1 Tenzori u linearnim prostorima

1.1 Linearni i afini prostori

Tenzori u linearnim prostorima

Linearni i njima bliski afini prostori se natkriljuju nad svim u matematičkoj i fizikalnoj literaturi. Nije to samo zbog jednostavnosti linearnog prostora, već zbog toga što se lokalno ponašanje glatke funkcije može predstaviti linearnom funkcijom.

Najvažniji linearni prostor za nas je prostor tangentnih vektora u tački. Elementi ovog prostora su lokalne aproksimacije na glatke krive koje prolaze kroz datu tačku. Stoga je tangentni prostor lokalna slika cjelokupnog prostora kao takvog.

Ako nam je dat bilo koji linearni prostor, postoji cijela algebra vezanih prostora koji se sastoje od raznih linearnih i multilinearnih operatora. OVi operatori se nazivaju *tenzori*. Blisko vezani za ovo su *afini* prostori. Ovi prostori imaju svu strukturu linearnog prostora, osim što su sve tačke ekvivalentne- nedostaje im posebna tačka za kordinatni početak. Ovi su prostori važni stoga što formiraju arenu za mnogo fizičkih teorija.

Newtonova mehanika i specijalna relativnost su obje smještene u afine prostore. PRave linije i uniformna parametrizacija daju model za slobodno kretajuće čestice. U generalnoj relativnosti, ova afina struktura rezultira zbog toga što je specijalna relativnost lokalna aproksimacija generalne relativnosti. O linearnim prostorima je već mnogo toga rečeno, pa odmah prelazimo na kratko predstavljanje afinih prostora. *Afini* prostor ima manje strukture od vektorskog. Ako u nam date dvije tačke u afinom prostoru, afina struktura nam omogućava da nacrtamo pravu kroz njih.

On definiše pojam uniformnosti duž familije paralelnih linija. Nema pojma koordinatnog početka u afinom prostoru, niti ideje skaliranja!

Parametrizacija duž linije koja prolazi kroz dvije tačke u afinom prostoru nije jedinstvena. Transformacije parametra u

$$u \mapsto ku + b$$

mijenjaju jednu uniormnu parametrizaciju u drugu. Ako izdvojimo parametrizaciju koja ide od nula do jedan između tačaka, onda je struktura afinog prostora A data sa preslikavanjem:

$$\Lambda \ : \ A \times A \times \mathbb{R} \mapsto A; \ (a, b, k) \mapsto \Lambda_k(a, b)$$

sa uslovima

$$\Lambda_0(a, b) = a, \quad \Lambda_1(a, b) = b.$$

Ovo preslikavanje se, bez iznenađenja, naziva *afino preslikavanje*. Vjerovatno sada očekujete skup aksioma za preslikavanje Λ.

Interesantno, odgovarajući skup aksioma niti je očit niti je koristan! Bolji način opisivanja strukture afinog prostora je subtraktivan. Afini prostor je linearni prostor minus njegov početak. Ako nam je dat linearni prostor, lako možemo vidjeti da je afino preslikavanje

$$\Lambda_k(a, b) = a + k(b - a)$$

invarijantno pod promjenama koordinatnog početka.

Ovaj substraktivni stil definisanja strukture je manje intuitivan od direktnog impoziranja strukture, ali je često veoma efikasan i prirodan.

Slobodni vektori

Postoji moguća zabuna ovdje između vektorskih prostora koji odmah padaju na pamet matematičarima - apstraktni skupovi čije elemente možemo sabirati i skalirati - i ideje koja dolazi od 3-vektora o kojima razmišlja fizičar. 'Fizičarskom' vektoru je dozvoljeno da se slobodno kreće preko vektorskog prostora.

Da budemo precizniji, ove vektore nazivamo *slobodni* vektori. Vektore u smislu vektorskog prostora (sa jednim krajem u koordinatnom početku) nazivamo *vezanim* vektorima.

Očito, u afinom prostoru, samo je slobodan vektor dobro definisan pojam!

Kovektori

Za bilo koji vektorski prostor, linearni operatori koji preslikavaju vektore na skup realnih brojeva su veoma važni. Oni i sami formiraju vektorski prostor; ima istu dimenziju kao originalni vektorski prostor i naziva se *dualom*. Ovi se lienarni operatori nazivaju *kovektorima*.

