkcija funkcije f, koji smo nazvali neodređenim integralom funkcije f. Broj L iz relacije (2), jeste granična vrijednost integralnih suma, kada dijametar $d(\mathrm{P}) \to 0$, pa taj limes je

$$L = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d(\mathrm{P})\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right), \tag{3}$$

gdje su $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ odabrane tačke u podjeli P. Već sada možemo pokazati da početna pretpostavka o ograničenosti funkcije f na $[a, b]$, nije dovoljan uslov za njenu integrabilnost.

Razmotrićemo, kao primjer, Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{J}. \end{cases} \tag{4}$$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Uzmimo da je

$$\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

proizvoljna podjela segmenta $[a, b]$. Neka su $\Xi_1 = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ i $\Xi_2 = \{\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'\}$ dva skupa odabranih tačaka segmenta $[a, b]$ takvi da su $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathrm{Q}$, $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i] \cap J$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Tada je $\sigma\left(\chi; \mathrm{P}, \Xi_1\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$, $\sigma\left(\chi; \mathrm{P}, \Xi_2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0$, odakle slijedi da $\lim\limits_{d(\mathrm{P})\to 0} \sigma\left(\chi; \mathrm{P}, \Xi\right)$ ne postoji. Prema tome, Dirichle-

tova funkcija, koja je očito ograničena na bilokojem segmentu $[a, b]$, nije integrabilna na $[a, b]$.
U vezi sa ovim, može se takođe, dokazati još jedan važan rezultat. Naime, upravo smo pokazali da iz $f \in \mathrm{B}\,[a, b]$ ne slijedi $f \in \mathrm{I}\,[a, b]$. Pokazuje se da obrat uvijek vrijedi, tj. ako je funkcija integrabilna na $[a, b]$, onda je ona ograničena na tome segmentu. Drugim riječima, potreban uslov integrabilnosti funkcije jeste njena ograničenost, naime tačna je

Lema 0. *Ako je $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$ tada je $f \in \mathcal{B}_{[a,b]}$.*
Darbouxove sume.

Važnu ulogu u definiciji integrala, igraju Darbouxove sume koje su u bliskoj vezi sa, već definiranom, integralnom sumom.
Pretpostavimo da je f definirana na $[a, b]$ i da je ograničena a da je $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ podjela toga segmenta. Uvedimo oznake

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Sume $s_{\mathrm{P}} = s\,(f, \mathrm{P}) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, S_{\mathrm{P}} = S\,(f, \mathrm{P}) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ nazivamo, redom, ***donjom i gornjom Darbouxovom sumom*** funkcije f na segmentu $[a, b]$, koje odgovaraju podjeli P. Iz definicije integralne sume i Darbouxovih suma, slijedi

$$s_{\mathrm{P}} = s\,(f, \mathrm{P}) \leq \sigma(f; \mathrm{P}, \Xi) \leq S\,(f, \mathrm{P}) = S_{\mathrm{P}} \tag{5}$$

za svaku podjelu P segmenta $[a, b]$ i bilokoje odabrane tačke

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]\,, (i = 1, 2, ..., n),$$

gdje Darbouxove sume svakako i ne ovise od skupa odabranih tačaka.

Lema 1. *Za bilo koju podjelu* P *segmenta* $[a, b]$*, vrijedi*

$$m(b - a) \leq s_{\mathrm{P}} \leq S_{\mathrm{P}} \leq M(b - a), \tag{6}$$

gdje je $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}\; M = \sup\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$.
Lema 2. *Ako je* P' *finija podjela od podjele* P*, tj. ako je* $\mathrm{P} \subset \mathrm{P}'$*, tada vrijedi*

$$s_{\mathrm{P}} \leq s_{\mathrm{P}'} \leq S_{\mathrm{P}'} \leq S_{\mathrm{P}}. \tag{7}$$

Lema 3. *Neka su* P *i* P' *dvije proizvoljne podjele segmenta* $[a, b]$*, tada je* $s_{\mathrm{P}} \leq S_{\mathrm{P}'}$.

Dokaz. Neka je $\mathrm{P}'' = \mathrm{P} \cup \mathrm{P}'$. Jasno da je podjela P'' finije od obije date podjele, tj. $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \subset \mathrm{P}''$. Na osnovu leme 2, imaćemo $s_{\mathrm{P}} \leq s_{\mathrm{P}''} \leq S_{\mathrm{P}''} \leq S_{\mathrm{P}'}$, što je trebalo i pokazati. **Definicija 5.** *Broj* $s = \sup\limits_{\mathrm{P}|[a,b]} \{s_{\mathrm{P}}\}$ *zove se donji Darbouxov integral* *funkcije f na segmentu $[a,b]$, a $S = \inf\limits_{\mathrm{P}|[a,b]} \{S_{\mathrm{P}}\}$ gornji Darbouxov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$.*

Negdje se ovi integrali nazivaju i donji Riemannov, odnosno gornji Riemannov integral, svejedno, za njih vrijedi

Lema 4. $s \le S$.

