

1 Krivolinijski integral

Krivolinijski integral

Pojam određenog integrala, definisanog na nekom segmentu realne prave, u prethodnoj smo glavi uopštiti proširujući integraciju na oblast u \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 prostoru. Sada ćemo uopštavanje izvršiti u drugom pravcu. Naime, ako za oblast integracije ne posmatramo segment prave linije, nego luk proizvoljne krive u prostoru, a podintegralna funkcija se definiše na tom luku, dolazimo do pojma krivolinijskog integrala.

Krivolinijski integral se koristi, kako u matematici, tako i u raznim primjenama (izračunavanje rada sile na putu, cirkulacija fluida, izračunavanje mase tijela itd.). Uobičajeno se razmatraju dvije vrste krivolinijskih integrala, krivolinijski integral prve i krivolinijski integral druge vrste i mi ćemo ovdje uraditi isto uz napomenu da su sva razmatranja izvedena u prostoru \mathbb{R}^3 .

1.1 Krivolinijski integral prve vrste

Posmatrajmo u prostoru $Oxyz$ dio krive L od tačke A do tačke B , koja se može rektificirati i koja nema samopresjeka. Neka su njene jednačine date sa

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in [\alpha, \beta].$$

Neka je funkcija $f(x, y, z)$ definisana i ograničena na krivoj L . Podijelimo segment $[\alpha, \beta]$ na n dijelova

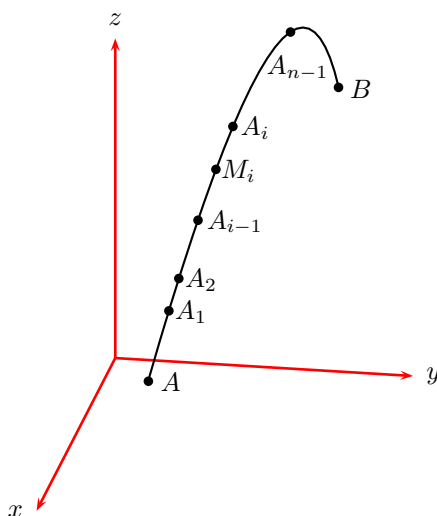
$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta.$$

Svakoj vrijednosti t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ odgovara na krivoj tačka A_i čije su koordinate (x_i, y_i, z_i) , gdje je $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ i $z_i = z(t_i)$.

Specijalno, za $t = t_0$ imamo tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i za $t = t_n$ tačku $B(x_n, y_n, z_n)$.

Na svakom segmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo proizvoljnu vrijednost τ_i parametra t . Ovoj vrijednosti odgovara tačka $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ krive L , pri čemu je

$$\xi_i = x(\tau_i), \eta_i = y(\tau_i), \zeta_i = z(\tau_i); i = 1, 2, \dots, n.$$



Sa Δs_i označimo dužinu luka $A_{i-1}A_i$ krive L . Posmatrajmo sljedeću integralnu sumu

$$\sigma(f, L) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i \quad (1)$$

Za broj I kažemo da je limes integralne sume $\sigma(f, L)$ kada $\max \Delta s_i$ teži 0, u oznaci

$$\lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sigma(f, L) = I,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da je $|\sigma(f, L) - I| < \varepsilon$, za $\max \Delta s_i < \delta$ i za proizvoljan izbor tačaka (ξ_i, η_i, ζ_i) na lukovima $A_{i-1}A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Definicija 1.1. Ako za funkciju $f(x, y, z)$ definisanu i ograničenu na luku L postoji

$$\lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sigma(f, L),$$

onda se on naziva krivolinijski integral prve vrste funkcije $f(x, y, z)$ po krivoj L i označava se sa

$$\int_L f(x, y, z) ds \text{ ili } \int_{AB} f(x, y, z) ds.$$

Često ćemo umjesto o krivoj integraciji govoriti o luku ili putanji integracije i nadalje ćemo podrazumijevati da je L dio-po-dio glatka kriva, a da je $f(x, y, z)$ ograničena na L i neprekidna u svim tačkama krive L , osim u njih konačno mnogo. Ove posljednje pretpostavke su ustvari neophodni uslovi postojanja krivolinijskog integrala prve vrste.

Sljedećim teoremom navodimo neke od osnovnih svojstava ovog integrala.

Teorema 1.2. Neka je L dio krive od tačke A do tačke B , neka su dalje f i g funkcije definisane na luku L i neka integrali $\int_L f(x, y, z) ds$ i $\int_L g(x, y, z) ds$ postoje.

$$1. \int_L (af(x, y, z) + bg(x, y, z))ds = a \int_L f(x, y, z)ds + b \int_L g(x, y, z)ds .$$

2. Za proizvoljnu tačku C luka L , između tačaka A i B vrijedi

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{AC} f(x, y, z)ds + \int_{CB} f(x, y, z)ds .$$

$$3. \left| \int_L f(x, y, z)ds \right| \leq \int_L |f(x, y, z)|ds .$$

4. Ako je $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ za $(x, y, z) \in L$, onda je

$$\int_L f(x, y, z)ds \leq \int_L g(x, y, z)ds .$$

Teorema 1.3. Neka je $f(x, y, z)$ neprekidna funkcija na luku L . Postoji tačka $M^*(x^*, y^*, z^*)$ na luku L , takva da vrijedi

$$\int_L f(x, y, z)ds = f(x^*, y^*, z^*) \cdot l(L) ,$$

gdje smo sa $l(L)$ označili dužinu luka L .

Jedna važna osobina krivolinijskog integrala prve vrste iskazana je sljedećim teoremom.