Kovektor se može predstaviti paralelnim hiperpovršima. Za dati kovektor $\omega : V \mapsto \mathbb{R}$, skup $\hat{\omega}$ vektora za koje je $\omega \cdot v = 1$,

$$\hat{\omega} = \{v \in V | \omega \cdot v = 1\},$$

formira hiperpovrš u vektorskom prostoru i daje vjernu reprezentaciju za ω. Skaliranje i sabiranje se lako izvodi u ovoj reprezentaciji. I naravno, dual prostora V se označava sa V^*.

Tenzorska algebra

Počevši od bilo kojeg datog linearnog vektorskog prostora, možemo konstruisati algebru multilinearnih operatora koji nazivamo *tenzorska algebra*. Proizvod u ovoj algebri se može specificirati pomoću nekoliko jednostavnih pravila. Ali umjesto da ova pravila samo izvučemo iz šešira, prvo ih deduciramo za bilinearne operatore.

U smislu kovektora, kada je konkretni vektorski prostor koji posmatramo porstor tangentnih vektora, ovi dualni vektori se nazivaju I-formama. Recionalno pitanje koje se postavlja, ukoliko su nam dati kovektori, moemo li konstruisati bilinearne operatore iz njih? Bilinearni operator Ω djeluje na paru vektora po pravilima

$$\begin{aligned}\Omega \cdot (a+b, c) &= \Omega \cdot (a, c) + \Omega \cdot (b, c),\\ \Omega \cdot (a, b+c) &= \Omega \cdot (a, c) + \Omega \cdot (a, c),\\ \Omega \cdot (ka, b) &= \Omega \cdot (a, kb) = k\Omega \cdot (a, b).\end{aligned}$$

Prirodan način formiranja bilinearnog operatora od dva data kovektora je da pustimo da svaki od njih djeluje na jedan od vektora. Označimo kombinovani operator sa $\omega \otimes \nu$ i definišemo ga sa

$$\omega \otimes \nu \cdot (a, b) = (\omega \cdot a)(\nu \cdot b).$$

Objekti kao što su $\omega \otimes \nu$ se nazivaju tenzori, dok se operator $\otimes : (\omega, \nu) \mapsto \Omega \otimes \nu$ naziva tenzorski proizvod, dok se algebra koja je generisana pomoću ovog proizvoda naziva tenzorska algebra.

Svaki bilinearni operator može se napisati kao suma članova kao što su $\omega \otimes \nu$. Ovi se članovi nazivaju *monomijali*.

Primjer 1.1. *Neka su e_x, e_y, e_z baza Euclidskih vektora u 3-prostoru i neka su f^x, f^y, f^z dualna baza. Euclidska metrika je generisana pomoću bilinearnog operatora*

$$\mathcal{E} = f^x \otimes f^x + f^y \otimes f^y + f^z \otimes f^z.$$

Skup bilinearnih operatora formira vektorski prostor koji pišemo $V^* \otimes V^*$. Elementi se nazivaju tenzorima tipa $(0, 2)$.

Tenzori tipa $(2, 0)$ i $(1, 1)$ su također bilenerani operatori. Prvi djeluju na parovima kovektora, dok drugi djeluje na mješani par jednog vektora i jednog kovektora. Tanzorski proizvod $\otimes$ se može definisati na svim tenzorskim prostorima koristeći se pravilima koja smo do sada naveli. Proizvod je asocijativan

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes b \otimes c,$$

komutira sa realnim brojevima

$$ka \otimes b = a \otimes kb = k(a \otimes b),$$

i distributivan je preko adicije

$$a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c,$$

gdje su a, b, c tenzori a $k \in mathbbR$. Tenzorski proizvod se lako može proširiti sa skupova vektora i kovektora baze na opće tnezore. Možemo množiti tenzore tipa (p, q) sa tenzorima tipa (r, s), kako bismo dobili tenzore tipa $(p + r, q + s)$!

Od datog skupa vektora baze, možemo formirati bazu za tenzorske prostore koristeći se svim mogućim tenzorskim proizvodima odgovarajućeg tipa. Koeficijenti u ekspanziji pomoću ove baze se nazivaju *komponentama* tenzora. Ove komponente se često indeksiraju koristeći se superskriptom za vektorske termine i subskriptom za kovektorske termine.