Teorem 6. *Neka je f ograničena funkcija na segmentu $[a,b]$. Tada f je integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takav da za svaku podjelu* P *segmenta $[a,b]$ dijametra $d(\mathrm{P}) < \delta$, vrijedi $S_{\mathrm{P}} - s_{\mathrm{P}} < \varepsilon$.* Za praktično utvrđivanje da li je neka funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$, od koristi je sljedeći

Teorem 7. *Funkcija f je integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji podjela* P *segmenta $[a,b]$, tako da vrijedi*

$$(*) \qquad S_{\mathrm{P}} - s_{\mathrm{P}} < \varepsilon.$$

Teorem 8. *Funkcija f je integrabilna ako i samo ako je $S = s$, a u slučaju integrabilnosti na $[a,b]$, $S = s = \int\limits_a^b f(x)dx$.*

Primjer 15. Neka je

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Pokazati da je $\int\limits_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.

1.1 Osobine integrabilnih funkcija

Definicija 6. *Neka je $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$. Tada je, po definiciji,*

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx i \quad \int\limits_\lambda^\lambda f(x)dx = 0, \lambda \in [a,b].$$

Lema 5. *Ako je $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$ i $a \le \alpha < \beta \le b$, tada je f integrabilna na segmentu $[\alpha,\beta]$.*

Lema 6. *Neka je $a < c < b$ i neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{8}$$

Teorem 9. *Neka $f, g \in \mathcal{I}_{[a,b]}$. Tada su funkcije $f+g, f-g, \lambda \cdot g$ integrabilne na segmentu $[a,b]$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$; pri tome vrijedi*

(a) $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$

(b) $\int\limits_a^b (\lambda f(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx.$

Teorem 10. *Neka su $f, g \in \mathcal{I}_{[a,b]}$ takve da je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in [a,b]$, tada vrijedi*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{9}$$

Teorem 11. *Ako je f integrabilna funkcija na segmentu $[a,b]$, tada su integrabilne i funkcije f^+ i $|f|$; osim toga, vrijedi nejednakost*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx. \tag{10}$$

Primijetimo da iz integrabilnosti funkcije $|f|$ na $[a,b]$ ne slijedi da $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$. Zaista, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{J} \end{cases},$$

očigledno nije integrabilna na $[a,b]$. Međutim

$$|f(x)| = 1, x \in [a,b]\,,$$

jeste integrabilana na istome segmentu; v. primjer 14.

Teorem 12. *Ako je $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, tada je $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$.*

Primjer 16. Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ i $c \in (a,b)$; definirajmo funkciju g na $[a,b]$, pomoću

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \setminus \{c\} \\ \alpha, & x = c \end{cases}, \tag{11}$$

gdje je $\alpha \neq f(c)$.

Nije teško uočiti da je g prekidna funkcija u tački $c \in (a,b)$. Pokazaćemo da je g integrabilna funkcija na $[a,b]$. Još više, ako ograničena funkcija g, ima bilo koji konačan broj otklonljivih prekidnih tačaka na segmentu $[a,b]$, svejedno, ona je integrabilna i vrijedi

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Na taj način se pokazuje da je neprekidnost funkcije samo dovoljan uslov za njenu integrabilnost.

Teorem 13. *Svaka monotona funkcija na* $[a, b]$ *je integrabilna na* $[a, b]$.

Teorem 14. (***Teorem o srednjoj vrijednosti***) *Neka je* f *neprekidna funkcija na segmentu* $[a, b]$, *tada postoji* $\lambda \in [a, b]$ *takvo da vrijedi*

$$f(\lambda) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \tag{12}$$

1.2 Veza određenog i neodređenog integrala

Veza određenog i neodređenog integrala
Neka je f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$, tada je $f \in \mathrm{I}_{[a,x]}$ za bilokoje $x \in [a, b]$. Dakle, postoji integral $\int_a^x f(t)dt$, koji je, očito, funkcija svoje gornje granice x. Označimo tu funkcionalnu zavisnost sa $F(x)$, tj.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad . \tag{13}$$

Ovako definirana funkcija F, kao što ćemo pokazati, ima bolja svojstva od podintegralne funkcije f.

Teorem 15. *Neka je* f *integrabilna funkcija na* $[a, b]$, *tada je funkcija* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *neprekidna na* $[a, b]$. ***Dokaz.*** Iz $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$ slijedi da postoji $K > 0$ takav da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in [a, b]$ (lema 0).
Za $h > 0$, imamo

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

odakle je $|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt \leq K \cdot h$. Dakle, $\lim\limits_{h \to 0+} F(x+h) = F(x)$. Poslednja relacija pokazuje da je funkcija $F(x)$ neprekidna sa desne strane u tački $x \in [a, b]$. $\square$

Teorem 16. *Ako je* f *neprekidna funkcija na* $[a, b]$, *tada je*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

diferencijabilna funkcija i za svako $x \in (a,b)$, vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

Dokaz. Neka je x_0 bilo koja tačka iz (a,b), $F(x_0) = \int\limits_a^{x_0} f(t)dt$ i

$$F(x_0 + h) = \int\limits_a^{x_0+h} f(t)dt.$$

Količnik prirasta funkcije F i prirasta argumenta x je

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt.$$

Budući da je $f(x_0) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, iz poslednje relacije slijedi

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \left(f(t) - f(x_0)\right) dt. \tag{14}$$

Sa druge strane, $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ pa je za zadato $\varepsilon > 0$ moguće naći $\delta > 0$, takav da je $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ kadgod t ima svojstvo da je $|t - x_0| < \delta$. Osim toga, ako se izabere h, tako da je $0 < h < \delta$, onda ćemo imati

$$\left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \left(f(t) - f(x_0)\right) dt\right| \leq \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt < \frac{\varepsilon}{h} \cdot h = \varepsilon.$$

Ako poslednju nejednakost primijenimo na (14), dobijamo da postoji desna derivacija funkcije $F(x)$ u x_0 i jednaka je $f(x_0)$. Isto tako se tretira slučaj $h < 0$ i $-\delta < h < 0$, tj. isto vrijedi i za lijevu derivaciju funkcije $F(x)$ u tački x_0.

