1 Uvod

1.1 Organizacija

Organizacija

Vedad Pašić

Kabinet: PMF 313

Email: vedad.pasic@untz.ba - preferirani metod komunikacije

Web: http://www.frontslobode.org/vedad/mmf/

- Imat ćemo 2h predavanja (utorak 10-12) i 2h vježbi
- Imat ćemo sedmične problemske zadaće u dogovoru s asistentom.
- ...rad na zadaći se *jako preporučuje*!
- Kabinetski sati: utorak i četvrtak 12-13

Literatura

1. J Matthews, R L Walker: *Mathematical Methods of Physics*; Addison-Wesley publishing (1969)
2. M Reed, B Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 1-4*; Academic Press (1980)
3. K F Riley, M P Hobson: *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*, Cambridge University Press (2002)
4. C J Isham: *Modern Differential Geometry for Physicists*; World Scientific Lecture Notes in Physics, (1999)

Manifest

Naša misija: Prikazati objedinjeno što je moguće više matematičkih metoda u modernoj fizici.

Jako mnogo matematike se tokom studija radi bez osvrta na konkretnu problematiku gdje se konkretno iskoristi. Veza izmedju matematike i fizike je intrinzična, a razlika izmedju ove dvije nauke je i donekle umjetno stvorena - matematika i fizika su oduvijek vezane jedna za drugu i jedna drugu nadopunjuju, inspiriraju, forsiraju i guraju ka progresu. Nebrojeno je mnogo primjera gdje je fizikalna potreba dovela do velikih matematičkih pronalazaka i obratno.

Mi ćemo u ovom kursu pokušati povezati što je više moguće dosadašnjeg znanja iz matematiku sa konkretnim fizikalnim problemima.

Manifest

Kakav će ovaj predmet biti: Ovo će biti "metodski" kurs, koji se neće baviti toliko dokazima teorema, koliko njihovom primjenom. Medjutim, biće dosta definicija, teorema, propozicija koje možda niste vidjeli, ali su vezane za mnoge matematičke grane koje ste do sada imali priliku vidjeti.

Pokušat ćemo pokriti u metodskom smislu većinu direktno primjenjivih matematičkih grana, no možda će u tomu biti i nešto iznenadjujućih oblasti za sve! Predznanje:

- Linearna algebra i teorija grupa, algebri i prstena;
- Diferencijalna geometrija;
- Obične diferencijalne jednačine;
- Parcijalne diferencijalne jednačine;
- Hilbertovi i Banachovi prostori.

1.2 Program

Program

Program kao takav će rasti kako kurs bude napredovao, no sigurno će se sastojati od:

- Primjene običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina;

- Integrala i integralnih trasformacija;
- Problema svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija;
- Teorija perturbacija;
- Varijacionog računa (osnovnog);
- Tenzorske analize i diferencijalne geometrije;
- Teorije grupa i grupnih reprezentacija;
- itd.

2 Diferencijalne jednačine

Obične diferencijalne jednačine

Čitav problem izvoda kao takvih je naravno izrastao iz potreba fizikalne prirode - u 17. stoljeću, Europski matematičari kao što su Isaac Barrow, René Descartes, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, John Wallis i drugi su diskutovali ideju izvoda.

Kokretno, u djelima “Methodus ad disquirendam maximam et minima” i “De tangentibus linearum curvarum”, Fermat je razvio metodu pomoću koje su se mogli odrediti maksimumi, minimumi i tangente različitih krivih, koja je u stvari bila ekvivalentna diferenciranju.

Naravno, tek djelo *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* Isaaca Newtona se smatra pravim početkom analize, iako je ostalo neobjavljeno za njegovog života. Naravno, *kalkulus* kao takav je izrastao pod paskom Newtona i Leibniza. Newton je to kalkulusa došao tokom istraživanja fizike i geometrije, te je kalkulus smatrao naučnim opisom stvaranja kretanja i veličina. U suprotnosti, Leibniz se fokusirao na problem tangenti i smatrao je da je kalkulus metafizično objašnjenje promjene.

Sve ove metode koje su nezavisno jedan od drugoga razvili Newton i Leibniz su naravno proistekle iz potrebe modernih naučnika za novim alatima kojima mogu riješiti probleme iz fizike, pogotovu u oblastima mehanike i optike.

Diferencijalne jednačine

Diferencijalne jednačine su počele sa Lebnizom, braćom Bernoulli i drugima od 1680tih godina, ne zadugo od Newtonovih ‘fluksionalnih jednačina’ iz 1670tih.

1676 god. Isaac Newton je riješio svoju prvu diferencijalnu jednačinu, dok je 1693. god. Gottfried Leibniz rijšio svoju prvu diferencijalnu jednačinu i te iste godine Newton objavljuje svoje prethodne rezultate metoda riješavanja diferencijalnih jednačina i ta godina se općenito uzima kao početak teorije diferencijalnih jednačina kao zasebne matematičke grane. Švicarski matematičari, braća Jacob i Johann Bernoulli su bili među prvim interpretatorima Leibnizove verzije diferencijalnog računa, koji se nisu slagali sa Newtonovim rezultatima i smatrali su ih plagijatima Leibnizovog rada.

Navodno je prva knjiga o diferencijalnim jednačinama bila knjiga talijanskog matematičara Gabrielea Mafredia iz 1707. god. pod naslovom 'O konstrukciji diferencijalnih jednačina prvog reda' (De constructionae aequationum differentialium primi gradus). Većina radova o običnim i parcijalnim diferencijalnim jednačinama objavljenih tokom 18. stoljeća su razvijali Leibnizov pristup, te je teorija značajno uzapredovala zahvaljujući Leonhardu Euleru, Danielu Bernoulliu, Josephu Lagrangeu i Pierreu Laplaceu.

2.1 Obične diferencijalne jednačine

Naše izučavanje ove problematike započet ćemo pregledom metoda za nalaženje rješenja običnih diferencijalnih jednačina u zatvorenoj formi, zatim ćemo posmatrati rješenja u formi stepenih redova, te neke aproksimativne metoda.

Nešto kasnije posmatrat ćemo rješavanje pomoću integralih transformacija, te primjenu Greenove funkcije i metode svojstenih funkcija. Numeričke metode ćemo generalno izbjegavati, jer je tomu posvećen cijeli jedan kurs. Diferencijalne jednačine su, najjednostavnijim riječnikom rečeno, jednačine koje sadrže izvode! Obične diferencijalne jednačine (ODE) kao što samo ime kaže sadrže samo obične izvode, a ne parcijalne i opisuju odnose između ovih izvoda zavisne promjenljive, koju obično označavamo sa x. Rješenje ODE je stoga funkcija od x i obično se označava sa $y(x)$.

Definicija 2.1. Obilna diferencijalna jednačina (n-tog reda) je jednačina oblika

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je x nezavisna promjenljiva, y nepoznata funkcija, a $y', y'', \dots$ su izvodi nepoznate funkcije.

