1 Riemannova geometrija

1.1 Mnogostrukosti

Mnogostrukosti

Većina skupova na kojima trebamo da radimo analizu nisu linearni prostori. Površina sfere je poznat primjer glatkog skupa koji nema strukturu linearnog prostora!

Sfera nema koordinatnog početka (nula vektora). Također, na sferi ne možemo definisati sabiranje parova tačaka (slobodnih vektora) na način koji je konzistentan sa aksiomima linearnog prostora, niti možemo definisati konstantno vektorsko polje na takovoj površi.

Nelinearni prostori su od kozmološkog interesa su pogotovo 3-sfere i pseudosfere.

U ovom poglavlju ćemo razviti osnovne alate koji nam omogućuju da se bavimo i takvim prostorima, što se nazivan *račun na mnogostrukostima*.

Mnogostrukosti koje se pojavljuju u primjenama su dvojake. Prvo, imamo mnogostrukosti kao što je konfiguracijski prostor čvrstog tijela u slobodnom padu. Tačke ove mnogostrukosti su na primjer sve moguće rotacije. Izbor jedinične rotacije je proizvoljan i sve tačke ovog konfiguracijskog prostora su ekvivalentne. Iako će koordinate ovdje biti potrebne kako bi se opisale konkretne situacije, geometrijske strukture neće uključivati koordinate direktno. Drugo, imamo mnogostrukosti kao što je prostor energije, temperature, entropije, pritiska, zapremina, itd...

Ovdjekoordinate imaju direktnu fizikalnu interpretaciju. Iznenađujuće, metode bez koordinata koje su razvijene za prvi tip mnogostrukosti su također korisni i efektivni alati za mnogostrukosti sa određenim koordinatama!

Primjer 1.1. *Iako prostor i vrijeme imaju odvojene fizikalne interpretacije, nedisperzivna talasna jednačina*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

se često izučava u rotiranim koordinatama

$$u = t - x, \quad v = t + x$$

pa postaje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

Mnogostrukosti

Dobro 'ponašajući' skupovi sa dovoljno strukture na sebi da se na njima može raditi diferencijalni račun nazivaju se diferencijabilne mnogo strukosti ili skraćeno mnogostrukosti.

Najmanja struktura koju skup može imati bi nam omogućila da samo damo imena tačkama i da diskutujemo identitet tačaka i njihovo članstvo u raznim drugim skupovima.

Minimalna dodatna struktura je topologija, koja daje dovoljno strukture da se može rasprevljati o neprekidnosti krivih i preslikavanja. Skupovi koji se nazivaju mnogostrukostima imaju još više strukture i glatkost krivih i preslikavanja se također može razmatrati!

Glatke krive na mnogostrukostima imaju lokalne linearne aproksimacije koje se nazivaju tangentnim vektorima.

$\mathbb{R}^n$ naravno ima svu ovo strukturu i više. Dodatne strukture u $\mathbb{R}^n$ nam dozvoljavaju da definišemo prave, globalnu paralelnost i posebnu tačku koju nazivamo koordinatnim početkom.

Ovo nisu strukture koje obavezno zahtjevamo od mnogostrukosti. Definisat ćemo mnogostrukosti tako da lokalno izgledaju kao $\mathbb{R}^n$, ali da nemaju ovu prekomjernu strukturu.

Primjer 1.2. *Neka je P skup svih pravih linija koje prolaze kroz koordinatni početak u Euklidskom 3-prostoru. Vidjet ćemo uskoro da je ovaj skup mnogostrukost.*

Neka je G skup svih velikih krugova na sferi. Ovaj skup je također mnogostrukost.

Neka je Q skup svih trojki (x, y, z) osim $(0, 0, 0)$, modul relacija ekvivalencije

$$(x, y, z) \equiv (kx, ky, kz)$$

za sve realne brojeve k. Q je mnogostrukost sa esencijalno istom strukturom kao mnogostrukosti P i G.

Zajednička mnogostrukna struktura se naziva P^2, projektivni 2-prostor.

Karte

Kako bismo dodali strukturu mnogostukosti skupu, moramo pokazati kako se otvorena regija oko bilo koje tačke preslikava na injektivan i neprekidan način na otvorenu regiju u $\mathbb{R}^n$.