Budući da je $x_0 \in (a,b)$ proizvoljno uzeto, teorem je dokazan. Iskoristićemo poslednju tvrdnju da izvedemo jednu od najvažnijih formula integralnog računa, a to je *Newton-Leibnizova formula*. Dakle iz teorema 16 slijedi da je funkcija $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$.

Pokazali smo u da razlika bilo koje dvije primitivne funkcije iste funkcije f predstavlja konstantu. To znači, ako je $\Phi(x)$ bilokoja primitivna funkcija funkcije $f(x)$, onda je

$$\Phi(x) - F(x) = C,$$

jer je $F(x)$, takođe, primitivna funkcija funkcije f.

Budući da je opšti oblik primitivne funkcije za $f(x)$, njen neodređeni integral $\Phi(x) = \int f(x)dx$, to slijedi da je

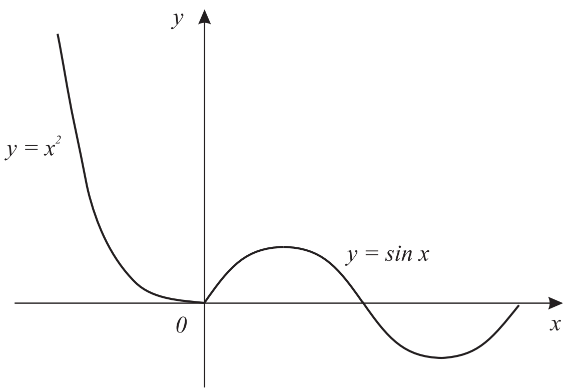
$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C,$$

odnosno $\Phi(x) - \int_a^x f(t)dt = C$. Ako u posljednjoj relaciji stavimo $x = a$, a zatim i $x = b$, dobićemo sljedeće relacije
$\Phi(a) = C$ i $\Phi(b) - \int_a^b f(t)dt = C$. Prema tome slijedi da je $\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$.
Ova formula se, po dogovoru, zapisuje i koristi u obliku

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(x)\,\Big|_a^b \tag{15}$$

i predstavlja Newton-Leibnizovu formulu.

Primjer 20. Izračunati integral $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$. Glavni metodi izračunavanja neodređenog integrala, metod smjene promjenljive i metod parcijalne integracije, mogu se primijeniti i kod izračunavanja određenog integrala. Prije nego pokažemo kako ovi metodi ovdje funkcioniraju, uvešćemo pojam glatke funkcije.
Razmotrimo, najprije, primjer funkcije $y(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$, koju ćemo predstaviti i na slici.



Nije teško vidjeti da je njena prva derivacija prekidna funkcija u nuli. Naime, $y'(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$, pa je $y'(-0) = 0, y'(+0) = 1$. Na grafiku se to prepoznaje po tome da funkcija $y(x)$ u nuli ima "špic", dakle, nije "glatka" kao u ostalim tačkama njenoga domena.

Definicija 7. *Funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je* ***glatka*** *na* $[a, b]$, *ako ima neprekidnu prvu derivaciju na skupu* $[a, b]$ *; podrazumijeva se desna (lijeva) derivacija u tački* a *(odnosno* b*).*

Klasu svih glatkih funkcija na $[a, b]$ označavamo sa $\mathcal{C}^{(1)}_{[a,b]}$.
Za funkcije koje su glatke po dijelovima svoga domena (koji sadrži konačno mnogo takvih dijelova), kažemo da su ***dio po dio glatke funkcije***.

Teorem 17. *Neka su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ glatke na segmentu $[a, b]$. Tada vrijedi jednakost*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\,\big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \tag{16}$$

Dokaz. Ako primijenimo Newton-Leibniz formulu na derivaciju proizvoda

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x),$$

dobićemo

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + v'(x)u(x))\,dx = u(x)v(x)\Bigg|\begin{array}{c} b \\ a \end{array},$$

odnosno $\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Bigg|\begin{array}{c} b \\ a \end{array}$, odakle slijedi formula (16), što smo i tvrdili ovim teoremom. Iskoristićemo sada formulu za parcijalnu integraciju da pokažemo još neke osobine određenog integrala. Među njima je i *poopštenje teorema o srednjoj vrijednosti*.

Teorem 18. *Neka je f neprekidna, a g rastuća nenegativna glatka funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoji $\xi \in [a, b]$ tako da vrjedi*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{17}$$

Teorem 19. (***Drugi teorem o srednjoj vrijednosti***) *Ako je f neprekidna, a g monotona*

i glatka funkcija na segmentu $[a, b]$, tada postoji $\xi \in [a, b]$ tako da vrijedi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{18}$$

Dokaz. Ako pretpostavimo da je g rastuća na $[a, b]$ i uvedemo funkciju $\Phi(x) = g(x) - g(a)$, onda je jasno Φ nenegativna i glatka funkcija. Još više, primjenom formule (17) na funkcije f i Φ, slijedi jednakost (18), što je trebalo i pokazati. Navedimo sada formulu za smjenu promjenljive u određenom integralu, čime ćemo dobiti još jednu moćnu metodu za izračunavanje određenog integrala.