Teorema 1.4. Ako postoji $\int_{AB} f(x, y, z)ds$, onda vrijedi

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{BA} f(x, y, z)ds .$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz činjenice da veličina Δs_i predstavlja dužinu luka od tačke A_{i-1} do tačke A_i , pa je očigledno svejedno da li je posmatramo od A_{i-1} do A_i ili od A_i do A_{i-1} . \square

1.1.1 Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Teorema 1.5. Neka je luk krive $L = AB$ zadat jednačinama

$$x = x(t) , y = y(t) , z = z(t) ; t \in [\alpha, \beta] , \quad (2)$$

glatka kriva bez singularnih tačaka i neka je $f(x, y, z)$ neprekidna funkcija na luku L . Tada vrijedi formula

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt . \quad (3)$$

Vidimo da se u stvari krivolinijski integral prve vrste, ako je luk L zadat parametarskim jednačinama, svodi na obični Riemannov integral jedne varijable.

Primjer 1.6. Izračunati $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, gdje je luk L zadat parametarskim jednačinama kružne zavojnice

$$L : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt; t \in [0, \pi].$$

Na osnovu formule 3 imamo

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds &= \int_0^\pi (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \\ &\quad \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^\pi (a^2 + b^2 t^2) dt \\ &= \left(\pi a^2 + \frac{4}{3} \pi^3 b^2 \right) \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Primjer 1.7. Izračunati: $\int_{AB} (x + y + z) ds$, gdje je luk dio prave od tačke $A(1, 1, 1)$ do tačke $B(3, 3, 3)$.

Jednačina prave zadata tačkama A i B je $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ ili u parametarskom obliku $x = 2t + 1$, $y = 2t + 1$, $z = 2t + 1$, pa je na osnovu formule (3)

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x + y + z) ds &= \int_0^1 (2t + 1 + 2t + 1 + 2t + 1) \sqrt{6} dt \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (6t + 3) dt \\ &= \sqrt{6} \frac{9}{2} \end{aligned}$$

1.2 Krivolinijski integral druge vrste

Krivolinijski integral druge vrste

Neka je kriva L u prostoru data jednačinama

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in [\alpha, \beta]$$

i neka su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ definisane i ograničene na luku L .

Podjelimo segment $[\alpha, \beta]$ na n dijelova tačkama t_i i na svakom podsegmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo proizvoljnu vrijednost τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Vrijednostima t_i , odnosno τ_i , odgovaraju tačke $A_i(x_i, y_i, z_i)$, odnosno $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, pri čemu je $x_i = x(t_i)$, $y_i =$

$y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$, $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$ i $\zeta_i = z(\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Uvedimo još oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ i $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Sada možemo formirati sljedeće integralne sume:

$$\sigma_1(P, L) = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

$$\sigma_2(Q, L) = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i,$$

$$\sigma_3(R, L) = \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

Definicija 1.8. Neka za funkciju $P(x, y, z)$ ($Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$), definisanu na luku L , postoji limes integralne sume $\sigma_1(P, L)$ ($\sigma_2(Q, L)$, $\sigma_3(R, L)$) kada $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ($\max \Delta y_i \rightarrow 0$, $\max \Delta z_i \rightarrow 0$), tada se on naziva krivolinijskim integralom druge vrste funkcije $P(x, y, z)$ ($Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$) po luku L i označava se sa

$$\int_L P(x, y, z) dx \left(\int_L Q(x, y, z) dy, \int_L R(x, y, z) dy \right),$$

ili

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx \left(\int_{AB} Q(x, y, z) dy, \int_{AB} R(x, y, z) dy \right).$$

Zbir $\int_L P(x, y, z) dx + \int_L Q(x, y, z) dy + \int_L R(x, y, z) dy$ se obično zapisuje u skraćenoj formi

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dy$$

i naziva se (opštim) krivolinijskim integralom druge vrste.

Teorema 1.9. Neka je $L = AB$ luk krive, P i P_1 funkcije definisane na luku L i neka postoje integrali $\int_L P(x, y, z) dx$ i $\int_L P_1(x, y, z) dx$.

1. Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_L (aP(x, y, z) + bP_1(x, y, z)) dx = a \int_L P(x, y, z) dx + b \int_L P_1(x, y, z) dx.$$

2. Neka je $C \in L$ između tačaka A i B . Tada vrijedi

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = \int_{AC} P(x, y, z) dx + \int_{CB} P(x, y, z) dx.$$

Teorema 1.10. Ako je $P(x, y, z)$ neprekidna funkcija na luku AB , onda postoji tačka $M^*(x^*, y^*, z^*)$ na luku AB , takva da je

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = P(x^*, y^*, z^*)(b - a) ,$$

gdje je $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Svojstvo da krivolinijski integral prve vrste ne ovisi o orijentaciji putanje integracije nije isto za krivolinijski integral druge vrste. Naime vrijedi,

Teorema 1.11. Ako postoji integral $\int_{AB} P(x, y, z) dx$, tada vrijedi

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = - \int_{BA} P(x, y, z) dx .$$

1.2.1 Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste

Teorema 1.12. Neka je kriva AB zadana jednačinama

$$x = x(t) , y = y(t) , z = z(t) ; t \in [\alpha, \beta] ,$$

glatka i nema singularnih tačaka i neka je funkcija $P(x, y, z)$ neprekidna na luku AB . Tada važi formula

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt . \quad (4)$$

Analogno se iskazuje tvrdnja i za funkcije Q i R , tj.

$$\int_{AB} Q(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) dt ,$$

$$\int_{AB} R(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) dt .$$

Sada za sumarnu formulu imamo

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt . \quad (5)$$

Primjer 1.13. Izračunati:

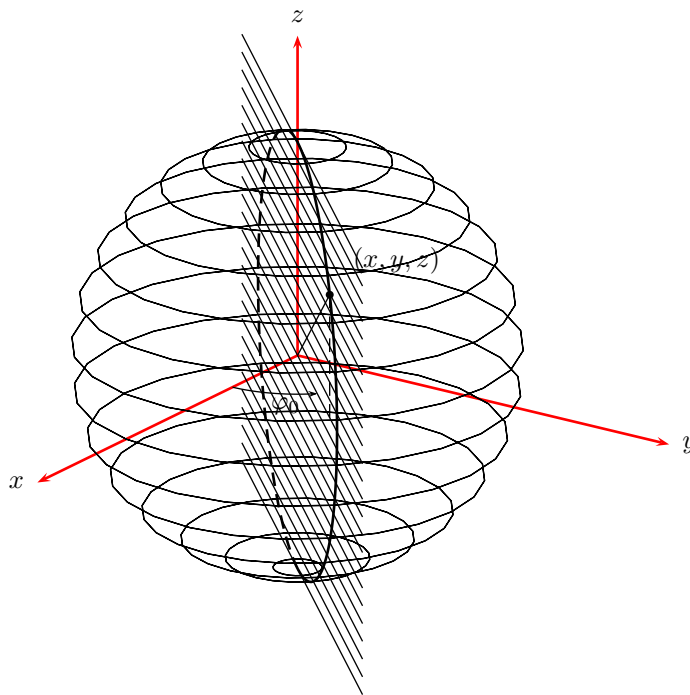
$$\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy ,$$

gdje je L luk parabole $y = x^2$, od tačke $A(-1, 1)$ do tačke $B(1, 1)$.

Za parametar krive uzimamo x . Formula (5) nam daje ($R = 0$)

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx \\ &= -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Primjer 1.14. Izračunati: $\int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, gdje je L kružnica određena sferom $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i ravni $y = x$. Pri tome je smjer integracije suprotan kretanju kazaljke na satu, ako se gleda iz pozitivnog dijela x -ose.



Za parametar očigledno možemo izabrati ugao između radijus-vektora tačke na kružnici i ekvatorijalne ravni. Iz sfernih koordinata onda imamo

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos t, \quad y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos t, \quad z = a \sin t,$$

pri čemu se zbog zadate orijentacije, parametar t mijenja od 0 do 2π . Sada na osnovu formule (5) imamo

$$\int_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{a^2\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \sin t \right) \sin t - \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \left(\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right) \sin t \right] dt = 0.
\end{aligned}$$

2 Nezavisnost integracije od putanje. Grinova formula

Krivolinijski integral druge vrste u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se vrši integracija. Međutim, to nije uvijek slučaj. Ukoliko izraz $Pdx + Qdy + Rdz$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije $u(x, y, z)$, onda integral vektora $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ po luku $L = AB$ zavisi samo od tačaka A i B , a ne i od linije kojom su te tačke povezane. Ovo razmatranje ćemo iskazati teoremom

Teorema 2.1. *Neka je u oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija*

$$\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Tada su sljedeća tvrdjenja ekvivalentna:

- Postoji funkcija $u(x, y, z)$ sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima, definirana u oblasti V , takva da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

- Krivolinijski integral druge vrste $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ po putanji $AB \subset V$, gdje su $A(x_0, y_0, z_0)$ i $B(x_1, y_1, z_1)$ početna, odnosno krajnja tačka te putanje, ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka A i B . Pri tome vrijedi

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0).$$

- Krivolinijski integral

$$\oint_c Pdx + Qdy + Rdz$$

po proizvoljnoj zatvorenoj putanji $c \subset V$ jednak je nuli.

Na osnovu gornjeg teorema jasno je da se problem izračunavanja krivolinijskog integrala druge vrste, kada on ne ovisi o putu integracije, svodi na raspoznavanje kada je podintegralna funkcija totalni diferencijal neke vektorske funkcije. Zato nam je od interesa dati još neki kriterijum za takvo "raspoznavanje". Za naredni teorem neophodan nam je novi pojam.

Definicija 2.2. Za oblast $V \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je prosto povezana ako se svaka zatvorena dio-po-dio glatka kriva $c \subset V$, može "stegnuti" u proizvoljnu tačku $M_0 \in c$, ostajući pri tome u oblasti V .

Strogu matematičku formulaciju pojma "stegnuti" ovdje nećemo razmatrati. Neka on ostane u domenu intuitivnog ali navedimo neke primjere prosto povezanih i nepovezanih oblasti. Unutrašnjost proizvoljnog kruga i kvadrata su prosto povezane oblasti u \mathbb{R}^2 , ali krug bez svog centra to nije. U \mathbb{R}^3 primjer prosto povezane oblasti su lopta i kocka, takodje i oblast ograničena dvjema koncentričnim sferama. Torus je primjer oblasti u \mathbb{R}^3 koja nije prosto povezana.

Teorema 2.3. Neka je u prosto povezanoj oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ koja ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial R}{\partial y}$. Potreban i dovoljan uslov da integral $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$, $AB \subset V$, ne zavisi od putanje AB , jeste da su ispunjeni uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Primjer 2.4. Izračunati:

$$\oint_c \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

po putanji c koja predstavlja kručnicu $(x - 3)^2 + y^2 = 1$.

Kako su $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ i $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ neprekidne u oblasti ograničenoj krivom c i kako su

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

i uz to neprekidne funkcije u istoj oblasti, to na osnovu Teorema 2.1 zaključujemo da je dati integral jednak 0.