Kako bi ODE imala rješenje zatvorenog oblika, moramo moći izraziti $y(x)$ koristeći se elemetarnim funkcijama od x. Rješenja nekih jednačina se ne mogu napisati u takvoj formi, no tada se možda mogu zapisati na neki drugačiji način.

Očito, obične diferencijalne jednačine mogu se podijeliti na zgodan načina u različite kategorije, prema njihovim karakteristikama. Primarno grupiranje koje koristimo je prema redu jednačine. Red jednačine je jednostavno najveći red izvoda koji se pojavljuje u jednačini. Takodjer, možemo podijeliti ODE prema stepenu - tj. prema stepenu na koji je izvod najvećeg reda dignut nakon racionalizacije jednačine.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\sqrt{\frac{dy}{dx}} + x^2 + y = 0$$

je trećeg reda i drugog stepena, jer se nakon racionalizacije pojavljuje $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2$.

Prvo ćemo se prisjetiti nekih metoda za rješavanje ODE prvog reda. tj. rješavat ćemo problem

$$y' = f(x, y) \ , \tag{1}$$

sa početnim (inicijalnim) uslovom $y(x_0) = y_0$.

Jednačina sa razdvojenim promjenljivima

To je jednačina kod koje se u (1) desna strana može napisati kao proizvod dviju funkcija od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj. jednačina koja ima formu

$$y' = f(x)g(y) \ . \tag{2}$$

Sljedećim teoremom dati su uslovi za postojanje i jedinstvenost rješenja jednačine (2).

Teorema 2.2. *Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu (a, b) i neka je funkcija $g(y)$ neprekidna i različita od nule na intervalu (c, d). Tada postoji jedinstveno rješenje jednačine (2) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$) i definisano je u nekoj okolini tačke x_0.*

Primjer 2.3. *Riješiti jednačinu: $xy' = \frac{y}{y+1}$.Jednačinu dovodimo u oblik*

$$y' = \frac{y}{x(y+1)} \ ,$$

iz koga uočavamo da je data jednačina sa razdvojenim promenljivima ($f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = \frac{y}{y+1}$). Razdvajamo promjenljive koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{(y+1)dy}{y} = \frac{dx}{x} \ .$$

Sada integralimo posljednju jednačinu i rješavanjem integrala na lijevoj i desnoj strani dobijamo rješenje diferencijalne jednačine, $y + \ln y = \ln x + C$.

Primjer 2.4. *Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine* $y' = 6y^2x$ *koje zadovoljava uslov* $y(1) = \frac{1}{25}$.

Data diferencijalna jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima. Zato prvo razdvojimo promjenljive

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6y^2x \iff \frac{dy}{y^2} = 6xdx \ .$$

Nakon integriranja posljednje jednakosti

$$\int y^{-2}dy = 6\int xdx \ ,$$

dobijamo

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + C \ ,$$

odnosno, rješenje diferencijalne jednačine je

$$y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C} \ ,$$

gdje je C proizvoljna realna konstanta. Za razne C imamo različite funkcije rješenja, što je prikazano na Slici 1.

Naći ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$, znači od svih funkcija izabrati onu za koju je C odredjen ovim uslovom, tj.

$$\frac{1}{25} = -\frac{1}{3 + C} \ ,$$

odakle nakon kraćeg računa dobijamo $C = -28$, čiji je graf dat na Slici 3.

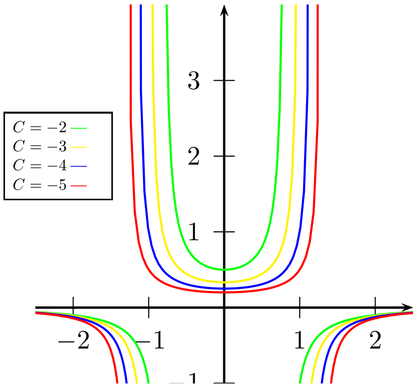
Homogena jednačina

Za funkciju $f(x, y, \ldots)$ kažemo da je homogena stepena r ukoliko je

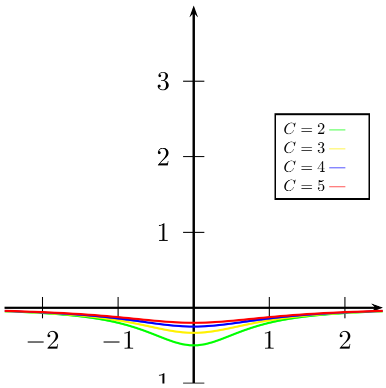
$$f(ax, ay, \ldots) = a^r f(x, y, \ldots).$$

Homogena jednačina je jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \ , \qquad (3)$$



Slika 1: Grafovi rješenja za $C < 0$



Slika 2: Grafovi rješenja za $C > 0$

gdje je f neprekidna funkcija u nekom intervalu (a, b). Datu jednačinu riješavamo smjenom

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \ ,$$

odakle se nalaženjem izvoda po x ima

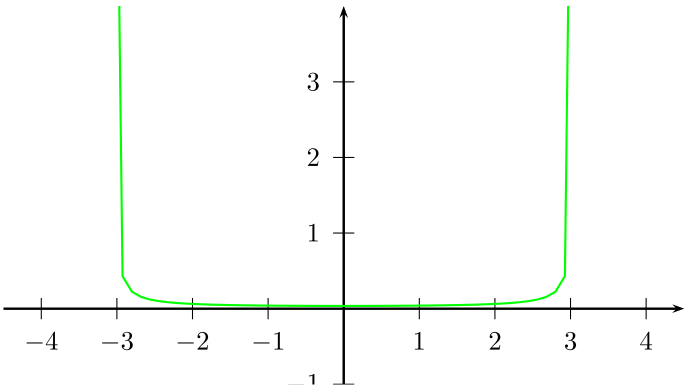
$$y'(x) = u'(x)x + u(x) \ .$$

Ubacujući posljednje dvije jednakosti u jednačinu (3), dobijamo jednačinu

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

koja predstavlja jednačinu sa razdvojnim promjenljivima.

Primjer 2.5. *Riješiti diferencijalnu jednačinu:* $y' = \frac{x+y}{x-y}$. *Prvo uočimo da desnu*



Slika 3: Graf funkcije $y(x) = -\frac{1}{3x^2-28}$

stranu date jednačine možemo trnsformisati, tj.