Teorem 20. *Neka je $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija*

$$\phi : [\alpha_0, \beta_0] \to [A, B]$$

ima neprekidnu derivaciju $\phi'(t)$. Ako je

$$\alpha, \beta \in [\alpha_0, \beta_0]\,, a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta),$$

tada vrijedi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)dt. \tag{19}$$

Teorem 21. **(***Jensen***)** *Neka je $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, a ϕ konveksna i neprekidna funkcija na*

$\left[\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\ \max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\right]$. *Tada vrijedi nejednakost*

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(x)\right)dx. \qquad (J_i)$$

Primjer 24. Izračunati $I = \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Primjer 29. Neka su f i g neprekidne funkcije na $[a,b]$. Pokazati da vrijedi nejednakost (Bunjakovski-Schwarz)

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(BS)}$$

pri čemu u (BS) važi znak jednakosti ako i samo ako je $f = \alpha g$, za neko $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\triangleright$ Pođimo od očigledne relacije

$$\begin{aligned} T &= \lambda^2\int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx = \\ &= \int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2\,dx \geq 0. \end{aligned}$$

Možemo, odmah, uzeti da je $\int\limits_a^b f^2(x)dx > 0$.

Sa druge strane, polazni kvadratni trinom T je nenegativan ako i samo ako (za njegovu diskriminantu) vrijedi

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0,$$

što predstavlja nejednakost (BS). Osim toga, jednakost u (BS), vrijedi ako i samo ako je $\lambda f(x) + g(x) = 0$ za svako $x \in [a,b]$, tj.

$$g(x) = \alpha f(x),\ (\alpha = -\lambda)\,.\triangleleft$$

2 Nesvojstveni integral i njegove osobine

Rimannov integral realne funkcije f, koja je definirana na segmentu integracije $[a,b]$, uveden je uz bitnu pretpostavku da je funkcija f ograničena ($f \in \mathrm{B}\,[a,b]$).
Osim toga, uslov da se integracija vrši na konačnom segmentu, takođe je ograničenje koje se, sve vrijeme dok pričamo o određenom integralu, ističe. Drugim riječima, integral neograničene funkcije nije definiran.
Jednako tako, ni integral funkcije definirane na razmaku $[a,\infty)$, nije definiran. Međutim, pojam integrala se može poopćiti tako da obuhvati i neke ovakve slučajeve.

Definicija 8. *Neka je funkcija f definirana na razmaku $[a,b)$ i integrabilna na svakom segmentu $[a,\beta]\subset[a,b)$. Ako postoji konačan limes*

$$\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx, \tag{20}$$

on predstavlja ***nesvojstveni integral funkcije*** *f na razmaku $[a,b)$ i označava sa $\int_a^b f(x)dx$.*
Često se (20) naziva i nesvojstvenim integralom sa *singularitetom u tački* b i ako postoji konačan limes $\lim\limits_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx$ kaže se da nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ *konvergira*; u suprotnom slučaju kažemo da integral $\int_a^b f(x)dx$ *divergira*.
Slično se definira nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)dx$ sa singularitetom u tački a.

Primjer 30. Nesvojstveni integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$, za $\alpha>0$ ima singularitet u tački 0. Njegova konvergencija, očito, zavisi od parametra $\alpha>0$.

Definicija 9. *Pretpostavimo da je funkcija $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ integrabilna na svakome segmentu $[a,\beta]\subset[a,+\infty)$. Ako postoji limes*

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)dx,$$

onda kažemo da je to nesvojstveni integral funkcije f na razmaku $[a,+\infty)$; u oznaci $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.
Često se simbol $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ naziva i nesvojstveni integral sa singularitetom ∞. Ako postoji konačan $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)dx$, onda nesvojstveni integral konvergira, a u suprotnom

on divergira. Na potpuno analogan način se definira i nesvojstveni integral $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Primjer 31. Ispitajmo konvergenciju integrala $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \alpha \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Neka je $\alpha \neq 1$. Tada je $\int\limits_{1}^{\beta} \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Bigg| \begin{matrix} \beta \\ 1 \end{matrix} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\beta^{1-\alpha} - 1\right)$, tj.

$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int\limits_{1}^{\beta} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\beta^{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$ (*)

Ako je $\alpha = 1$, tada imamo $\int\limits_{1}^{\beta} \frac{1}{x}dx = \ln\beta$; dakle

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_{1}^{\beta} \frac{1}{x}dx = \lim_{\beta\to\infty} \ln\beta = \infty,$$

što zajedno sa (*), pokazuje da je integral konvergentan za $\alpha > 1$, a divergentan za $\alpha \leq 1$. $\triangleleft$ Reći ćemo da integral ima singularitet u tački b ako je funkcija neograničena na intervalu (β, b), $(\beta < b)$, ili pak, b predstavlja simbol ∞. Drugim riječima, ako je funkcija f definirana na konačnom ili beskonačnom razmaku $[a, b)$ (b je konačan broj ili ∞), i integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta] \subset [a, b)$, onda nesvojstveni integral $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ konvergira u slučaju da postoji konačan $\lim\limits_{\beta\to b} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx$; u suprotnom nesvojstveni integral divergira. Dakle, umjesto $\lim\limits_{\beta\to b-0} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx$ (ako je b konačan broj), odnosno $\lim\limits_{\beta\to\infty} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx$ (ako je $b = \infty$), pisaćemo isto $\lim\limits_{\beta\to b} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)dx$. Ako $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ima singularitete u a i u b, onda ćemo staviti po definiciji da je

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx; \tag{21}$$

pri čemu pretpostavljamo integrabilnost funkcije f na svakom segmentu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ i $a < c < b$. Dakle, po definiciji $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ konvergira ako svaki od dva nesvojstvena integrala na desnoj strani u (21) konvergira.