Primjer 2.5. Izračunati:

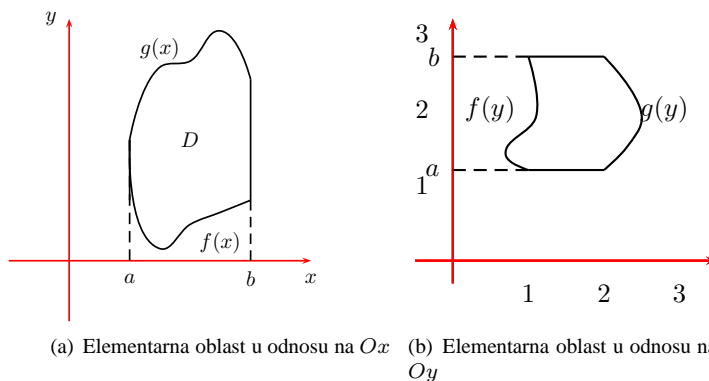
$$\oint_c \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

po putanji c koja predstavlja kručnicu $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Za razliku od gornjeg primjera, ovdje su funkcije P, Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne u svim tačkama oblasti ograničenom krivom c osim u tački $(0, 0)$, ali oblast datog kruga bez tačke

$(0, 0)$ nije prosto povezana pa se ne možemo pozvati na prethodne dvije teoreme. Zato sada imamo

$$\oint_c \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin t}{a^2} (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} a \cos t \right) dt = 2\pi.$$

Veza između dvojnog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti data je poznatom *Greenovom formulom*. Uočimo prostu zatvorenu krivu $c \subset \mathbb{R}^2$ koja ograničava oblast D . Ako se c sastoji od dijelova grafika dviju neprekidnih funkcija f i g , definisanih na $[a, b]$ i takvih da je $f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a, b]$, i eventualno dijelova pravih $x = a$ i $x = b$, onda ćemo oblast D nazvati elementarnom oblašću u odnosu na osu Ox . Na sličan bi način definisali elementarnu oblast u odnosu na osu Oy . Oblasti koje su elementarne u odnosu na obje ose zovemo prosto elementarnim oblastima.



Slika 1:

Teorema 2.6 (Greenova teorema). *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ oblast ograničena dio-po-dio glatkom krivom c . Ako su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, na zatvorenoj oblasti \overline{D} , tada važi jednakost*

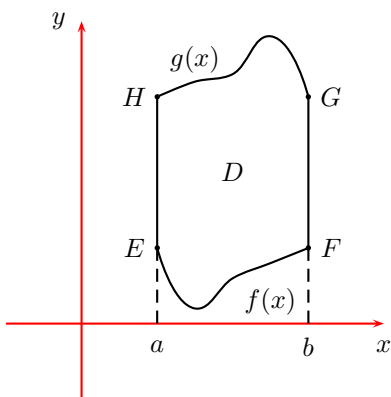
$$\oint_{c^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6)$$

Pri tome, oznaka c^+ u krivolinijskom integralu označava da se integracija vrši u smjeru pri kome tačke oblasti D uvijek ostaju s lijeve strane u odnosu na kretanje.

Dokaz

Pretpostavimo za početak da je oblast D elementarna oblast u odnosu na osu Ox . Dakle, neka je granica oblasti D kriva c određena jednačinama $y = f(x)$, $y = g(x)$

($f(x) \leq g(x)$ za $a \leq x \leq b$), zatim sa $x = a$ i $f(a) \leq y \leq g(a)$, kao i $x = b$, $f(b) \leq y \leq g(b)$, što je predstavljeno slikom



Sada imamo,

$$\begin{aligned}
 \iint_{\overline{D}} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \\
 &= \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx \\
 &= \int_a^b P(x, g(x)) dx - \int_a^b P(x, f(x)) dx \\
 &= - \int_{GH} P(x, y) dx - \int_{EF} P(x, y) dx .
 \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da na pravama $x = a$ i $x = b$ vrijedi $dx = 0$, imamo

$$\int_{HE} P(x, y) dx = 0 , \quad \int_{FG} P(x, y) dx = 0 ,$$

pa zajedno sa prethodnim vrijedi

$$\begin{aligned}
 \iint_{\overline{D}} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= - \int_{GH} P(x, y) dx - \int_{HE} P(x, y) dx \\
 &\quad - \int_{EF} P(x, y) dx - \int_{FG} P(x, y) dx ,
 \end{aligned}$$

odnosno

$$\iint_{\overline{D}} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_{c^+} P(x, y) dx .$$

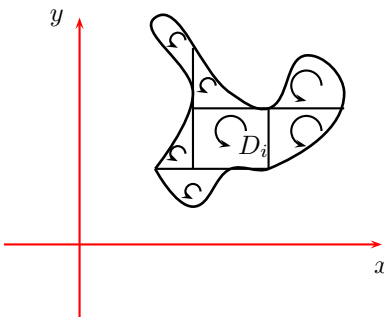
Na sličan način bi dobili

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_{c^+} Q(x, y) dy .$$

Sabiranjem posljednje dvije jednakosti dobijamo traženu formulu

$$\oint_{c^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy .$$

Ako oblast D nije elementarna, onda je prvo pravim linijama paralelnim koordinatnim osama podijelimo na elementarne oblasti D_i , $i = 1, 2, \dots, n$, što je prikazano na slici.



Nakon toga

na svaku podoblast D_i primjenimo dobijenu jednakost

$$\oint_{c_i^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy ,$$

gdje je c_i granica oblasti D_i . Sabiranjem ovih jednakosti po $i = 1, 2, \dots, n$, dobijamo formulu

$$\oint_{c^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy .$$

Pri tome treba uočiti da se krivolinijski integral druge vrste po onim granicama susjednih oblasti koje su im zajedničke, i nalaze se unutar oblasti D , pojavljuje uvijek dva puta i to krećući se suprotnim smjerovima, pa se svi ti integrali poništavaju zbog poznate nam osobine krivolinijskog integrala druge vrste. \square

Izvedimo i jednu primjenu krivolinijskog integrala druge vrste i Greenove teoreme. Ona se odnosi na izračunavanje površine ravnog lika.