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \ ,$$

odakle je očigledno da je data jednačina homogena. Sada uvodimo smjenu

$$u = \frac{y}{x} \ \ , \ \ y' = u'x + u \ .$$

Polazna jednačina sada dobija oblik

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \ ,$$

odnosno

$$u' = \frac{2u}{x(1-u)} \ .$$

Posljednja jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima, čijim rješavanjem prema ranije izloženom postupku dobijamo

$$\frac{1}{2}(\ln u - u) = \ln x + C \ ,$$

odnosno, vraćajući smjenu

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) = \ln x + C \ .$$

Primjer 2.6. *Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine*

$$y' = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x} \ ,$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 2$. *Nakon smjene* $u = \frac{y}{x}$, *odakle je* $y' = u'x + u$, *dobijamo diferencijalnu jednačinu po* u

$$u'x = \frac{2}{u} ,$$

a to je jednačina sa razdvojenim promjenljivima

$$udu = \frac{2dx}{x} .$$

Integraleći ovu jednačinu dobijamo

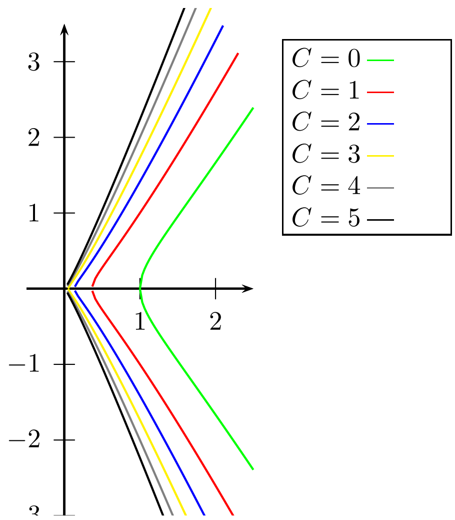
$$\frac{u^2}{2} = 2(\ln x + C) ,$$

odnosno, rješenje po u je

$$u(x) = \pm 2\sqrt{\ln x + C} .$$

Vraćajući se na polaznu funkciju y, imamo

$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln x + C} .$$



Slika 4: Grafik funkcije $y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln x + C}$

Koristeći uslov $y(1) = 2$, jasno je da od gornja dva rješenja koristimo ono sa znakom $+$, a onda dobijamo jednačinu po C

$$2\sqrt{C} = 2 ,$$

odakle je $C = 1$. Dakle rješenje zadatka je funkcija

$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln x + 1}\ .$$

Ideju rješavanja iz prvog primjera primjenjujemo generalno na rješavanje diferencijalnih jednačina oblika

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy}\ .$$

Medjutim, ako imamo jednačinu oblika

$$y' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\ , \tag{4}$$

jasno je da gornja ideja nije primjenljiva. Ali i ovakve jednačine rješavamo na sličan način, prvo ih transformišući sljedećim smjenama.

$$x = u + \alpha\ \ ,\ \ y = v + \beta\ ,$$

gdje su α i β proizvoljni realni brojevi. Uvrštavajući ove smjene u jednačinu (4), dobijamo

$$y' = \frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{du + ev + d\alpha + e\beta + f}\ . \tag{5}$$

Povoljnim izborom za α i β, tj. birajući ih tako da bude zadovoljen sistem

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0 \\ d\alpha + e\beta + f &= 0\ , \end{aligned}$$

jednačina (4) prelazi u poznati nam oblik jednačine. Naravno, sistem iz koga odredjujemo vrijednosti za α i β će imati rješenje ako je njegova determinanta različita od nule, tj. ako vrijedi uslov $ae - bd \neq 0$.

Linearna jednačina

Diferencijalnu jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x)\ , \tag{6}$$

gdje su f i g proizvoljne neprekidne funkcije, nazivamo *linearna diferencijalna jednačina*.

Posmatrajmo sljedeću tehniku nalaženja rješenja jednačine (6), neočekivana ali jako korisna. Pomnožimo nekom funkcijom $\mu(x)$ jednačinu (6) dakle,

$$\mu(x)y' + \mu(x)f(x)y = \mu(x)g(x)\ . \tag{7}$$

Neočekivanu ulogu ove funkcije $\mu(x)$, kakva god ona bila, pojačajmo i zahtjevom

$$\mu(x)f(x) = \mu'(x) \ . \tag{8}$$

Stavljajući (8) u (7), dobijamo

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)g(x) \ , \tag{9}$$

i primjećujemo da je tada izraz na lijevoj strani izvod proizvoda, tj.

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = (\mu(x)y)' \ , \tag{10}$$

te stavljajući (10) u (9), dobijamo

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x) \ . \tag{11}$$

Integrirajmo sada jednačinu (11), imamo

$$\int (\mu(x)y)'dx = \int \mu(x)g(x)dx \ ,$$

odnosno, primjenjujući poznato pravilo za neodredjeni integral, slijedi

$$\mu(x)y + C = \int \mu(x)g(x)dx \ . \tag{12}$$

Kako nam je cilj naći funkciju $y(x)$, onda iz (12) lagano računamo

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + C}{\mu(x)} \ , \tag{13}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je konstanta integracije C nepoznata, pa smo njen zapis na desnoj strani, jednostavnosti radi, zapisali sa $+C$, a ne kako bi račun dao sa $-C$. Posljednom jednačinom mi smo dobili rješenje jednačine (6). Ostaje "samo" da se odgonetne, a šta je ona neočekivana funkcija $\mu(x)$. Iz jednačine (8) imamo

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = f(x) \iff (\ln \mu(x))' = f(x) \ .$$

Opet, integrirajući posljednju jednakost, dobijamo

$$\ln \mu(x) + D = \int f(x)dx \ ,$$

pa po istom principu kao malo prije, možemo pisati

$$\ln \mu(x) = \int f(x)dx + D \ .$$

Eksponencirajući obje strane posljednje jednakosti, i koristeći pravila stepenovanja, imamo

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx + D} = e^D e^{\int f(x)dx} \ .$$

Kako je i e^D konstanta, ne gubeći na opštosti, konačno imamo

$$\mu(x) = De^{\int f(x)dx} , \tag{14}$$

i uobičejeno se ovakve funkcije sa ovakvom ulogom nazivaju *integracioni faktor*. Stavljajući (14) u (13), slijedi

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\int De^{\int f(x)dx} g(x) + C}{e^{D\int f(x)dx}} \\ &= e^{-\int f(x)dx} \left(\int e^{\int f(x)dx} g(x) + \frac{C}{D} \right) , \end{aligned}$$

pa konačno uzimajući da je $\frac{C}{D}$ nova konstanta C, dobijamo krajnji oblik rješenja jednačine (6)

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(\int e^{\int f(x)dx} g(x) + C \right) .$$

Sve ovo gore rečeno iskazujemo tvrdjenjem

Teorema 2.7. *Neka su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na intervalu (a, b). Tada postoji jedinstveno rješenje jednačine (6) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$) i definisano je u (a, b). Rješenje jednačine je dato sa*

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx} \left(C + \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx \right)$$

Primjer 2.8. *Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' + xy - x^3 = 0$ i odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.*

Dovedimo jednačinu na zahtijevani oblik

$$y' + xy = x^3 .$$

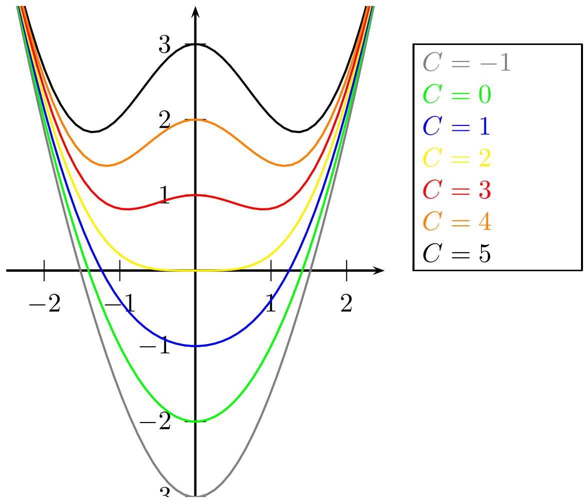
To je linearna jednačina kod koje je $f(x) = x$ i $g(x) = x^3$. Sada je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int xdx} \left(C + \int x^3 e^{\int xdx} dx \right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(C + (x^2 - 2) e^{\frac{x^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

Postavljeni uslov daje nam jednačinu po C

$$1 = 1 \cdot (C + (0 - 2) \cdot 1) ,$$

iz koje dobijamo $C = 3$, a to je graf obojen crvenom bojom na Slici 5.