Teorem 22. *Neka su* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ i $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ *nesvojstveni integrali sa singularitetom u tački* b. *Tada:*

(1) ako oba integrala konvergiraju, konvergira i $\int\limits_{a}^{b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx$ *i vrijedi*

$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx, (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$;

(2) ako je $a < c < b$, $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergira ako i samo ako konvergira $\int\limits_c^b f(x)dx$ i vrijedi $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$; (3) ako su f i g glatke funkcije i postoji konačan $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$, integral $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$ konvergira ako i samo ako konvergira

$$\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx.$$

U tome slučaju vrijedi jednakost

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx,$$

gdje je $f(x)g(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)$.

Primjer 32. Nesvojstveni integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$ konvergira, jer je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int\limits_{\alpha}^{0} e^{x}dx + \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_{0}^{\beta} e^{-x}dx =$$
$$= \lim_{\alpha\to-\infty} (1 - e^{\alpha}) + \lim_{\beta\to\infty} \left(1 - e^{-\beta}\right) = 2.$$

Definicija 10. *Ako je f integrabilna funkcija na svakom segmentu $[a, \alpha] \subset [a, c)$ i svakom segmentu $[\beta, b] \subset (c, b]$, $a < c < b$, definiramo*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

ukoliko integrali $\int\limits_a^c f(x)dx$ i $\int\limits_c^b f(x)dx$ konvergiraju.

Teorem 23. *Potreban i dovoljan uslov konvergencije nesvojstvenog integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$, sa singularitetom u tački b, jeste*

$(\forall\varepsilon > 0)\, (\exists\beta_0, a < \beta_0 < b) : (\forall\beta', \beta'' \in (\beta_0, b))$, *vrijedi* $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Teorem 24. *Neka je za svako* $x \in [a,b) \quad |f(x)| \leq g(x)$. *Ako integral* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *konvergira, tada konvergira i integral* $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$.

Dokaz. Neka je, kao što smo rekli $|f(x)| \leq g(x), x \in [a,b)$ i $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Kako integral $\int\limits_a^b g(x)dx$ konvergira, to postoji β_0, tako da za svako $\beta', \beta'' \in (\beta_0, b)$ vrijedi $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} g(x)dx\right| < \varepsilon$. Iz polazne pretpostavke tvrdnje slijedi

$$\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\, dx \leq \int\limits_{\beta'}^{\beta''} g(x)dx < \varepsilon,$$

pa je tvrdnja dokazana.

Definicija 11. *Nesvojstveni integral* $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***apsolutno konvergira*** *ako konvergira integral* $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$.

Iz teorema 24, neposredno slijedi da ako nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ apsolutno konvergira onda on i konvergira.

Pretpostavimo, da integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ ima singularitet u tački $c \in (a,b)$; tada je $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergentan ako i samo ako postoje i konačni su limesi $\lim\limits_{\alpha \to c-0} \int\limits_a^\alpha f(x)dx$ i $\lim\limits_{\beta \to c+0} \int\limits_\beta^b f(x)dx$, gdje α i β, nezavisno jedan od drugoga teže ka c. Ako postoji

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right),$$

onda se on naziva *glavna vrijednost integrala* i koristi se oznaka[1]

$$L = v.p. \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Slično je i $\lim\limits_{b \to +\infty} \left(\int\limits_{-b}^b f(x)dx \right) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

[1]v.p. = valeur principal (francuski) - glavna vrijednost

Primjer 34. Pokazati da integral $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergira.

$\triangleright$ Koristeći teorem 24 i očiglednu procjenu $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, dobijamo

$$\int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx \leq \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2},$$

tj. dati integral konvergira, jer $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergira. $\triangleleft$ **Teorem 26.** *Neka je $f(x) \geq 0, x \in [a, b)$. Potreban i dovoljan uslov konvergencije nesvojstvenog integrala $\int\limits_a^b f(x)dx$, je da postoji broj M, takav da je $\int\limits_a^\beta f(x)dx \leq M, a \leq \beta \leq b$.*

Dokaz. Iz nenegativnosti funkcije $f(x)$ na $[a, b)$, slijedi da je funkcije $\phi(\beta) = \int\limits_a^\beta f(x)dx$ rastuća. Limes $\lim\limits_{\beta \to b} \phi(\beta)$ je konačan ako i samo ako je funkcija ϕ ograničena, što je i trebalo dokazati. **Posljedica:** *Neka je $0 \leq f(x) \leq g(x), x \in [a, b)$ i neka su*

$$(1) \qquad \int\limits_a^b f(x)dx\ ; \qquad (2) \qquad \int\limits_a^b g(x)dx,$$

nesvojstveni integrali sa singularitetom u tački b.
Iz konvergencije integrala (2) slijedi konvergencija integrala (1), a iz divergencije integrala (1) slijedi i divergencija integrala (2).