Inverzno preslikavanje također mora biti neprekidno.

Svako takvo preslikavanje se naziva *kartom*.

KArte zadovoljavaju uslov kompatibilnosti - kad god se dvije karte preklapaju na mnogostrukosti, one definišu preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ na samog sebe.

Ako je skup glatka mnogostrukost, onda će i ova preslikavanja biti glatka i imati glatke inverse.

Kolekcija svih kompatibilnih karti naziva se *atlas* mngostrukosti.

Primjer 1.3. *Svaki linearni vektorski prostor može biti pokriven jednom kartom koja preslikava svaki vektor na brojnu n-torku koja se dobija od njegovih komponenti u nekog bazi. Atlas se sastoji od svih karti koje su izvedene iz ove pomoću glatkih trasformacija, koje se nazivaju koordinatnim transformacijama.*

Sve n-dimenzionalne sfere S^n mogu se pokriti dvjema kartama koristeći se stereografskom projekcijom. Ako je n-sfera definisana kao skup svih tačaka u $(n+1)$-dimezionalnom Euklidskom prostoru koje zadovoljavaju

$$w^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

onda je karta za regiju $w \neq -1$ preslikavanje

$$(w, \vec{x}) \mapsto (\vec{x}/(1+w)).$$

Formalnije

Definicija 1.4. Preslikavanje $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \tau')$ naziva se *homeomorfizmom* (izomorfizam u kontekstu opće topologije) ako

1. f je bijekcija;
2. f i f^{-1} su neprekidne.

m-dimezionalna koordinatna karta ($m < \infty$) na topološkom prostoru $\mathcal{M}$ je par (U, ϕ) gdje je ϕ otvoreni podskup $\mathcal{M}$ (domen koordinatne karte) a $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^m$ je homemorfizam iz U na otvoreni podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$ sa uobičajeno topologijom.Ako je $U = \mathcal{M}$, onda je koordinatna karta globalno definisana; inače je lokalno definisana.

Neka su (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2) par m-dimenzionalnih koordinatnih karti sa $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Onda je *funkcija preklapanja* između dvije koordinatne karte preslikavanje $\phi_2 \circ \phi^{-1}$ iz otvorenog podskupa $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ na otvoreni podskup $\phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Atlas dimenzije m na $\mathcal{M}$ je porodica m-dimenzionalnih koordinatnih karti $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ t.d.

- $\mathcal{M}$ je pokriveno porodicom u smislu da je $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} U_i$;
- svaka funkcija preklapanja $\phi_j \circ \phi_i^{-1}, i, j \in I$ je C^∞ preslikavanje iz $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ na $\phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Za atlas kažemo da je kompletan ukoliko je maksimalan - tj. nije sadžan niti u jednom drugom atlasu.

Za kompletan atlas, porodica $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ naziva se *diferencijalna struktura* na $\mathcal{M}$ dimenzije m. Topološki prostor $\mathcal{M}$ se onda naziva *deiferencijalna mngostrukost* (ili m-mnogostrukost, ako treba navesti dimenziju eksplicitno).

Tačka $p \in U \subset \mathcal{M}$ ima koordinate $(\phi^1(p), \phi^2(p), \ldots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ u odnosu na kartu (U, ϕ), gdje su koordinatne funkcije $\phi^\mu : U \mapsto \mathbb{R}, \mu = 1, 2, \ldots, m$ definišu se pomoću projektivnih funkcija $u^\mu(x) := x^\mu$ kao

$$\phi^\mu(p) := u^\mu(\phi(p)).$$

Skupovi P i Q definisani ranije mogu dobiti mnogostruknu strukturu na isti način. Euklidske koordinate bilo koje tačke na pravoj liniji u skupu P daju brojnu trojku, dok relacija ekvivalencije skupa Q identifikuje brojne trojke koje pripadaju istoj liniji.

Kako bismo pokazali da je skup Q mnogostukost, pogledajmo tačku $(a, b, c) \in Q$. Pretpostavimo da je c najveći od njih. Onda je karta oko tačke (a, b, c) data sa preslikavanjem

$$(x, y, z) \mapsto (x/y, y/z)$$

za otvoreni skup tačaka koje zadovoljavaju $z \neq 0$. I karta i ovaj uslov su kompatibilni sa relaciojom ekvivalencije i ona preslikava cijeli skup Q osim kruga na cijelu ravan.