Slika 5: Grafik funkcije $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + (x^2-2)e^{\frac{x^2}{2}}\right)$

Bernoullijeva jednačina

To je jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha}\ , \tag{15}$$

gdje je α proizvoljan realan broj različit od 0 i od 1 (u oba ova slučaja jednačina (15) bi se svela na linearnu jednačinu). Jednačinu (15) riješavamo smjenom

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}\ ,$$

odakle se dobija

$$z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x)\ .$$

Iz posljednje dvije jednakosti lako se dobija

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}\quad ,\quad y' = \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'$$

čijim uvrštavanjem u (15) i elementarnim računom imamo

$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x)\ ,$$

tj. linearna jednačina po z.

Primjer 2.9. *Riješiti diferencijalnu jednačinu:* $y' - y = xy^2$.

Data jednačina je Bernoullijeva jednačina sa $\alpha = 2$*, pa uvodimo smjenu*

$$z = y^{1-2} = y^{-1}\ .$$

Sada računamo potrebne zamjene

$$y = z^{-1} \ , \ \ y' = -z^{-2} z'$$

čijim uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo

$$-z^{-2} z' - z^{-1} = x z^{-2} \ .$$

Množenjem posljednje jednakosti sa $-z^2$ imamo

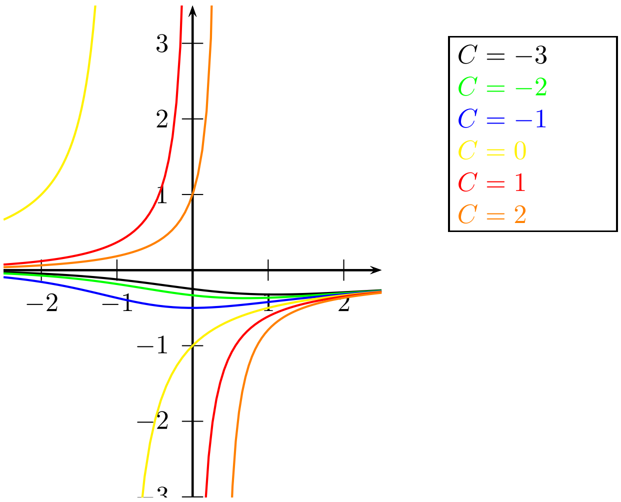
$$z' + z = -x \ ,$$

a to je linearna jednačina čije je rješenje

$$z = e^{-x}(C - (x+1)e^x) \ ,$$

odakle vraćajući se na polaznu funkciju y imamo

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C - (x+1)e^x)} \ .$$



Slika 6: Graf funkcije $y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C-(x+1)e^x)}$

Jednačina totalnog diferencijala

Opšta jednačina prvog reda u normalnom obliku

$$y' = f(x, y)$$

koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$, može se pisati u obliku

$$dy - f(x,y)dx = 0 \ ,$$

što predstavlja specijalan slučaj jednačine

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ . \tag{16}$$

Ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je lijeva strana u (16) totalni diferencijal te funkcije u nekoj oblasti, tj. da važi

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ ,$$

pri čemu je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \text{ i } \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \ ,$$

onda jednačinu (16) nazivamo *jednačina totalnog diferencijala*. Ako postoji funkcija $F(x,y)$ sa navedeim osobinama, onda zbog (16), tj. $dF(x,y) = 0$, vrijedi

$$F(x,y) = c \ \ , \ \ c \text{ konstanta} \ . \tag{17}$$

Jednakošću (17) je implicitno definisana funkcija $y = g(x)$ na nekom intervalu, i na tom intervalu je ta funkcija rješenje jednačine (16).

Napomenimo, da bi funkcija (17) definisala diferencijabilnu funkciju $y = g(x)$, funkcija F, tj. funkcije P i Q moraju zadovoljavati uslove teorema o implicitnoj funkciji. Ostaje nam još odgovoriti na dva pitanja. Prvo, kako ustanoviti da lijeva strana u (16) jeste totalni diferencijal neke funkcije, i drugo, ako znamo da lijeva strana jeste totalni difernecijal neke funkcije, kako odrediti tu funkciju.

Potsjetnik - linijski integral II vrste

Krivolinijski integral druge vrste u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se vrši integracija. Medjutim, to nije uvijek slučaj.

Ukoliko izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y,z)$, onda integral vektora $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ po luku $L = AB$ zavisi samo od tačaka A i B, a ne i od linije kojom su te tačke povezane.

Teorema 2.10. *Neka je u oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija*

$$\overrightarrow{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \ .$$

Tada su sljedeća tvrdjenja ekvivalentna:

- *Postoji funkcija $u(x,y,z)$ sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima, definisana u oblasti V, takva da je*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z) \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \ , \ \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \ .$$

- Krivolinijski integral druge vrste $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ po putanji $AB \subset V$, gdje su $A(x_0, y_0, z_0)$ i $B(x_1, y_1, z_1)$ početna, odnosno krajnja tačka te putanje, ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka A i B. Pri tome vrijedi

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0) \, .$$

- Krivolinijski integral

$$\oint_c Pdx + Qdy + Rdz$$

  po proizvoljnoj zatvorenoj putanji $c \subset V$ jednak je nuli.

Na osnovu gornjeg teorema jasno je da se problem izračunavanja krivolinijskog integrala druge vrste, kada on ne ovisi o putu integracije, svodi na raspoznavanje kada je podintegralna funkcija totalni diferencijal neke vektorske funkcije. Zato nam je od interesa dati još neki kriterijum za takvo "raspoznavanje".

Definicija 2.11. Za oblast $V \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je prosto povezana ako se svaka zatorena dio-po-dio glatka kriva $c \subset V$, može "stegnuti" u proizvoljnu tačku $M_0 \in c$, ostajući pri tome u oblasti V.

Strogu matematičku formulaciju pojma "stegnuti" ovdje nećemo razmatrati. Neka on ostane u domenu intuitivnog ali navedimo neke primjere prosto povezanih i nepovezanih oblasti.

Unutrašnjost proizvoljnog kruga i kvadrata su prosto povezane oblasti u $\mathbb{R}^2$, ali krug bez svog centra to nije.

U $\mathbb{R}^3$ primjer prosto povezane oblasti su lopta i kocka, takodje i oblast ograničena dvjema koncentričnim sferama. Torus je primjer oblasti u $\mathbb{R}^3$ koja nije prosto povezana.