Kontrakcija

Ako nam je dat rtenzorski prostor tipa (p, q), psotoje prirodna preslikavanja u tenzore tipa $(p-1, q-1)$, dakle u tenzore koji imaju jedan manje vektorski faktor i jedan manje kovektorski faktor. Ova prirodna preslikavanja se nazivaju *kontrakcije*.

Nazivaju se prirodnim jer ih svaki tenzorski prostor prima. Kako bismo kontrakovali, koristimo član po član prirodnu operaciju kovektora na vektoru.

Primjer 1.2. *U* $\mathbb{R}^3$*, tenzor*

$$T = e_x \otimes e_y \otimes f^x + e_y \otimes e_z \otimes f^x + e_x \otimes e_x \otimes f^y$$

je oblika $(2, 1)$*. Postojedva različita načina da kontrakujemo ovaj tenzor. Ako kontrakujemo prvi i treći faktor, imamo*

$$(f^x \cdot e_x)e_y + (f^x \cdot e_y)e_z + (f^y \cdot e_x)e_x = e_y$$

Ako kontrakujemo drugi i treći, dobivamo nulu. Ne možemo kontrakovati prvi i drugi, jer ovi prostori nisu dualni.

1.2 Alternacijski produkti

Bilinearni operatori imaju *simetrični* i *antisimetricni* dio. Ovi dijelovi se ponašaju značajno drugačije jedni od drugih i mnogi su tenzori koji su od fizičkog značaja isključivo jednog ili drugog tipa.

Tenzor metrike je npr. simetričan. Ovdje ćemo raspravljati neke greometrijske reprezentacije altarnacijskih tenzora. Alternacijski produkt dva vektora, koji se označava sa $\wedge$ se efiniše kao

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a.$$

Lako možemo produžiti $\wedge$ na trostruke i veće produkte:

$$a \wedge b \wedge c = a \otimes b \otimes c - a \otimes c \otimes b - b \otimes a \otimes c + b \otimes c \otimes a + c \otimes a \otimes b - c \otimes b \otimes a.$$

Ako su a i b vektori, onda se $a \wedge b$ zove *bivektor.* Bivektori imaju razne primjene i mogu npr. predstavljati dio 2-površi.

Napomena: kaoda je vektorski prostor promatranja prostor tangentnih vektora, dualni vektori (kovektori) se nazivaju 1-forme. Također možemo promatrati $\wedge$-proizvod 1-formi

$$\omega \wedge \nu = \omega \otimes \nu - \nu \otimes \omega,$$

što se naziva 2-forma. 2-forme npr. predstavljaju elektromagnetno polje u prostorvremenu! Ovaj $\wedge$-produkt je sličan vektorskom proizvodu, sem što je asocijativan.

Primjer 1.3. *Nađimo geometrijsku reprezentaciju za* 2*-formu* Ω *u dvije dimenzije. Takav* (02) *tenzor je preslikavanje*

$$\Omega : V \times V \mapsto \mathbb{R};\ (b, c) \mapsto \Omega \cdot (b, c).$$

Parcijalnom evaluacijom, to je također preslikavanje $\Omega : V \mapsto V^*$*,* $b \mapsto \Omega \cdot b = \Omega \cdot (b, \cdot))$*. Kako bismo počeli, izaberimo proizvoljan vektor* b *i uzmimo* $\Omega \cdot b$*, što je* 1*-forma. Kako je* Ω *alternirajuća,*

$$\Omega \cdot (b, b) = 0.$$

Sada uzmimo bilo koji drugi vektor c. Možemo li naći vektor c znajući samo što je na slici? Odogovor je da, jer zbog lienarnosti možemo skalirati c tako da

$$(\Omega \cdot b) \cdot c = 1.$$

Kako je Ω alternirajući, imamo

$$(\Omega \cdot c) \cdot b = -1,$$

pa skupa sa

$$\Omega \cdot (c, c) = 0,$$

moramo imati c kao na slici. Dakle, bilo koja slika kao prethodne mora biti reprezentacija Ω.

2 Specijalna relativnost

Specijalna relativnost

Specijalna relativnost daje veoma fin primjer korištenja geometrijske strukture kako bi se modelirala fizička realnost. Ovu geometrijsku strukturu je izmislio A. Einstein naglo u jednom trenutku nadahnuća i ona se ovako obično i predstavlja. Puno je instruktivnije da se ova struktura izgradi nivo po nivo.