Međutim možemo definisati još dvije karte i svaka se tačka Q onda pojavljuje u jednoj od njih. Ako ovima dodamo sve druge kompatibilne karte, imamo atlas za Q.

Primjer 1.5. *Kružnica S^1: Kružnica S^1 se može smatrati kao podskup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$. Ako se taj prostor osposobi sa uobičajenom metričkom topologijom, onda je S^1 očito zatvoren i ograničen podskup i stoga, po Heine-Borelovoj teoremi, njegova podprostorna topologija je kompaktna.*

Generalno, nije moguće locirati tačku bilo gdje na tipičnoj m-mnogostrukosti sa samo jednom koordinatnom kartom. U slučaju S^1 jedna mogućnost je korištenje para preklapajućih uglovnih koordinata. Još jedna mogućnost je data sa

$$U_1 := \{(x, y) | x > 0\} \quad \phi_1(x, y) := y;$$
$$U_2 := \{(x, y) | x < 0\} \quad \phi_2(x, y) := y;$$

$$U_3 := \{(x,y)|y > 0\} \quad \phi_3(x,y) := x;$$
$$U_4 := \{(x,y)|y < 0\} \quad \phi_4(x,y) := x;$$

Primjetite da iako su koordinatne funkcije napisane kao funkcije i x i y, podrazumjeva se da su ove koordinate pod ograničenjem $x^2 + y^2 = 1$ i da (x,y) predstavlja tačku na kružnici sa ovom ograničenom vrijednošću x i y, tj. kružnica je skup dimenzije 1, a ne 2.

Kako bismo vidjeli da su preklopne funkcije diferencijabilne, posmatrajmo na primjer preklop U_1 i U_3. U $U_1 \cap U_3$ imamo

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 < y < 1 \; i \; 0 < x < 1.$$

Stoga je $\phi_3(x)^{-1} = (x, (1-x^2)^{1/2})$ pa je

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(x) = (1-x^2)^{1/2},$$

koja je doista beskonačno diferencijabila za ovaj skup vrijednosti x i y.

Primjetite da ukoliko se $\mathbb{R}^2$ smatra mnogostrukošću, onda je S^1 komapktna jednodimenzionalna mnogostrukost. $\square$

Diferencijabilna preslikavanja

Veoma vaćan koncept u matematici je pojam preslikavanja koje prezervira strukturu između dva skupa koji su osprbljeni sa istom vrstom matematičke strukture. Npr. u teoriji grupa, ovo bi bilo homomorfizmi; U topologiji ovo bi bilo neprekidno preslikavanje koje prezervira strukturu između dva topološka prostora.

U diferencijalnoj geometriji, ulogu preslikavanja koje prezervira strukturu igra C^r-funkcija između dvije mnogostrukosti koju definišemo na slijedeći način

Definicija 1.6. 1. Lokalna reprezentacija funkcije f (sa mnogostrukosti $\mathcal{M}$ na mnogostrukost $\mathcal{N}$) u odnosu na koordinatne karte (U, ϕ) i (X, ψ) respektivno na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ je preslikavanje

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \phi(U) \mapsto \mathbb{R}^n.$$

2. Preslikavanje $f_{\mathcal{M}} \mapsto \mathcal{N}$ je C^r-funkcija ako, za sva pokrivanja $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ pomoću koordinatnih susjedstava, lokalne reprezentacije su C^r funkcije iz standardne realne analize funkcije između topološskih vektorskih prostora $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$. Konkretno, diferencijabila funkcija je C^1 funkicija. Funkcija koja je C^∞ se naziva glatkom.

3. Funkcija $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$ naziva se C^r-difeomorfizam ako je f bijekcija sa osobinom da su i f i f^{-1} C^r funkcije.

1.2 Tangentni prostor i vektori

Jedan od osnovnih koncepta računa na mnogostukostima je pojam *tangentnog prostora*, prostor tangentnih vektora.