Dokaz posljedice. Neka je $\phi(\beta) = \int\limits_a^\beta f(x)dx$ i $\Psi(\beta) = \int\limits_a^\beta g(x)dx$, gdje je $\beta \in [a, b)$.
Ako konvergira integral (2), tada postoji broj M, takav da je $\phi(\beta) \leq \Psi(\beta) \leq M$; dakle, integral (1) konvergira.
Drugi dio tvrdnje je kontrapozicija prvog dijela, koji smo upravo dokazali.

3 Primjene određenog integrala

Kriva linija. Dužina luka krive.
Neka je $I = [\alpha, \beta]$ i pretpostavimo da su funkcije $\varphi : I \to \mathbb{R}$ i $\psi : I \to \mathbb{R}$ neprekidne na domenu. Preslikavanje $\Gamma : I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, zadato pomoću

$$t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))\,, t \in [\alpha, \beta]\,,$$

nazivamo *putanjom.* Tačka $P\,(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ je početak putanje, a tačka $K\,(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ je kraj putanje. Putanja je *zatvorena* ako je $P \equiv K$.

Ako je $\Gamma : I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektivno preslikavanje, onda putanju Γ zovemo *prostom putanjom.* Putanja Γ je *zatvorena prosta putanja* ako je zatvorena a restrikcija $\Gamma\big|_{[\alpha,\beta)}$ injekcija. Grafik $G_\Gamma = \{(\varphi(t),\psi(t))\,|t \in [\alpha,\beta]\}$ nazivamo *krivom putanje*, bez obzira kakava je putanja, a ako je bitno onda ćemo naglasiti i kakve putanje.
Za prostu krivu, definiranu prostom putanjom $\Gamma : I \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $G_\Gamma = \{(\varphi(t),\psi(t))\,|t \in [\alpha,\beta]\}$, kaže se, takođe, da je parametrizirana parametrom t. U takvim slučajevima, kažemo da je kriva G_Γ zadata parametarskim jednačinama

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta. \tag{22}$$

Neka je dat skup tačaka

$$\{(\varphi(t),\psi(t))\,|t \in \Delta\}, \qquad (*)$$

gdje je $\Delta \subset \mathbb{R}$ neki razmak. Ovaj skup tačaka nije obavezno prosta kriva. Sa druge strane, često je moguće razmak Δ podijeliti na podsegmente $[\alpha_{i-1},\alpha_i]$, tako da su

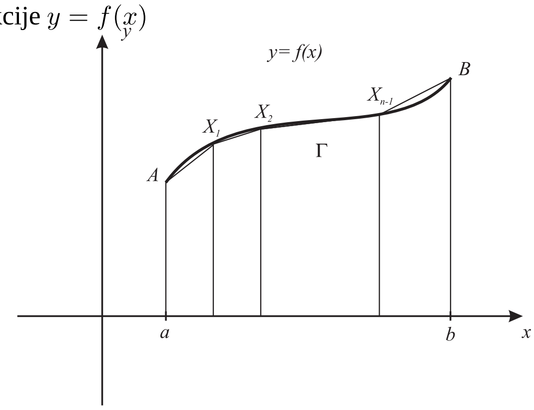
$$\Gamma_i : [\alpha_{i-1},\alpha_i] \to \mathbb{R}^2, \Gamma_i = \Gamma\big|_{[\alpha_{i-1},\alpha_i]}\ ,$$

proste putanje. Još više, podjela razmaka je takva da je $\Delta = \bigcup\limits_i [\alpha_{i-1},\alpha_i]$, a presjek podsegmenata može sadržavati samo krajnju tačku, pa se pomenuti skup tačaka (*) svodi na krivu, koja je po djelovima prosta kriva. Neka je data kriva Γ u ravni $\mathbb{R}^2$, koja predstavlja grafik neprekidne funkcije $y = f(x), x \in [a,b]$, čiji je početak $A(a, f(a))$, a kraj u tački $B(b, f(b))$.
Neka je, dalje, P $= \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b\}$ podjela segmenta $[a,b]$. Uočimo redom tačke,

$$A = X_0, X_1, \ldots, X_{i-1}, X_i, \ldots, X_n = B;$$

$$X_k(x_k, f(x_k)), k = 0,1,2,...,n \quad ,$$

na grafiku Γ funkcije $y = f(x)$



Označimo sa σ_{P} sumu dušina $d(X_{i-1}, X_i), i = 1, 2, ..., n$, svih duži $\overline{X_{i-1}X_i}, i = 1, 2, ..., n$, koje čine izlomljenu liniju (koja, očito, aproksimira krivu Γ), tj.

$$\sigma_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{n} d(X_{i-1}, X_i). \tag{23}$$

Ako $d(\mathrm{P}) = \max_i d(X_{i-1}, X_i) \to 0$ i postoji konačan $\lim\limits_{d(\mathrm{P})\to 0} \sigma_{\mathrm{P}}$, kažemo da se kriva Γ može *rektificirati*, a $L(f; a, b) = \lim\limits_{d(\mathrm{P})\to 0} \sigma_{\mathrm{P}}$ nazivamo *dužinom* date krive.

Teorem 27. *Neka je za $y = f(x), x \in [a, b]$ prva derivacija $f'(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i $\Gamma = (x, f(x)), x \in [a, b]$. Tada se otvorena kriva $y = f(x), x \in [a, b]$ može rektificirati i dužina krive Γ*
$L(f; a, b)$, izražava formulom

$$L(f; a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{24}$$

Pretpostavimo da je kriva Γ zadata parametarski.