Teorema 2.12. *Neka je u prosto povezanoj oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekdna vektorska funkcija $\overrightarrow{v} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ koja ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial R}{\partial y}$.*

Potreban i dovoljan uslov da integral $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$, $AB \subset V$, ne zavisi od putanje AB, jeste da su ispunjeni uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \, , \; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \, , \; \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \, .$$

Primjer 2.13. *Izračunati:*

$$\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \, ,$$

po putanji c koja predstavlja kručnicu $(x-3)^2 + y^2 = 1$.

Kako su $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ *i* $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ *neprekidne u oblasti ograničenoj krivom* c *i kako su*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

i uz to neprekidne funkcije u istoj oblasti, to na osnovu Teorema 2.10 zaključujemo da je dati integral jednak 0.

Primjer 2.14. *Izračunati:*

$$\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \ ,$$

po putanji c *koja predstavlja kručnicu* $x = a\cos t$*,* $y = a\sin t$*,* $t \in [0, 2\pi]$*.Za razliku od gornjeg primjera, ovdje su funkcije* P, Q*,* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *i* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *neprekidne u svim tačkama oblasti ograničenom krivom* c *osim u tački* $(0,0)$*, ali oblast datog kruga bez tačke* $(0,0)$ *nije prosto povezana pa se ne možemo pozvati na prethodne dvije teoreme. Zato sada imamo*

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \right.\\ \left. + \frac{a\cos t}{a^2} a\cos t \right) dt &= 2\pi \ .\end{aligned}$$

2.2 Greenova formula

Veza izmedju dvojnog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti data je poznatom *Greenovom formulom*. Uočimo prostu zatvorenu krivu $c \subset \mathbb{R}^2$ koja ograničava oblast D.

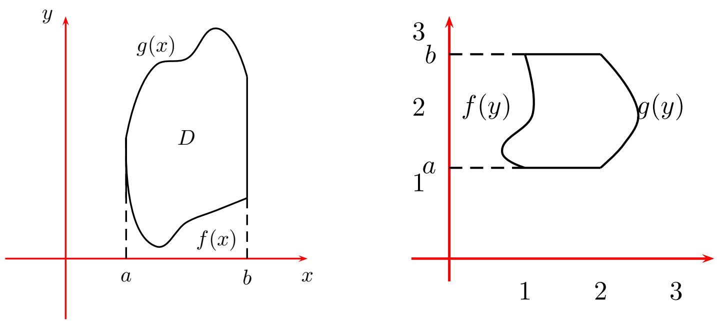
Ako se c sastoji od dijelova grafika dviju neprekidnih funkcija f i g, definisanih na $[a,b]$ i takvih da je $f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a,b]$, i eventualno dijelova pravih $x = a$ i $x = b$, onda ćemo oblast D nazvati elementarnom oblašću u odnosu na osu Ox.

Na sličan bi način definisali elementarnu oblast u odnosu na osu Oy. Oblasti koje su elementarne u odnosu na obje ose zovemo prosto elementarnim oblastima.

Teorema 2.15 (Greenova teorema)**.** *Neka je* $D \subset \mathbb{R}^2$ *oblast ograničena dio-po-dio glatkom krivom* c*. Ako su funkcije* $P(x,y)$ *i* $Q(x,y)$ *neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima* $\frac{\partial P}{\partial y}$*,* $\frac{\partial Q}{\partial x}$*, na zatvorenoj oblasti* $\overline{D}$*, tada važi jednakost*

$$\oint_{c^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \ . \qquad (18)$$

Pri tome, oznaka c^+ *u krivolinijskom integralu označava da se integracija vrši u smjeru pri kome tačke oblasti* D *uvijek ostaju s lijeve strane u odnosu na kretanje.*



(a) Elementarna oblast u odnosu na Ox (b) Elementarna oblast u odnosu na Oy

Slika 7:

Teorema 2.16. *Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne funkcije u prosto povezanoj oblasti D. Da bi jednačina (16) bila jednačina totalnog diferencijala neophodno je i dovoljno da za svako $(x,y) \in D$ vrijedi*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ . \tag{19}$$

Pri tome, funkcija $F(x,y)$ čiji je to totalni diferencijal data je sa

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt\ ,$$

gdje je (x_0, y_0) proizvoljna tačka oblasti D.

Postavlja se pitanje šta učiniti ako uslov (19) nije ispunjen pa jednačina (16) nije jednačina totalnog diferencijala?Jedan od načina da se prevazidje taj problem jeste pronaći eventualno funkciju $h(x,y)$, različitu od nule, takvu da jednačina

$$h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. Funkcija $h(x,y)$, ukoliko postoji, naziva se *ntegracioni množitelj*. Potreban i dovoljan uslov za njeno postojanje imamo na osnovu iskazanog teorema, tj. mora vrijediti

$$\frac{\partial(hP)}{dy} = \frac{\partial(hQ)}{dx}\ ,$$

odnosno, nakon izračunavanja ovih parcijalnih izvoda

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ . \tag{20}$$

Nalaženje integracionog množitelja predstavlja težak problem, čak složeniji i od samog polaznog problema i u opštem slučaju je nerješiv, jer bi u protivnom svaku jednačinu prvog reda $y' = f(x,y)$ mogli riješiti elementarno. Ovdje ćemo dati dva specijalna slučaja kada se integracioni množitelj ipak može eksplicitno izračunati. Ti slučajevi su okarakterisani specijalnim oblikom funkcije h koju tražimo i oni su

1. h je funkcija ovisna samo o promjenljivoj x
2. h je funkcija ovisna samo o promjenljivoj y.

U prvom slučaju, uslov (20) se svodi na jednačinu

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q \ .$$

Ova jednačina ima smisla samo ako je desna strana funkcija samo promjenljive x. Ukoliko je to slučaj, tj.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = u(x) \ ,$$

tada je

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = u(x) \ \text{ pa je } \ h(x) = Ce^{\int u(x)dx} \ .$$

Dakle zbog pojavljivanja konstante C, integracionih množitelja ima beskonačno mnogo, ali u konkretnim situacijama se uzima najprostiji, tj $C = 1$. Identična je situacija za slučaj 2.. Tada, ako je

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = v(y) \ ,$$

onda integracioni množitelj ovisi samo o y i dat je sa

$$h(y) = Ce^{\int v(y)dy} \ .$$

Primjer 2.17. *Riješiti jednačinu: $dy - (y \operatorname{tg} x + \cos x)dx = 0$.*

Provjerom uslova $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ lako utvrdjujemo da polazna jednačina nije jednačina totalnog diferencijala. Ostaje pokušati naći integracioni množitelj. Kako je

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = -\operatorname{tg} x \ ,$$

zaključujemo da integracioni množitelj postoji i da je on funkcija promjenljive x. Prema navedenoj formuli za ovaj slučaj, imamo

$$h(x) = Ce^{-\int \operatorname{tg} x dx} = \cos x \ .$$

Sada je jednačina

$$\cos x dy - \cos x(y \operatorname{tg} x + \cos x)dx = 0$$

jednačina totalnog diferencijala, i njeno je rješenje je dato sa

$$F(x,y) = -\int_{x_0}^{x} (y \operatorname{tg} t + \cos t)\cos t dt + \int_{y_0}^{y} \cos x dt \ ,$$

tj.

$$F(x,y) = \frac{y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2x_0) + 2y_0\cos x_0}{2\cos x}$$

2.3 Linearne jednačine višeg reda

Linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Opšti oblik linearne jednačine n-tog reda je

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \ ,$$

gdje za funkcije $f(x)$ i $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ pretpostavljamo da su neprekidne funkcije na nekom segmentu I.