Ovaj koncept je zasnovan na intuitivnoj geometrijskoj ideji tangentne ravni na površ. Stoga je tangentni prostor u tački $\vec{x} \in S^n$ izgleda kao da bi trebao biti definisan kao

$$T_{\vec{x}} S^n := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Međutim, ispostavlja se da je struktura tangentnog prostora takeđer duboko povezana sa lokalnim diferencijabilnim osobinama funkcija na mnogostrukosti i ovo daje mnogo algebarskiji pogled na ideju. Ključno pitanje je stoga da razumijemo šta bi to trebalo zamijeniti intuitivnu ideju tangentnog vektora kao nečega što je tangentno na površ u uobičajenom smislu? Odgovor je da tangentni vektor treba razumjeti kao nešto što je tangentno na krivu u mnogostrukosti. Ključna stavka ovdje je da kriva leži u mnogostrukosti, ne u okružujućem $\mathbb{R}^{n+1}$ i ova ideja moće biti generalizovana na proizvoljne mnogostrukosti bez potrebe da ih se prvo ubaci u višedimenzionalni vektorski prostor!

Tangentnost dva preslikavanja je lokalno slaganje preslikavanja. Posmatrajmo dva preslikavanja, ϕ i ψ, oba $\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$. U svakoj tački ona se mogu presdstaviti pomoću Taylorovog reda. Ako se ove ekspanzije slažu do članova do reda p, kažemo da ova preslikavanja imaju tangentnost p-tog reda u toj tački. Mi ćemo ovdje samo koristiti tangentnost prvog reda.

Primjer 1.7. *Preslikavanja* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ *:*

$$u \mapsto (u, u^3), \quad u \mapsto (\sin u, 0)$$

su tangentna u $u = 0$.

Tangentnost za preslikavanja između mnogostrukosti se definira pomoću karti koristeći se prethodnom definicijom.

Tangentnost je struktura koju prezerviraju glatka preslikavanja.

Tangentni vektor

Tangentni vektor je abstrakcija koja treba predstavljati strukturu koja je zajednička klasi parametrizovanih krivih tangentnih u tački.

To je lokalna struktura preslikavanja oblika $\mathbb{R} \mapsto M$ u mnogostrukosti M. Tangentni vektor ćemo u stvari definisati da bude klasa ekvivalencije tangentnih krivih. Ovu klasu ekvivalencije možemo predstaviti na razne načine: pomoću nasumično izabranog člana ili pomoću numeričkog algoritma.

Tangenta na krivu $\gamma : s \mapsto \gamma(s)$ u $\gamma(s)$ ćemo označavati sa $\dot{\gamma}(s)$.

Prostor tangentnih vektora u tački p mnogostrukosti M ćemo označavati sa $T_p(M)$.

Tangentni vektor kao klasa ekvivalencije krivih

Definicija 1.8. *Kriva* na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je glatko, tj. C^∞, preslikavanje σ sa nekog intervala $(-\epsilon, \epsilon)$ sa realne prave na $\mathcal{M}$.

Dvije krive σ_1 i σ_2 su *tangentne* u tački $p \in \mathcal{M}$ ako

- $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$;
- U nekom lokalnom kordinatnom sistemu $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ oko tačke, dvije krive su 'tangentne' u uobičajenom smislu krivih u $\mathbb{R}^m$:

$$\frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t))|_{t=0} = \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t))|_{t=0}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

- *Tangentni vektor* u $p \in \mathcal{M}$ je klasa ekvivalencije krivih u $\mathcal{M}$ gdje je relacija ekvivalencije između dvije krive ta da su tangentne u tački p. Klasa ekvivalencije konkretne krive σ se označava sa $[\sigma]$.
- *Tangentni prostor* $T_p\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ u tački $p \in \mathcal{M}$ je skup svih tangentnih vektora u tački p.

  Tangentni snop $T\mathcal{M}$ je definisan kao $T\mathcal{M} := \cup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$.

  Postoji prirodno projektivno preslikavanje $\pi : T\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ koje povezuje svaki tangentni vektor sa pačkom $p \in \mathcal{M}$ u kojoj je tangentan. Inverzna slika (*nit* preko p) bilo koje tačke p pod preslikavanjem π je stoga skup svih vektora koji su tangentni na mnogostrukost u toj tački.