Teorem 28. *Neka su $\varphi(t) i \psi(t), \alpha \le t \le \beta$, funkcije čije su prve derivacije neprekidne funkcije na $[\alpha, \beta]$. Tada se kriva Γ, određena jednačinama $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta$ može rektificirati. Još više, ako je $\varphi(\alpha) = a i \varphi(\beta) = b$, tj. $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b] \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, njena dužina $s(\Gamma)$ iznosi*

$$s(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Neka funkcija $y = f(x), x \in [a, b]$ zadaje krivu G_f, pri čemu su f' i f'' neprekidne na $[a, b]$. Uočimo dvije tačke

$$M(x, f(x)), M_1(x + h, f(x + h)) \in G_f$$

i povučene tangente u tim tačkama na G_f, čiji su uglovi sa osom Ox, redom α i α_1 ; označimo sa

$$\Delta\alpha = \alpha(x) - \alpha_1(x_0), x_0 = x + h.$$

Neka je, još označeno sa Δs dužina luka krive G_f koji spaja tačke M_1 i M ; slika (6.4).
Definicija 12. *Količnik $^{\Delta\alpha}/_{\Delta s}$ nazivamo **srednjom krivinom krive** G_f, na luku. Ako postoji konačan limes*

$$K = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

*on se naziva **krivinom krive** G_f u njenoj tački M.*
*Recipročnu vrijednost modula krivine $|K|$ krive G_f zovemo **poluprečnikom krive** G_f u zadatoj tački.*

Ako kriva ima K $= 0$, onda je poluprečnik krive, po definiciji $+\infty$.
Pokazuje se da krivinu krive G_f, pri već ustanovljenim pretpostavkama za funkciju f, u zadatoj tački $M_0(x_0, f(x_0))$ možemo izraziti formulom

$$K(x_0) = \frac{f''(x_0)}{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^{3/2}}. \tag{25}$$

Da bismo to pokazali, najprije primijetimo da je

$$\Delta\alpha = \alpha(x) - \alpha(x_0) = \alpha'(\xi)\,(x - x_0)\,, \xi \in (x_0, x)\,;$$

gdje egzistencija takve tačke $\xi \in (x_0, x)$ (ili $\xi \in (x, x_0)$, svejedno), slijedi iz teorema o srednjoj vrijednosti u diferencijalnome računu.
Sa druge strane, iz $tg\,(\alpha(x)) = f'(x)$, slijedi da je

$$\alpha(x) = arctg\,(f'(x))\,. \tag{26}$$

Derivacijom iz (26) slijedi

$$\alpha'(x) = \frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)}.$$

Prema tome,

$$\Delta\alpha = \alpha'(\xi)\,(x - x_0) = \frac{f''(\xi)}{1 + f'^2(\xi)}\,(x - x_0)\,, \xi \in (x_0, x)\,. \tag{27}$$

Dužina luka $= \Delta s$ može se izraziti pomoću

$$\Delta s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt.$$

Osim toga funkcija $\sqrt{1 + f'^2(t)}$ je očigledno neprekidna, pa primjenom teorema 13 možemo obezbijediti $\tau \in (x_0, x)$, takav da je

$$\Delta s = (x - x_0)\,\sqrt{1 + f'^2(\tau)}. \tag{28}$$

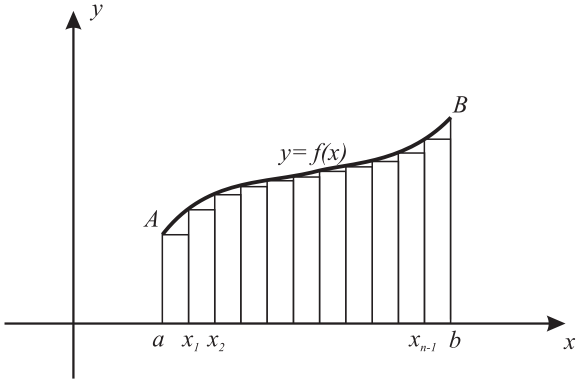
Iz (27) i (28), slijedi da je

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{f''(\xi)}{1 + f'^2(\xi)} \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(\tau)}}, \quad \xi, \tau \in (x_0, x)\,. \tag{29}$$

Nije teško uočiti da čitav lanac graničnih procesa nastaje, kada dozvolimo da tačka $M \to M_0$, duž krive Γ. Naime tada $\Delta s \to 0$, drugim riječima: ako $x \to x_0$, onda $\xi, \tau \to x_0$ (sa lijeve ili desne strane, svejedno). Ako sada u (29) pređemo na limes dobićemo

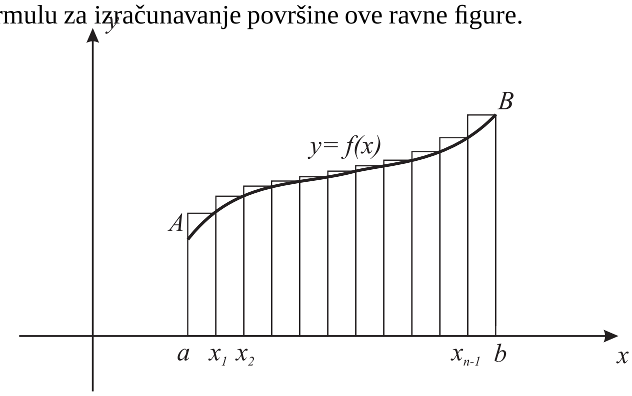
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f''(\xi)}{1 + f'^2(\xi)} \lim_{\tau \to x_0} \frac{1}{(1 + f'^2(\tau))^{\frac{1}{2}}} = \frac{f''(x_0)}{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}} = K(x_0),$$

dakle, formulu (25).