Primjer 2.7. Neka je D zatvorena oblast u ravni Oxy , ograničena dio-po-dio glatkom krivom c . Poznato nam je da vrijedi

$$mes(D) = \iint_D dx dy .$$

S druge strane, koristeći Greenovu formulu, uzimajući $P(x, y) = 0$ i $Q(x, y) = x$, dobijamo vezu

$$\iint_D dx dy = \oint_{c^+} x dy .$$

Ako uzmemo $P(x, y) = -y$ i $Q(x, y) = 0$, dobija se

$$\iint_D dx dy = - \oint_{c^+} y dx .$$

Objedinjujući gornje, dobijamo formulu za izračunavanje površine ravne figure

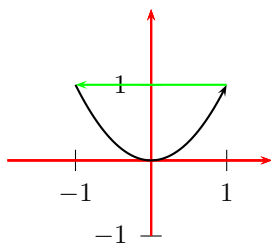
$$mes(D) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{c^+} x dy - y dx .$$

U sljedećem primjeru ilustovat ćemo primjenu Greenove teoreme.

Primjer 2.8. *Izračunati:*

$$\int_c \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy ,$$

gdje je c luk parabole $y = x^2$, od tačke $A(-1, 1)$ do tačke $B(1, 1)$.



Oblast D koju posmatramo u Greenovoj teoremi je zatvorena i ograničena, pa je linija c koja je ograničava, zatvorena linija. Dakle, da bi mogli primijeniti Greenovu teoremu, neophodno je da putanja integracije bude zatvorena kontura, što u našem primjeru nije slučaj.

S druge strane, motiv za primjenu Greenove teoreme je činjenica da vrijedi uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

jer je u tom slučaju izraz na desnoj strani u (6) jednak 0. Kod nas je taj uslov zadovoljen, tj. vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

a to znači da bi bilo dobro iskoristiti Greenov teorem. U tom cilju našu putanju integracije (dio parabole), zatvorimo proizvoljnom krivom (zatvaranje treba izvesti sa krivom po kojoj je krivolinijska integracija lahka). Neka to bude prava koja spaja tačke A i B , tj. linija

$$l : y = 1, -1 \leq x \leq 1.$$

Sada je $c \cup l$ zatvorena putanja, pa vrijedi

$$\int_{c \cup l} \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

S druge strane, prema pravilima za krivolinijski integral drugwe vrste, imamo

$$\begin{aligned} \int_{c \cup l} \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_c \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \\ &+ \int_l \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \end{aligned}$$

Iz posljednje dvije jednakosti onda vrijedi

$$\int_c \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = - \int_l \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Kako je na krivoj l , $y = 1$, odnosno $dy = 0$, onda je

$$\int_l \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle,

$$\int_c \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = -\frac{\pi}{2}.$$

Problem površine

Neka je C glatka kriva koja se nalazi između dviju tačaka u xy -ravni i neka je $f(x, y)$ neprekidna i nenegativna na C . Naći površinu "lista" koji se ocrta vertikalnim linijskim segmentom koji se kreće prema gore of tačke (x, y) na visinu $f(x, y)$ i kreće se duž C od početne do krajnje tačke.

Odgovor na ovo pitanje je linijski integral prve vrste!

$$A = \int_C f(x, y) ds.$$

Primjer 2.9. Naći površinu površi koja se diže prema gore sa kružnice $x^2 + y^2 = 1$ u xy -ravni na parabolčni cilindar $z = 1 - x^2$.

Masa žice kao krivolinijski integral

Linijski se integral može iskoristiti kako bi se izračunala masa tanke žice. U ovu svrhu, zamislimo da je data idealizirana tanka žica u $2D$ ili $3D$ prostoru, koja je savijena u oblik krive C .

Ako je sastav žice uniforman, tako da joj je masa uniformno distribuirana, onda za žicu kažemo da je homogena i definišemo linearnu gustinu mase žice da je ukupna masa podijeljena sa ukupna dužina.

Međutim, ukoliko masa žive nije uniformno distribuirana, onda linearna gustina mase nije korisna mjera, jer ona ne uračunava varijacije u koncentraciji mase. U ovom slučaju opisujemo koncentraciju mase pomoću funkcije gustine ρ , koju pomatramo kao

$$\lim_{\Delta s} \frac{\Delta M}{\Delta s},$$

gdje ΔM i Δs označavaju masu i dužinu male sekcije žice centrirane u tački.

Kako bismo iz ove informalne ideje dobili korisnu formulu, pretpostavimo da je $\rho = \rho(x, y)$ funkcija gustine za tanku žicu u $2D$. Pretpostavimo da je žica podijeljena na n malih dijelova i neka je (x_k^*, y_k^*) centar k -te sekcije žice. Neka je ΔM_k masa k -te sekcije žice. Masa k -te sekcije se može aproksimirati kao

$$\Delta M_k \approx \rho(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k,$$

pa se masa cijele žice može aproksimirati sa

$$M \approx \sum_{k=1}^n \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^n \rho(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k$$

Ako sada $n \rightarrow \infty$, imamo

$$M = \int_C \rho(x, y) ds, \quad M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

3 Površinski Integral

Površinski integral

Na analogan način linijskom integralu, definisat ćemo i *površinske integrale*.

Neka je σ površ u 3-prostoru sa konačnom površinom i neka je $f(x, y, z)$ neprekidna funkcija definisana na σ . Podijelimo, kao prije, σ na mrežu $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sa površinama $mes \sigma_1, mes \sigma_2, \dots, mes \sigma_n$ i formirajmo sumu

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) mes S_k,$$

gdje je (x_k^*, y_k^*, z_k^*) proizvoljna tačka iz σ_k . Sada nastavimo podjelu površi, dijeleći σ na sve više i više dijelova na takav način da se maksimalna dimenzija svakog odjeljka približava nuli kako $n \rightarrow \infty$. Ako se gornja suma približava limesu koji ne zavisi od načina kako smo podijelili površ niti od izbora tačaka (x_k^*, y_k^*, z_k^*) , onda se ovaj limes naziva *površinski integral* funkcije $f(x, y, z)$ preko σ i označavamo ga sa

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) mes S_k.$$

Slijedeća teorema nam omogućava da izračunamo površinski integral ukoliko je površ data parametarski:

Teorema 3.1. *Neka je σ glatka parametarska površ čije su parametarske jednačine date sa*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

gdje (u, v) varira preko regije R u (u, v) -ravni. Ako je $f(x, y, z)$ neprekidna na σ , onda je

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv,$$

gdje je $r = \vec{i}x(u, v) + \vec{j}y(u, v) + \vec{k}z(u, v)$.