Ova je definicija konzistentna sa intuitivnom geometrijskom slikom. Ova se primjedba također da primjeniti na tangentni snop $T\mathcal{M}$ koji u slučaju sfere recimo izgleda kao

$$TS^n = \{(\vec{x}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} | \vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \wedge \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Tangentni vektor $v \in T_P\mathcal{M}$ se može koristiti kao izvod u pravcu na funkcijama f mnogostukosti $\mathcal{M}$ pomoću:

$$v(f) := \frac{df(\sigma(t))}{dt}|_{t=0},$$

gdje je σ bilo koja kriva u klasi ekvivalencije koju representira v, tj. $v = [\sigma]$.

Teorema 1.9. *Tangenetni prostor $T_p\mathcal{M}$ ima strukturu realnog vektorskog prostora!*

Tangentni vektori kao derivacije

Definicija 1.10. Derivacija u tački $p \in \mathcal{M}$ je preslikavanje $v : C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto \mathbb{R}$ koje zadovoljava:

1. $v(f+g) = v(f) + v(g) \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$
2. $v(rf) = rv(f) \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), r \in \mathbb{R}$
3. $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$

Skup svih derivacija u $p \in \mathcal{M}$ se označava sa $D_p\mathcal{M}$.

Veoma važan primjer derivacije je dat pomoću bilo koje koordinatne karte (U, ϕ) koja sadrži tačku p koja nas interesuje. Specifično, skup derivacija u p je definisan pomoću:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f := \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1}|_{\phi(p)}; \quad \mu = 1, 2, \ldots, \dim \mathcal{M}.$$

Lema 1.11. *Neka je (U, ϕ) koordinatna karta oko $p \in \mathcal{M}$ sa asociranim koordinatnim funkcijama $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ i takvim da je $x^\mu(p) = 0$ za svako $\mu = 1, 2, \ldots \dim \mathcal{M}$. Onda za svako $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ postoji $f_\mu \in C^\infty(\mathcal{M})$ tako da*

1. $f_\mu(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f$
2. $f(q) = f(p) + \sum_{\nu=1}^{m} x^\nu(q) f_\nu(q)$

za svako q iz nekog otvorenog susjedstva tačke p.

Posljedica 1.12. *Ako je $v \in D_p(\mathcal{M})$, onda je*

$$v = \sum_{\mu=1}^{m} v(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \tag{1}$$

Vektorska polja

Sada možemo razmatrati i vežnu generalizaciju dosadašnjih ideja i govoriti i o polju tangentnih vektora na isti način kao što je vektor pripisan svakoj tački $\mathcal{M}$.

Definicija 1.13. Vektorsko polje X na C^∞-mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je glatko pripisivanje tangentnog vektora $X_p \in T_p\mathcal{M}$ u svakoj tački $p \in \mathcal{M}$, gdje 'glatko' zanči da za svako $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, funkcija $Xf : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ definisana pomoću

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\mapsto \mathbb{R} \\ p &\mapsto (Xf)(p) := X_p(f) \end{aligned} \tag{2}$$

je beskonačno diferencijabilna. Vektorsko polje otvorenog podskupa $U \in \mathcal{M}$ je definisano na isti način osim što je gornji uslov zahtjevan za sve $f \in C^\infty(U)$ i tačke p u podskupu $U \in \mathcal{M}$.

Lie izvod

Vektorsko polje definisano pomoću jednačine (2) daje preslikavanje $X : C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto C^\infty(\mathcal{M})$ u kojem se slika Xf od $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definiše pomoću jednačine (2). Funkcija se Xf često naziva i *Lie izvodom* funkcije f duž vektorskog polja X i označava se sa $L_X f$ ili $\mathcal{L}_X f$.

Lie izvod ima sve osobine derivacije navedene nešto ranije i to implicira da je X linearno preslikavanje iz vektorskog prostora $C^\infty(\mathcal{M})$ u samog sebe. Stoga je X derivacija na prstenu $C^\infty(\mathcal{M})$ u tradicionalnom smislu te riječi. Neka je (U, ϕ) koordinatna karta na mnogostrukosti $\mathcal{M}$. Onda u svakoj tački p otvorenog skupa U možemo koristiti ekspanziju iz jednačine (1) za derivaciju X_p povezanu sa vektorskim poljem X definisanim na $\mathcal{M}$. Stoga, za svako $p \in U$,

$$\begin{aligned} (Xf)(p) = X_p f &= \sum_{\mu=1}^{m} X_p x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} (X x^\mu)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \end{aligned}$$

što zapisujemo kao

$$X_U = \sum_{\mu=1}^{m} X_U x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Napomena: U većini literature se znak sumacije u ovom slučaju izaostavlja, radi skraćenog pisanja (takozvana Einsteinova sumacija).