Mi ćemo se ovdje baviti isključivo linearnim jednačinama višeg reda kod kojih su funkcije $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ konstantne funkcije (realne konstante), tj. razmatraćemo linearne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x) \ .$$

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Kao prvo riješit ćemo homogenu jednačinu, tj. jednačinu

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0 \ . \tag{21}$$

Tražeći rješenje u obliku

$$y(x) = e^{rx} \ ,$$

gdje je $r \in \mathbb{R}$, polazna jednačina postaje

$$(a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n)e^{rx} = 0 \ .$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$, iz posljednje jednačine dobijamo jednačinu

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{22}$$

koju nazivamo *karakteristična jednačina* polazne homogene jednačine. Karakteristična jednačina je polinom stepena n pa ona ima n rješenja r_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Primjetimo da pojedina rješenja mogu biti i kompleksni brojevi. Kako nas zanimaju samo realna to će nam trebati sljedeća tvrdnja koja se lako dokazuje.

Lema 2.18. *Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ rješenje jednačine (21) tada su njen realni i njen imaginarni dio takodje rješenja te jednačine.*

Pod ovim imamo u vidu sljedeće: Ako je $r_k = \alpha + i\beta$, tada je

$$y(x) = e^{r_k x} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) ,$$

pa ako je $y(x)$ rješenje polazne homogene jednačine, tada su to i $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Treba jos naglasiti da ako je jedno od rješenja kompleksan broj $\alpha + i\beta$, tada postoji i rješenje karakteristične jednačine koje je oblika $\alpha - i\beta$.

Pri tome, na osnovu gore rečenog, tom rješenju odgovara rješenje polazne jednačine koje se do na znak razlikuje od rješenja koje dobijemo pomoću rješenja $\alpha + i\beta$ karakteristične jednačine.

Ovo znači da ćemo paru konjugovano-kompleksnih rješenja $\alpha \pm i\beta$ karakteristične jednačine, dodjeljivati jedan par rješenja polazne jednačine, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Teorema 2.19. *Neka su $r_1, r_2, ..., r_s$ različita rješenja karakteristične jednačine (22), višestrukosti $m_1, m_2, ..., m_s$, pri čemu je $m_1 + m_2 + ... + m_s = n$. Tada su funkcije*

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, ..., x^{m_i - 1} e^{r_i x} \ , \ i = 1, 2, ..., s \tag{23}$$

rješenja jednačine (21) i pri tome su ta rješenja linearno nezavisna.

Sa gornjom lemom i teoremom smo načelno opisali sva rješenja jednačine (21).

Primjer 2.20. *Rješiti diferencijalnu jednačinu: $y''' - 3y' + 2y = 0$.*

Rješenja tražimo u obliku $y = e^{rx}$ pa je karakteristična jednačina data sa

$$r^3 - 3r + 2 = (r-1)^2(r+2) = 0 .$$

Različita rješenja ove jednačine su $r_1 = 1$, višestrukosti $m_1 = 2$ i $r_2 = -2$, višestrukosti $m_2 = 1$, dakle ukupno imamo $m_1 + m_2 = 3$ rješenja karakteristične jednačine.

Rješenju $r_1 = 1$ odgovaraju funkcije e^x i xe^x (zbog višestrukosti 2), a rješenju $r_2 = -2$ odgovara funkcija e^{-2x}. Sada je rješenje polazne homogene jednačine dato sa

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x} .$$

Primjer 2.21. *Rješiti diferencijalnu jednačinu:*

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0 .$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$r^6 - 2r^5 + 4r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 2r + 2 = (r^2+1)^2(r^2 - 2r + 2) = 0 .$$

Rješenja karakteristične jednačine su $r_{1/2} = \pm i$, višestrukosti $m_{1/2} = 2$ i $r_{3/4} = 1 \pm i$, višestrukosti $m_{3/4} = 1$. Funkcije koje odgovaraju paru $r_{1/2}$ konjugovano-kompleksnih rješenja su

$$\cos x\ ,\ \sin x\ , x\cos x\ , x\sin x\ ,$$

a funkcije koje odgovaraju drugom paru su

$$e^x \cos x \text{ i } e^x \sin x\ .$$

Rješenje polazne jednačine je dato sa

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x) +$$
$$+ e^x (C_5 \cos x + C_6 \sin x)\ .$$

Primjer 2.22. *Riješiti diferencijalnu jednačinu*

$$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0\ ,$$

a zatim odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov

$$y(0) = 1\ ,\ y'(0) = -2\ ,\ y''(0) = -4\ .$$

Karakteristična jednačina zadate diferencijalne jednačine glasi

$$r^3 - 5r^2 - 22r + 56 = (r+4)(r-2)(r-7) = 0\ ,$$

i njena rješenja su

$$r_1 = -4\ ,\ r_2 = 2\ ,\ r_3 = 7\ .$$

Rješenja su realna i različita (višestrukosti 1), pa je rješenje jednačine

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{7x}\ .$$

Nalazeći prvi i drugi izvod rješenja $y(x)$, postavljeni uslovi nam daju sljedeći sistem jednačina po nepoznatim konstantama C_1, C_2 i C_3,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= -4C_1 + 2C_2 + 7C_3 = -2 \\ y''(0) &= 16C_1 + 4C_2 + 49C_3 = -4\ . \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je

$$C_1 = \frac{14}{33}\ ,\ C_2 = \frac{13}{15}\ ,\ C_3 = -\frac{16}{55}\ ,$$

te je traženo rješenje

$$y(x) = \frac{14}{33} e^{-4x} + \frac{13}{15} e^{2x} - \frac{16}{55} e^{7x}\ .$$

Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Sada ćemo razmatrati nehomogenu jednačinu n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \ .$$

Rješavanje ove jednačine se odvija u dva koraka.

Prvi korak: rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu na način izložen u prethodnoj sekciji. Pri tome dobijamo odgovarajuće rješenje $y_h(x)$.

Drugi korak: nalazimo bar jedno *partikularno rješenje* nehomogene jednačine, $y_p(x)$.

Metod jednakih koeficijenata

Rješenje polazne nehomogene jednačine je tada dato sa

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \ .$$

Za neke specijalne oblike funkcije $f(x)$, jedno *partikularno rješenje* polazne jednačine možemo odrediti jednostavnom metodom koju nazivamo *metod jednakih koeficijenata*.

1. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}$.

Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x} \ ,$$

gdje je $A \in \mathbb{R}$ konstanta koju treba odrediti.