Primjer 3.2. *Evaluirajte površinski integral $\iint_{\sigma} x^2 dS$ preko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.*

U slučaju da je σ površ oblika $z = g(x, y)$, možemo uzeti $x = u$ i $y = v$ kao parametre i izraziti

$$r = u\vec{i} + v\vec{j} + g(u, v)\vec{k},$$

iz čega dobijemo

$$\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Stoga je površinski integral

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dudv$$

Na isti način možemo dokazati analogne rezultate kada je površ data kao funkcija x i z , odnosno, y i z .

Primjer 3.3. Izračunati površinski integral

$$\iint_{\sigma} xz dS,$$

gdje je σ dio ravni $x + y + z = 1$ koji se nalazi u prvom oktantu.

Primjer 3.4. Izračunati površinski integral

$$\iint_{\sigma} y^2 z^2 dS,$$

gdje je σ dio kupe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ koji leži između ravni $z = 1$ i $z = 2$.

3.1 Primjene površinskog integrala

Primjene površinskog integrala

Teorema 3.5. Ako je σ glatka parametarska površ u 3-prostoru, njena površina je data sa

$$\iint_{\sigma} dS.$$

3.2 Fluks

Fluks

U ovom dijelu diskutovat ćemo primjenu površinskih integrala kod vektorskih polja koja su povezana sa tokom fluida i elektrostatičnim silama. Međutim, ideje koje ćemo razviti su opće u prirodi i primjenjive su na druge vrste vektorskih polja.

Zainteresirani smo dakle za vektorska polja u 3-prostoru koja uključuju neku vrstu "toka", recimo tok fluida ili tok naelektrisanih čestica u elektrostatičnom polje na primjer. U slučaju toka fluida vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z)$ predstavlja brzinu čestice fluida u tački (x, y, z) , dok te čestice teku duž 'linija toka' koje su tangencijalne na vektore brzine.

I slučaju elektrostatičnog polja, $\vec{F}(x, y, z)$ je sila koje ispoljava polje na maloj jedinici pozitivnog naboja u tački (x, y, z) i ti naboji se ubrzavaju duž 'električnih linija' koje su tangencijalne na vektore sile.

Orijentabilne površi

Za naše potrebe morat ćemo posmatrati neke osnovne ideje o površima. Većina površi koje susrećemo imaju dvije strane - sfera recimo ima svoju unutrašnjost i spoljašnjost, beskonačna horizontalna ravan ima gornju i donju stranu. Ovakve površi se nazivaju *dvostrane* površi.

Međutim, u matematici postoje površi sa samo jednom stranom - npr. Möbiusova traka. Ona ima samo jednu stranu u smislu da recimo buba koja se kreće po njoj može preći cijelu površinu trake bez da pređe preko neke ivice. Ovakve površi se nazivaju *jednostrane* površi.

Dvostrane površi se nazivaju orijentabilnim, dok se jednostrane nazivaju neorijentabilne. Mi ćemo se baviti samo orijentabilnim površima. U primjenama, veoma je važno moći razlikovati između dvije strane orijentabilne površi. Zbog ovoga, neka je σ orijentabilna površ koja ima jedinični normalni vektor \vec{n} u svakoj tački. Vektori \vec{n} i $-\vec{n}$ pokazuju u suprotnim pravcima, pa stoga služe za distinkciju dvije strane površi!

Moguće je dokazati da ako je σ orijentabilna glatka površ, onda je uvijek moguće da se izabere pravac vektora \vec{n} u svakoj tački tako da $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ varira neprekidno preko površi. Ovi jedinični vektori onda formiraju *orijentaciju* površi. Kada je površ predstavljena parametarski, parametarske jednačine tvore prirodnu orijentaciju površi. Ako je glatka parametrizovana površ σ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

onda je jedinična normala data sa

$$\vec{n} = \vec{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} \quad (7)$$

neprekidna vektorska funkcija od u i v . Tada jednačina (7) definiše orijentaciju površi i ovo nazivamo *pozitivnom* orijentacijom parametarski date površi σ i kažemo da \vec{n} pokazuje u pozitivnom pravcu površi. Obratno za $-\vec{n}$.

Primjer 3.6. Sfera $r(u, v) = a \sin \phi \cos \theta \vec{i} + a \sin \phi \sin \theta \vec{j} + a \cos \phi \vec{k}$. Jedinična normala sa pozitivnom orijentacijom je

$$\vec{n} = \frac{1}{a} \vec{r}.$$

Ovaj vektor pokazuje u istom pravcu kao i vektor radijusa \vec{r} (dalje od centra). Dakle, za datu parametrizaciju, pozitivna orijentacija je napolje, a negativna unutra.

Posmatrajmo slijedeći problem: Neka je orijentabilna površ uronjena u nekompresibilni stabilni tok fluida i dalje pretpostavimo da je površ propusna tako da fluid može prolaziti kroz površ slobodno u svakom pravcu.

Trebamo naći neto zapreminu fluida Φ koja prolazi kroz površ po jedinici vremena, gdje pod neto zapreminom podrazumjevamo zapreminu koja prolazi kroz površ u pozitivnom pravcu minus zapremina koja prođe kroz površ u negativnom pravcu.

Kako bismo riješili ovaj problem, pretpostavimo da je brzina fluida u tački (x, y, z) na površi σ data sa

$$\vec{F} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}.$$

Neka je \vec{n} jedinična normala prema pozitivnoj strani σ u tački (x, y, z) i neka je \vec{T} jedinični vektor koji je ortogonalan na \vec{n} i leži u ravni \vec{F} i \vec{n} .