Funkcije $\{Xx^\mu, \mu = 1, 2, \ldots, m\}$ na U se zovu komponentama vektorskog polja X u odnosu na koordinatni sistem asociran sa kartom (U, ϕ). Često se označavaju kao X^μ.

Lie zagrada

Lie zagrada je važna u proučavanju simetrija i transformacijskih grupa (nešto kasnije). Ova diskusija treba pojasniti ideju tangentnog vektora na mnogostukosti i pripremiti nas za pojam tenzora koji slijedi.

Pretpostavimo da imamo dva vektorska polja A i B. Vektorsko polje je preavilo kojim biramo tangentni vektor u svakoj tački mnogostukosti. Ako nam je također data funkcija $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, onda možemo operisati na f sa A kako bismo u svakoj tački našli izvod of f u pravcu A, A(f), kao maloprije.

Primjer 1.14. *Izvod funkcije $f = x^2 + y^2$ u pravcu $(\partial/\partial x + \partial/\partial y)$ je*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2) = 2(x + y).$$

Stoga je $A(f)$ nova funkcija. Stoga možemo posmatrati vektorsko polje B koje djeluje na nju! Šta sad s ovom dvostrukom operacijom? Ona preslikava funkcije na funkcije - stoga da li je ona derivacija?

Primjer 1.15. *Vektor u tački $(0, 0)$ koji djeluje na $f(x, y) = x^2 + y^2$ mora dati nulu. Medjutim,*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2.$$

Ovo do sada nije iznenadjujuće. Ono što *jeste* značajno je to da *postoji* vektor skriven u drugim izvodima! Pogledajmo detaljnije AB. U koordinatnoj karti $(x^1, x^2, \ldots)$ imamo

$$A = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad B = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

i onda ako djelujemo na proizvod dvije funkcije f i g imamo

$$(BA)(fg) = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[a^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(fg)\right],$$

$$(BA)(fg) = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[a^\nu(f_{,\nu} g + f g_{,\nu})]$$

gdje zarezi označavaju parcijalne izvode.

$$\begin{aligned}(BA)(fg) &= b^\mu a^\nu[f_{,\nu\mu} g + f_{,\nu} g_{,\mu} + f_{,\mu} g_{,\nu} + f g_{,\nu\mu}] + \\ &+ b^\mu a^\nu_{,\mu}(f_{,\nu} g + g f_{,\nu})\end{aligned}$$

i kada ovo pokušamo spojiti ponovno dobivamo

$$(BA)(fg) = g(BA)f + f(BA)g + b^\mu a^\nu(f_{,\mu} g_{,\nu} + f_{,\nu} g_{,\mu}).$$

Ovaj treći izraz sadrži ’smeće’ koje uništava Leibnizovo pravilo, no ukoliko ga pogledamo, ono je simetrično. Stoga definišemo operator *Lie zagrade* sa

$$[B, A] = (BA - AB),$$

onda će on zadovoljavati

$$[B, A](fg) = f[B, A]g + g[B, A]f.$$

Onda će to biti derivacija (!) koja je osjetljiva samo na linearne članove u funkcijama na koje djeluje! Lie zagrada se jednostavno izračuna ako su vektori dati eksplicitno, koristeći

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] = 0.$$

i

$$[fB, gA] = fg[B, A] + fB(g)A - gA(f)B.$$

Opći izraz za komponente se mogu izčitati iz gornje kalkulacije

$$[B, A] = (b^\mu a^\nu_{,\mu} - a^\mu b^\nu_{,\mu})\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Lie zagrada zadovoljava Jacobijevu jednakost

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Kotangentni vektori

Za bilo koji realni vektorski prostor V postoji asocirani dualni prostor svih linearnih preslikavanja realne vrijednosti na V. Kada ovo apliciramo na vektorske prostore $T_p\mathcal{M}, p \in \mathcal{M}$ ova dobro znana konstrukcija ima najveću vrijednost.