Primjer 2.23. *Rješiti jednačinu:* $y'' - y = e^{2x}$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ *i njena su rješenja* $r_1 = 1$ *i* $r_2 = -1$ *pa je* $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

U ovom slučaju je $\alpha = 2$ *i vidimo nije rješenje karakteristične jednačine te partikularno rješenje tražimo u obliku* $y_p = Ae^{2x}$.

Nalazeći odgovarajuće izvode ove funkcije i ubacujući u polazu jednačinu, dobijamo

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \ ,$$

odnosno

$$3A = 1 \ .$$

Dakle, $A = \frac{1}{3}$, a odgovarajuće partikularno rješenje je $y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$.

Konačno, rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} .$$

Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Ax^m e^{\alpha x} .$$

Primjer 2.24. *Rješiti jednačinu:* $y'' - y = e^x$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ *i rješenja su* $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Sada je $\alpha = r_1 = 1$ *(višestrukosti 1) pa partikularno rješenje tražimo u obliku* $y_p = Axe^x$. *Kako je* $y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$, *ubacujući ove podatke u polaznu jednačinu imamo*

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x ,$$

odakle sredjivanjem dobijamo $A = \frac{1}{2}$, *odnosno* $y_p = \frac{1}{2}xe^x$, *pa je rješenje polazne jednačine*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x .$$

2. Neka je $f(x) = P_k(x)$ (polinom stepena k).

Opet razlikujemo dva slučaja: Ako su sva rješenja karakteristične jednačine različita od nule, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Q_k(x)$, tj. u obliku polinoma k-tog stepena čije koeficijente treba odrediti.

Primjer 2.25. *Riješiti jednačinu:* $y'' - 3y' + 2y = x + 1$.

Karakteristična jednačina je $r^2 - 3r + 2 = 0$ *i njena rješenja su* $r_1 = 1$ *(*$m_1 = 1$*) i* $r_2 = 2$ *(*$m_2 = 1$*), te je* $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Kako nula nije korijen karakteristične jednačine, a desna strana je polinom prvog stepena, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Ax + B$. *Sada su* $y_p' = A$ *i* $y_p'' = 0$, *pa ubacujući to u polaznu jednačinu imamo,*

$$-3A + Ax + B = x + 1 \text{ tj. } Ax + (-3A + B) = x + 1 ,$$

odakle izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ -3A + B &= 1 . \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo tražene koeficijente, $A = 1$, $B = 4$, pa je partikularno rješenje dato sa $y_p(x) = x + 4$, a rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 4 .$$

Ako je 0 rješenje karakteristične jednačine višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = x^m Q_k(x)$.

Primjer 2.26. *Riješiti jednačinu:* $y''' + 2y' = x - 1$.

Karakteristična jednačina je $r^3 + 2r = 0$ *i njena rješenja su* $r_1 = 0$ *(*$m_1 = 1$*),* $r_{2/3} = \pm i\sqrt{2}$ *(*$m_{2/3} = 1$*). Rješenje homogene jednačine je* $y_h(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x$.

Kako je $0 (= r_1)$ korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje ne tražimo u obliku polinoma prvog stepena nego kao $y_p(x) = x(Ax + B)$. Sad su $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$ i $y_p''' = 0$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$4Ax + 2B = x - 1 .$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $A = \frac{1}{4}$ i $B = -\frac{1}{2}$, tj. $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$.

Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x .$$

3. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$.

Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} .$$

Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m Q_k(x)e^{\alpha x} .$$

4. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}(a \sin\beta x + b \cos\beta x)$.

Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A \sin\beta x + B \cos\beta x) ,$$

gdje su $A, B \in \mathbb{R}$ koeficijenti koje treba odrediti.

Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(A \sin \beta x + B \cos \beta x) \ .$$

5. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}(a \sin \beta x + b \cos \beta x)$.

Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(Q_k^1(x) \sin \beta x + Q_k^2(x) \cos \beta x) \ ,$$

gdje su Q_k^1 i Q_k^2 polinomi istog stepena kao polinom P_k, čije koeficijente treba odrediti.

Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(Q_k^1(x) \sin \beta x + Q_k^2(x) \cos \beta x) \ .$$

Ukoliko je funkcija na desnoj strani jednačine zbir više funkcija koje su nekog oblika od gore spomenutih, tj.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_l(x) \ , \tag{24}$$

tada se služimo sljedećim rasudjivanjem: neka je $y_{p1}(x)$ partikularno rješenje kada bi desna strana bila samo funkcija f_1, $y_{p2}(x)$ partikularno rješenje ako je desna strana samo funkcija f_2 i tako za svaku funkciju koja je sabirak na desnoj strani, tada partikularno rješenje nehomogene jednačine čija desna strana ima oblik (24), tražimo u obliku

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + ... + y_{pl}(x) \ .$$

Situacije kada nemamo samo konstantne koeficijente najbolje je da se prisjetimo na primjeru. Posmatrajmo jednačinu

$$x^2 y'' - 2y = x. \tag{25}$$

Komplementarnu funkciju, tj. opće rješenje jednačine

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

najlakše ćemo naći primjećujući da je $y = x^m$ prirodan izbor za probno rješenje. Smjenom u gornju jednačinu lako nalazimo da je $m = -1$ ili $m = 2$, tako da je komplementarna funkcija

$$c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$$

Stoga, navedeni smo da tražimo rješenje jednačine (25) u obliku

$$y = u_1 x^2 + \frac{u_2}{x}.$$

Diferenciranjem, dobijemo

$$y' = 2xu_1 - \frac{1}{x^2}u_2 + x^2u_1' + \frac{1}{x}u_2',$$

te postavljanjem uslova da je

$$x^2u_1' + \frac{1}{x}u_2' = 0, \tag{26}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= 2xu_1 - \frac{1}{x^2}u_2 \\ y'' &= y'' = 2u_1 + \frac{2}{x^3}u_2 + 2xu_1' - \frac{1}{x^2}u_2'. \end{aligned}$$

Zamjenjujući sada izraze za y, y'' u jednačinu (25), dobivamo

$$2x^3u_1' - u_2' = x.$$

Rješavajući ovo skupa sa (26), dobivamo

$$u_1' = \frac{1}{3x^2}, \quad u_2' = -\frac{x}{3},$$

$$u_1 = -\frac{1}{3x} + c_1, \quad u_2 = -\frac{x^2}{6} + c_2.$$

Stoga je opće rješenje jednačine (25) u stvari

$$y = -\frac{x}{2} + c_1x^2 + \frac{c_2}{x}$$

Smjene promjenljivih su ponekad veoma korisne. Ovdje ćemo diskutovati jednu trasformaciju koja je posebno interesantna. Posmatrajmo jednačinu

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

Smjena

$$y = v(x)p(x)$$

daje novu linearnu jednačinu po $v(x)$ koju je moguće jednostavnije riješiti za odred̄ene izbore funkcije $p(x)$. Rezultirajuća jednačina je

$$v'' + \left(2\frac{p'}{p} + f\right)v' + \left(\frac{p'' + fp' + gp}{p}\right)v = 0.$$

Ukoliko znamo jedno rješenje originalne jednačine, možemo uzeti da je p jednako tom rješenju i onda eliminisati v iz zadnje jednačine. Ovo je veoma korisno jer onda možemo naći rješenje pomoću dvije dosta pravolinijske integracije.