Površine ravnih likova.

Pretpostavimo da $y = f(x), x \in [a, b]$, gdje je f nenegativna i neprekidna funkcija, ima grafik kao na slici (6.5).
Figura D_{ABba} u ravni Oxy, ograničena dijelovima pravih $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i zadatom krivom G_f, zove se *krivolinijski trapez*.
Izvedimo formulu za izračunavanje površine ove ravne figure.



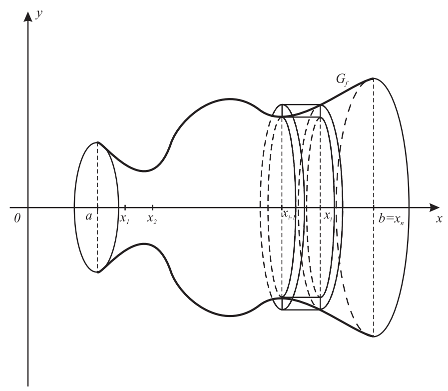
Neka je $\mathrm{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ podjela segmenta $[a, b]$; označimo dalje $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ i $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.
Tada će donja Darbouxova suma $s(f, \mathrm{P})$ biti jednaka zbiru svih površina upisanih pravougaonika u figuru D_{ABba}, čije su visine m_i, kao na slici 6.5. Sa druge strane, gornja Darbouxova suma $S(f, \mathrm{P})$ biće jednaka sumi površina opisanih pravougaonika, čije su visine M_i, kao na slici (6.6). Budući da je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, jer je neprekidna, to za zadato $\varepsilon > 0$ postoji podjela P segmenta $[a, b]$, tako da je $S(f, \mathrm{P}) - s(f, \mathrm{P}) < \varepsilon$, odnosno krivolinijski trapez je mjerljiva figura, a njegova površina je

$$P\left(D_{ABba}\right) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{30}$$

Isto tako, ako je $f(x) \leq 0$, na segmentu $[a, b]$, gdje je i neprekidna, lako dobijamo da je $P(D_{ABba}) = -\int\limits_a^b f(x)dx$ (primjenom formule (30) na nenegativnu funkciju $g(x) = -f(x)$).
Jednako tako, treba primijetiti da se formula (30) može primijeniti na sve funkcije koje su integrabilne na $[a, b]$, što ostavljamo da čitalac pokaže za vježbu. ***Primjer 37.***

Izračunati površinu lika omedjenog krivim $y = x^2 - 3x + 2$ i $y = -2x^2 + 2x + 4$.

Zapremina rotacionih tijela.
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ neprekidna funkcija.
Ako se krivolinijski trapez, omeđen segmentom $[a, b]$ pravim $x = a$ i$x = b$ i krivom $y = f(x)$, okreće oko $Ox-$ ose, dobija se obrtno tijelo $T_{[a,b],Ox}$, kao na slici.



Zapreminu datog rotacionog tijela $T_{[a,b],Ox}$ računamo pomoću

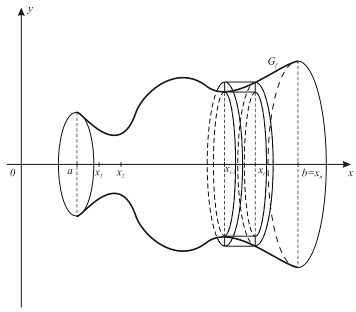
$$V(T) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \quad \text{(X)}$$

Pored toga, može se pokazati da ako se krivolinijski trapez omeđen segmentom $[a, b]$, pravim $x = a$ i $x = b$ i krivom $y = f(x)$, glatke monotone (na $[a, b]$) funkcije f rotira oko $Oy-$ose (v. sliku 6.8,b),
formula za računanje zapremine dobijenoga tijela je

$$V(T, Oy) = 2\pi \int\limits_a^b xf(x)dx. \quad \text{(Y)}$$

Neka sada, kriva zadata jednačinama

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta],$$



rotira oko $x-$ ose. Zapremina $V(T)$ obrtnoga tijela dobija se po formuli (vidi teorem 16, formula (24))

$$V(T) = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\varphi'(t)dt.$$

Površina rotacionih površi.
Ako bismo trebali izračunati površinu rotacione površi $T_{[a,b],Ox}$, koja nastaje rotacijom krive $y = f(x), x \in [a, b]$ (vidi sliku (6.8)), nužno je, ustvari, odrediti formulu za izračunavanje površine omotača obrtnoga tijela koje smo već razmatrali kod računanja zapremine. Osnove rotacionog tijela, dva kruga (jedan poluprečnika $f(a)$, a drugi poluprečnika $f(b)$), koji nastaju rotacijom dvije duži (jedna spaja tačke $(a, 0)$ i $(a, f(a))$; druga tačku $(b, 0)$ sa $(b, f(b))$) ne smatraju se sastavnim dijelom rotacione površi čiju površinu želimo odrediti.   Površina omotača rotacionog tijela se izračunava pomoću formule

$$S(f; [a, b]) = 2\pi \int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ako je kriva, koja rotira oko ose, zadata parametarski u formi

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

obrazac za površinu S je

$$S(\varphi, \psi; [\alpha, \beta]) = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \qquad (31)$$