- *Kotangentni vektor* u tački $p \in \mathcal{M}$ je realno linearno preslikavanje $k : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$. Vrijednost od k primjeneno na tangentni vektor $v \in T_p\mathcal{M}$ ćemo zapisivati sa $\langle k, v\rangle$ ili sa $\langle k, v\rangle_p$.
- *Kotangentni prostor* u $p \in \mathcal{M}$ je skup $T_p^*\mathcal{M}$ svih takvih linearnih preslikavanja, tj. on je dual vektorskog prostora $T_p\mathcal{M}$. Odatle slijedi da je i dualni prostor također vektorski prostor i da je $\dim T_p^*\mathcal{M} = \dim T_p\mathcal{M}[= \dim \mathcal{M}]$.
- *Kotangentni snop* $T^*\mathcal{M}$ je skup svih kotangentnih vektora u svim tačkama $\mathcal{M}$:

  $$T^*\mathcal{M} := \cup_{p\in\mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}.$$

  On je vektorski snop.

- 1-forma ω na $\mathcal{M}$ je glatko pripisivanje kotangentnog vektora ω_p svakoj tački $p \in \mathcal{M}$. U ovom kontekstu, glatko znači da je za bilo koje polje X na $\mathcal{M}$ realna funkcija na $\mathcal{M}$

  $$\langle \omega, X \rangle(p) := \langle \omega_p, X_p \rangle$$

  glatko.

Tenzori na mnogostrukostima

Sada kada imamo vektorski prostor, kao što je tangentni prostor $T_p\mathcal{M}$, onda cjelokupna tenzorska algebra nam postaje slobodna! Dakle, trebamo naglasiti ideju tenzora na mnogostrukostima.

Vektorsko polja, ne primjer, je izbor tangentnog vektora u svakoj tački i svaki od ovih živi u svom tangentnom prostoru. FUndamentalni pojam koji imamo je linearnost. Za tenzore na mnogostrukostia, zahtjevamo linearnost preko funkcija ne samo preko brojeva. Ovo forsira da su tenzori lokalni linearni operatori.

Primjer 1.16. *Operator Lie zagrade* $V \times V \mapsto V$ *;*

$$(a, b) \mapsto [a, b]$$

nije *tenzor tipa* $(1\ 2)$ *jer*

$$[fa, b] \neq f[a, b]$$

za funkcije f.

Kada je mnogostukost porivena sa više od jedne karte, moramo biti oprezni da povežemo tenzorska polja glatko od karte do karte.

Formalnije

Prije svega moramo da uvedemo (prisjetimo se) tenzorskog produkta $V \otimes W$ dva vektorska prostora V i W. Najopćiji i najmoćniji pristup je preko 'osobine univerzalne faktorizacije' u kojoj tenzorski proizvod prostora V i W definišemo da bude vektorski prosto, koji pišemo $V \otimes W$ i bilinearno preslikavanje $\mu : V \times W \mapsto V \otimes W$ sa osobinom da za svaki drugi vektorski prostor Z i bilinearno preslikavanje $b : V \times W \mapsto Z$ postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $\tilde{b} : V \otimes W \mapsto Z$ takvo da slijedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccccc} V & \times & W & \stackrel{b}{\rightarrow} & Z \\ & \downarrow \mu & & \nearrow \tilde{b} & \\ V & \otimes & W & & \end{array}$$

Ova definicija je generalna, ali je veoma apstraktna. Stoga iskoristit ćemo činjenicu da je za konačnodimenzionalne vektorske prostore postoji prirodan izomorfizam $j : V \otimes W \mapsto B(V^* \times W^*, \mathbb{R})$, gdje je $B(V^* \times W^*, \mathbb{R})$ vektorski prostor bilinearnih preslikavanja iz kartezijevog proizvoda $V^* \times W^*$ duala V i W u $\mathbb{R}$. Ovaj izomorfizam se definiše pomoću

$$j(v \otimes w)(k, l) := \langle k, v \rangle \langle l, w \rangle.$$

Primjenjujući ove ideje kontekstu diferencijalne geometrije, dobivamo slijedeču definiciju

Definicija 1.17. *Tenzor tipa* (r, s) u tački $p \in \mathcal{M}$ je element tanzorskog produkt prostora

$$T_p^{r,s}\mathcal{M} := \left[\bigotimes^{r} T_p\mathcal{M} \right] \otimes \left[\bigotimes^{s} T_p^*\mathcal{M} \right].$$

Notacija $\bigotimes^{r} V$ predstavlja vektorski prostor koji se formira uzimajući tenzorski proizvod skupa V sa samim sobom r puta.