Vektor brzine se može razložiti na dvije ortogonalne komponente - komponentu $(\vec{F} \cdot \vec{T})\vec{T}$ duž 'lica' površi i komponentu $(\vec{F} \cdot \vec{n})\vec{n}$ koja je perpendikularna na σ .

Komponenta brzine duž lica površi ne doprinosi protoku kroz σ , pa je stoga možemo zanemariti! Također primjetite da znak $\vec{F} \cdot \vec{n}$ određuje pravac protoka - pozitivan znak znači protok u pravcu \vec{n} , a negativan suprotan od pravca \vec{n} . Kako bismo riješili ovaj problem, podijelimo površ σ na n dijelova $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sa površinama $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$.

Ako su dijelovi mali i tok nije previše eratičan, realno je pretpostaviti da se brzina ne mijenja značajno na svakom od dijelova. Stoga, ako je (x_k^*, y_k^*, z_k^*) bilo koja tačka u σ_k , možemo pretpostaviti da je $\vec{F}(x, y, z)$ konstanta i jednak $\vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ na cijelom dijelu, te da je komponenta brzine preko dijela površi σ_k

$$\vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*).$$

Stoga možemo interpretirati

$$\vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

kao približnu zapreminu fluida koju prolazi kroz dio σ_k u pravcu \vec{n} po jedinici vremena.

Stoga suma

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

mjeri približno zapreminu fluida koji prolazi kroz površ σ u pravcu njene orijentacije \vec{n} u jedinici vremena.

Definicija 3.7. Ako povećamo n na takav način da se maksimalna dimenzija svakog odjeljka približava nuli kako $n \rightarrow \infty$, granična vrijednost

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta S_k$$

predstavlja tačnu neto zapreminu fluida koji prođe kroz površ σ u pravcu orijentacije \vec{n} po jedinici vremena. Vrijednost Φ se naziva *fluks od \vec{F} preko σ* . Može se izraziti kao površinski integral

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS.$$

Pozitivan fluks znači da veća količina fluida protiče u pozitivnom pravcu nego u negativnom i obratno.

Primjedba 3.8. Ako fluidi ima gustinu ρ , onda $\Phi\rho$ predstavlja neto masu fluida koja proziče kroz σ po jedinici vremena.

Primjenivši prethodne rezultate, možemo dobiti efektivnu formulu za izračunavanje fluksa

Teorema 3.9. Neka je σ glatka parametrizovana površ predstavljena pomoću vektorske jednačine $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ u kojoj (u, v) varira preko regije R u uv -ravni. Ako su funkcije komponente vektorskog polja \vec{F} neprekidne na σ i ako \vec{n} određuje pozitivnu orijentaciju σ , onda je

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_R \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

gdje podrazumijevamo da je integrand na desnoj strani jednačine iskazan pomoću u i v .

Primjer 3.10. Naći fluks vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ preko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orijentisane napolje.

Orijentacija neparametarskih površi

Neparametarske površi oblika $z = g(x, y)$, $y = g(z, x)$, $x = g(y, z)$ mogu se izraziti parametarski koristeći nezavisne promjenljive kao parametre. U slučaju $z = g(x, y)$,

$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + g(u, v)\vec{k}.$$

U tom slučaju je vanjska normala data sa

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Analogno se dobiju i formule za druga dva slučaja. Svaka od ovih jednačina se dobije koristeći se gradijentima. Zapišimo jednačinu površi kao

$$z - g(x, y) = 0.$$

Ova jednačina je oblika $G(x, y, z) = 0$, pa se može posmatrati kao nivo površ funkcije $G(x, y, z)$. Kako je gradijent funkcije G normalan na nivo površ, slijedi da je jedninična normala \vec{n}

$$\frac{\nabla G}{|\nabla G|} \text{ ili } -\frac{\nabla G}{|\nabla G|}.$$

Ostavljamo kao vježbu da se pokaže da ako površ prikazemo na bilo koji od tri gornja načina, imamo

$$\nabla G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Stoga imamo

Teorema 3.11. *Neka je σ glatka površ oblika $z = g(x, y)$, $y = g(z, x)$ ili $x = g(y, z)$ i pretpostavimo da su funkcije komponente vektorskog polja \vec{F} neprekidne na σ . Pretpostavimo također da je jednačina za σ napisana u obliku $G(x, y, z) = 0$ i neka je R projekcija σ na koordinatnu ravan određenu nezavisnim promjenljivim od g . Ako σ ima pozitivnu orijentaciju, onda*

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R \vec{F} \cdot \nabla G dA.$$

Primjer 3.12. *Neka je σ dio površi $z = 1 - x^2 - y^2$ koji leži iznad Oxy ravni i neka je σ orijentisana prema gore. Naći fluks vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ preko σ .*

3.3 Divergencijska teorema

Divergencijska teorema

Napomena - ova se teorema još naziva Gausova ili teorema Gauss-Ostrogradski, zavisno od literature!

U ovoj sekciji ćemo biti zainteresovani za fluks preko površi, kao što su sfere, koje 'zatvaraju' regiju u prostoru.

Pokazat ćemo da se fluks preko takvih površi može izraziti pomoću divergencije vektorskog polja i dat ćemo pomoću toga i fizičku interpretaciju divergencije. U prošloj sekciji smo proučavali fluks preko općih površi. Sada ćemo posmatrati isključivo površi koje su granice konačnih solidna - površ solidne sfere, solidne kutije, solidnog cilindra itd.

Ovakve površi se nazivaju *zatvorene* površi. Zatvorena površ može ali i ne mora biti glatka, ali većina površi koja se pojavljuje u praksi je glatka dio po dio - tj. sastoje se od konačno mnogo glatkih površi koje su povezane na ivicama (kartonska kutija na primjer).