Alternativno, možemo uzeti da je

$$p = exp\left(-\frac{1}{2}\int f(x)dx\right) \tag{27}$$

i eliminisati prvi izvod iz gornje jednačine.

Primjer 2.27. *Besselova jednačina je*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Smjena $y = u(x)p(x)$ *sa izborom* $p(x) = x^{-1/2}$ *daje*

$$u'' + \left(1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2}\right)u = 0.$$

Ova jednačina je bez prvog izvoda i dosta zgodna za pronalaženje približnog ponašanja Besselovih funkcija za veliko x*, npr. metodom koju ćemo posmatrati nešto kasnije.*

2.4 Rješenja u obliku stepenih redova

Za početak posmatrajmo jednostavan, ali nelinearan primjer:

$$y'' = x - y^2 \tag{28}$$

Isprobajmo

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

Onda (28) postaje

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots = x - c_0 - 2c_0c_1 - (c_1^2 + 2c_0c_2)x^2 - \dots$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobijamo

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2}c_0^2 \\ c_3 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3}c_0c_1 \\ c_4 &= -\frac{1}{12}c_1^2 + \frac{1}{12}c_0^3,\ itd. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da želimo rješenje sa uslovima $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Onda je

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{6}, c_4 = -\frac{1}{12}, \dots$$

Ova metoda je veoma korisna, ali smo bili dosta opušteni u opravdavanju, utvrdjivanju konvergencije reda, itd. Ukratko ćemo samo sada stoga dati pregled opće teorije na linearnim diferencijalnim jednačinama. Posmatramo jednačinu

$$\frac{d^ny}{dx^n} + f_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots f_0(x)y = 0.$$

Ako su $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ regularne, u smislu teorije kompleksne promjenljive u tački $x = x_0$, x_0 onda nazivamo *običnom tačkom* diferencijalne jednačine.

U blizini obične tačke, opće rješenje diferencijalne jednačine se može napisati kao Taylorov red, čiji je radijus konvergencije udaljenost do najbliže singularnosti diferencijalne jednačine - pod čim podrazumjevamo tačku koja nije obična. Taylorov red je naravno stepeni red

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m,$$

čiji se koeficijenti c_m mogu naći pomoću smjene u diferencijalnu jednačinu, kao u gornjem primjeru. Ako x_0 nije obična tačka, ali $(x - x_0) f_{n-1}(x), (x - x_0)^2 f_{n-2}(x), \ldots, (x - x_0)^n f_0(x)$ jesu regularne u x_0, x_0 se naziva regularnom singularnom tačkom i uvijek možemo naći najmanje jedno rješenje oblika

$$y = (x - x_0)^s \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x - x_0)^m, \quad sa\ c_0 \neq 0,$$

gdje eksponent $s \notin \mathbb{Z}$ obavezno. Ovaj red konvergira u bilo kojem krugu koji ne uključuje singularnosti sem x_0. Algebarski posao u izračunavanju će postati mnogo lakši ako je $x_0 = 0$. Stoga je zgodno prije svega ukoliko je potrebno napraviti translaciju na x_0 kao koordinatni početak, tj. uvesti smjenu $z = x - x_0$.

Ako tačka nije ni obična tačka ni regularna singularnost, ona je iregularna singularnost.

Primjer 2.28. *Posmatrajmo primjer ekspanzije oko obične tačke :* Legendre *-ova diferencijalna jednačina je*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Tačke $x = \pm 1$ su regularne singularne tačke. Pokušat ćemo ekspanziju oko $x = 0$, koja je regularna i probajmo

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Primjer 2.29. *Primjer problema koji može proizaći iz regularnih singularnih tačaka, posmatrajmo Besselovu jednačinu*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0.$$

Ovo ima regularnu singularnu tačku u $x = 0$, pa stoga garantujemo da imamo rješenje oblika

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (c_0 \neq 0).$$

Rješenje je

$$y = c_0 x^s \left[1 - \frac{x^2}{4(s+1)} + \frac{x^4}{4 \cdot 8 (s+1)(s+2)} - \ldots \right]$$

Odgovarajuće normalizovana, ova funkcija se naziva Besselovom funkcijom

$$J_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k+n} k!(n+k)!}$$

WKB metoda

WKB metoda nam omogućava da nađemo približna rješenja diferencijalnih jednačina oblika

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)y = 0, \tag{29}$$

pod uslovom da $f(x)$ zadovoljava određene restrikcije koje možemo sumirati frazom "f(x) sporo varira". Svaka linearna homogena jednačina drugog reda se može pretvoriti u ovu formu pomoću trasformacije (27).

Jednodimenzionalna Schrödingerova jednačina je ovog oblika i metoda je generalno razvijena za kvantno-mehaničke splikacije od Wentzela, Kramersa i Brillouina. Rješenja (29) sa konstantnom $f(x)$ predlažu smjenu

$$y = e^{i\phi(x)}.$$

Diferencijalna jednačina stoga postaje

$$-(\phi')^2 + i\phi'' + f = 0.$$

Ako pretpostaimo da je ϕ'' 'malo', prva aproksimacija postaje

$$\phi' = \pm\sqrt{f}, \quad \phi(x) = \pm \int \sqrt{f(x)}dx.$$

Uslov validnosti (da je ϕ'' malo) je

$$|\phi''| \approx \frac{1}{2}\left|\frac{f'}{\sqrt{f}}\right| \ll |f|.$$

Iz gornjih jednakosti vidimo da je $1/\sqrt{f}$ približno $1/(2\pi)$ puta jedna "talasna dužina" ili jedna "eksponencijalna dužina" rješenja y. Iz gornjeg,

$$\phi'' \approx \pm\frac{1}{2} f^{-1/2} f'.$$

Smjenjujući ovu procjenu za mali član ϕ'' u diferencijalnu jednačinu, dobivamo

$$(\phi')^2 \approx f \pm \frac{i}{2}\frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\phi' \approx \pm\sqrt{f}\frac{i}{4}\frac{f'}{f}$$

$$\phi(x) \approx \pm\int\sqrt{f(x)}dx \pm \frac{i}{4}\ln f.$$

Dva izbora znaka naju dva približna rješenja koja se mogu kombinovati kako bi dobili opće rješenje

$$y(x) \approx \frac{1}{(f(x))^{1/4}}\left\{c_+ \exp\left[i\int\sqrt{f(x)}dx\right] + c_- \exp\left[-i\int\sqrt{f(x)}dx\right]\right\},$$

gdje su c_+ i c_- proizvoljne konstante. Stoga smo našli aproksimaciju za opće rješenje originalne jednačine u bilo kojoj regiji gdje vrijedi uslov validnosti.

Metoda medjutim propada ukoliko se $f(x)$ mijenja prebrzo ili ukoliko $f(x)$ prolazi kroz 0.