Posebni slučajevi tenzora tipa (r, s) uključuju:

1. $T_p^{0,1}\mathcal{M} = T_p^*\mathcal{M}$
2. $T_p^{1,0}\mathcal{M} = (T_p^*\mathcal{M})^* \cong T_p\mathcal{M}$.
3. $T_p^{r,0}\mathcal{M}$ naziva se prostorom r-kontravarijantnih tenzora.
4. $T_p^{0,s}\mathcal{M}$ naziva se prostorom s-kovarijantnih tenzora.

Pojam n-forme

VEoma važan primjer tenzorskog polja je n-forma, gdje je $0 \leq n \leq \dim \mathcal{M}$. 0-forma je po definiciji funkcija u $C^\infty(\mathcal{M})$, dok smo 1-formu već definisali. FOrmalna definicija n-forme je

Definicija 1.18. n-forma je tenzorsko polje ω tipa $(0, n)$ koje je totalno simetrično u smislu da je za svaku permutaciju P po indeksima $1, 2, \ldots, n$,

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (-1)^{\deg(P)} \omega(X_{P(1)}, X_{P(2)}, \ldots, X_{P(n)})$$

gdje su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ proizvoljna vektorska polja na $\mathcal{M}$, a $\deg(P)$ je stepen permutacije P,tj. $+1$ ukoliko je permutacija parna, a -1 ukoliko je neparna. Skup svih n-formi na $\mathcal{M}$ označavat ćemo sa $A^n(\mathcal{M})$.

Interesuje nas tenzorski proizvod na n-formama. Medjutim, ukoliko je $\omega_1 \in A^{n_1}(\mathcal{M})$ a $\omega_2 \in A^{n_2}(\mathcal{M})$, onda $\omega_1 \otimes \omega_2$ jeste $(n_1 + n_2)$-kovarijantni tenzor, ali neće biti $(n_1 + n_2)$-forma, jer ne zadovoljava alternacijsko svojstvo u odnosu na sve indekse. Medjutim, taj problem rješavamo pomoću

Definicija 1.19. Ako je $\omega_1 \in A^{n_1}(\mathcal{M})$ a $\omega_2 \in A^{n_2}(\mathcal{M})$, *vanjski ili* $\wedge$-produkt ili *vanjski* proizvod polja ω_1 i ω_2 je (n_1+n_2)-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ definisana pomoću:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{1}{n_1! n_2!} \sum_{perm.P} (-1)^{\deg P} (\omega_1 \otimes \omega_2)^P,$$

gdje, ukoliko je ω bilo koje tenzorsko polje tipa $(0, n)$, permutirano tenzorsko polje ω^p tipa $(0, n)$ definišemo kao

$$\omega^P(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \omega(X_{P(1)}, X_{P(2)}, \ldots, X_{P(n)})$$

za sve vektore $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Vanjski izvod

Definicija 1.20. Ako je ω n-forma na $\mathcal{M}$ sa $1 \leq n \leq \dim \mathcal{M}$ onda je $vanjski$ proizvod od ω $(n+1)$-forma $d\omega$ koju definišemo sa

$$d\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{n+1}))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{n+1}).$$

za sva vektorska polja $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Slučaj za 1-forme je od posebnog značaja i tada se gornja komplikovana formula značajno pojednostavi i postaje

$$d\omega(X, Y) = X(\langle \omega, Y \rangle) - Y(\langle \omega, X \rangle) - \langle \omega, [X, Y] \rangle.$$

Vanjski izvod se ponaša veoma fino u odnosu na $\wedge$-proizvod. Specifično,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Simetrični tenzori

Simetrični tenzori tipa $(0\ 2)$, tenzori u prostoru $T_p^*\mathcal{M} \otimes T_p^*\mathcal{M}$ su posebno važni jer definišu metričke strukture! Također opisuju kristalnu optiku, eketričnu provodljivost, te neke probleme propagacije talasa. Ovi tenzori imaju reprezentaciju u tangentnom prostoru.