Ograničit ćemo promatranje na one dio po dio glatke površi kojima možemo pripisati unutrašnju i vanjsku orijentaciju. Prisjetimo se da je divergencija vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

data sa

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Do sada nismo razmatrali fizičku interpretaciju takve strukture. Slijedeća teorema, *divergencijska* teorema daje interpretaciju divergencije u kontekstu toka fluida.

Teorema 3.13. *Neka je G solid čija je površina σ orijetisana spolja. Ako je*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

gdje f, g i h imaju neprekidne prve parcijalne izvode na nekim otvorenim skupovima koji sadrže G , onda je

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (8)$$

Dokaz. Za sada izostavljamo. □

Primjedba 3.14. Eksplicitnije, divergencijska teorema kaže da je fluks vektorskog polja preko zatvorene površi sa vanjskom orijentacijom jednak trojnom integralu divergencije preko regije zatvorene s tom površi. Ovo se nekad naziva *vanjski fluks* površi.

Nekad je jednostavnije izračunati fluks preko divergencije, nego pomoću površinskog integrala.

Primjer 3.15. *Iskoristiti divergencijsku teoremu kako bi našli fluks vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ preko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.*

Primjer 3.16. *Naći fluks vektorskog polja*

$$\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z^2\vec{k}$$

preko jedinične kocke u prvom oktantu pomoću divergencijske teoreme.

Primjer 3.17. *Naći fluks vektorskog polja*

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$$

preko regije koja je zatvorena kružnim cilindrom $x^2 + y^2 = 9$ i ravnima $z = 0$ i $z = 2$.

Divergencijska teorema daje način interpretacije divergencije vektorskog polja \vec{F} . Pretpostavimo da je G mala sferična regija centrirana u tački P_0 i da je njena površina, označena sa σG orijetisana spolja. Označimo zapreminu regije sa $\operatorname{vol}(G)$, te fluks polja \vec{F} preko σG sa $\Phi(G)$.

Ako je $\operatorname{div} \vec{F}$ neprekidno na G , onda se preko male regije G vrijednost $\operatorname{div} \vec{F}$ ne mijenja mnogo u odnosu na vrijednost $\operatorname{div} \vec{F}(P_0)$, pa stoga razumno možemo aproksimirati vrijednost divergencije pomoću konstante $\operatorname{div} \vec{F}(P_0)$. Divergencijska teorema implicira da se fluks $\Phi(G)$ polja \vec{F} preko $\sigma(G)$ može aproksimirati kao

$$\Phi(G) = \iint_{\sigma} (G) \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dV \approx$$

$$\approx \operatorname{div} \vec{F}(P_0) \iiint_G dV = \operatorname{div} \vec{F}(P_0) \operatorname{vol}(G).$$

Oдавдје slijedi

$$\operatorname{div} \vec{F}(P_0) \approx \frac{\Phi(G)}{\operatorname{vol}(G)},$$

što možemo onda preciznije izraziti kao

$$\operatorname{div} \vec{F}(P_0) = \lim_{\operatorname{vol}(G) \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(G)} \iint_{\sigma} (G) \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Ovo nam kaže da se u stalnom fluidnom toku, divergencija vektorskog polja \vec{F} može interpretirati kao limitirajuću fluks po jedinici zapremine u tački.

Primjedba 3.18. Gornja formula se nekad uzima kao definicija divergencije!

3.4 Stokesova teorema

Stokesova teorema

U ovoj sekciji ćemo biti zainteresovani za površi u 3-prostoru koje su ograničene jednostavnim parametarskim krivima. Na takvoj orijentisanoj površi σ ograničenoj sa parametarskom krivom C , postoje dva moguća odnosa između orijentacija krive i površi.

Zamislimo osobu koja hoda duž krive C sa njegovom/njenom glavom u pravu orijentacije površi σ . Osoba onda hoda u pozitivnom pravcu krive C u odnosu na prijen-taciju površi σ ako je površ sa lijeve strane te osobe, a u negativnom smjeru ukoliko mu je ona s desne strane (pravilo desne ruke). Već ste se ranije susretali (a ako niste, trebali ste!) sa *rotorom* vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

datim sa

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k},$$

što je možda jednostavnije dato sa

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

Stokesova teorema

Teorema 3.19. Neka je σ dio po dio glatka orijentisana površ koje je ograničena jednostavnim, zatvorenim, dio po dio glatkom krivom C sa pozitivnom orijentacijom. Ako su komponente vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode na nekom otvorenom skupu koji sadrži σ , i ako je \vec{T} jedinični tangenti vektor na C , onda je

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \iint_{\sigma} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

Primjedba 3.20. Integral na lijevoj stranu glavne formule predstavlja rad izvršen vektorskim poljem \vec{F} na čestici koja putuje krivom C .

Zbog komputacijskih potreba obično taj integral izrazimo kao

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

gdje je $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$,

što već izgleda poznatije.

Primjer 3.21. Naći rad koji izvrši polje

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + 4xy^3\vec{j} + y^2x\vec{k}$$

na čestici koja prelazi preko pravougaonika C na razni $z = y$ sa slike.

Nekada je zgodno posmatrati vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$$

u 2-prostoru kao vektorsko polje u 3-prostoru pomoću

$$\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Ako je R regija u xy ravni ograničena jednostavnim, zatvorenim, dio po dio glatkom krivom C , onda možemo tretirati R kao ravnu površ. Dakle, ako orijentišemo R i C suprotno od kazaljke na satu posmatrajući odozgo sa pozitivnog dijela z -ose, dobivamo

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} dA.$$

Međutim, rotor je u ovom slučaju dosta jednostavan, naime

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Stoga dobivamo

$$\oint_C f dx + g dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA,$$

što je Greenova teorema! Dakle dokazali smo da je Greenova teorema u stvari posebni slučaj Stokesove teoreme!