Budite oprezni od naivnog srednjoškolskog uvjerenja da je fizički zakon matematička relacija između dvije prethodno definisane veličine. Situacija je takva da data matematička struktura reprezentuje datu fizičku strukturu. Tako na primjer, Newtonova mehanika ne kaže da je $F = ma$, sa F, m, a odvojeno definisano.

U stvari, ovaj zakon asertira da se struktura diferencijalnih jednačina drugog reda primjenjuje na kretanje mase. Falsifikacija Newtonove mehanike bi rekla recimo da pozicija i brzina nisu dovoljni za predikciju budućeg kretanja ili da je dovoljna samo pozicija za istu stvar. Ukoliko ne uviđate ovu logiku, ovi će se zakoni činiti cirkularnima.

Topološka struktura

Počinjemo sa najširom strukturom koja je korisna u klasičnoj fizici : *neprekidnost*! Asertiramo da neprekidno preslikavanje ψ : (događaji) $\rightarrow \mathbb{R}^4$ postoji. *Događaj* je primitivan pojam, koji odgovara određenoj lokaciji u nekom određenom vremenu.

Događaji se dešavaju u fizičkom svijetu i preslikavanje ψ je operacijska procedura koja se koristi fizičkim aparatom.

Brojevi u $\mathbb{R}^4$ se nazivaju koordinatama. Preslikavanje ψ se smatra neprekidnim ako susjedni događaji imaju susjedne koordinate.

Čestica je nešto što se opisuje neprekidnom linijom događaja, što se naziva njenom $svjetovnom\ linijom$.

Izjava da takvo preslikavanje uopće postoji je značajna! Reći da ova matematička struktura odgovara svijetu je reći da je svijet 4-dimenzionalan! Ono što se na prvu čini samo definicijom je često puta mnogo više od toga...

Projektivna struktura

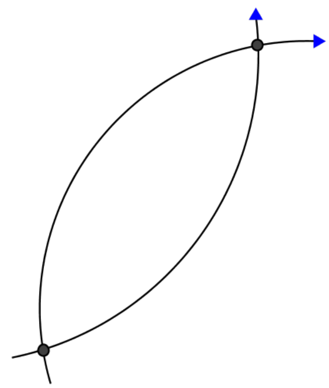
Svijet ima naravno više strukture od topologije događaja i čestica. Među česticama postoji podstruktura koja se naziva $slobodne$ čestice.

Struktura ovih slobodnih čestica se daje tvrdnjom da u klasi neprekidnim preslikavanja ψ možemo naći preslikavanja takva da su svjetovne linije slobodnih čestica prave linije u $\mathbb{R}^4$. Ova struktura se naziva *projektivna struktura*.

Primjetite da su cirkularno na ovaj način definisane i slobodne čestice i prave linije. Također, ne mora značiti da postoji samo jedna projektivna stuktura. Mi samo tvrdimo da postoji barem jedna!

Primjer 2.1. *Ne predstavlja svaki skup svjetovnih linija slobodne čestice. Npr. nijedno preslikavanje ne može ispraviti dvije svjetovne linije ako su date kao na slici.*

Pretpostavimo da se univerzum sastoji od samo dvije klase čestica, neutrona i elektrona i regiji prostora koja je popunjena uniformnim električnim poljem. Onda se ili



neutroni ili elektroni (ukoliko su daleko jedni od drugih) mogu uzeti kao slobodne čestice.

Nemoguća situacija za slobodne čestice

Konformalna struktura

Dodatni primitivni pojam je ideja specijalnih svjetovnih linija koje se nazivaju *svjetlosni signali*. Stuktura data ovdje je ona mogućih pravaca svjetovnih linija svjetlosnih signala u prostor vremenu, tzv. svjetlosna kupa.

Svjetlo poslano u specificiranom prostornom pravcu putuje sa jedinstvenom brzinom. Ova posebna klasa pravaca daje prostorvremenu ono što se naziva *konformalna struktura*.

Afina struktura

Postoji još struktura u svijetu! Sat je još jedan primitvni pojam. To je operacija koja dodjeljuje brojeve intervalima duž svjetovne linije. Ovi intervali se nazivaju vremenskim intervalima.

Afina struktura ovih satova se sadrži u dvije izjave. Prva je *univerzalnost*: Svi satovi su esencijalno isti. Druga je *uniformnost*. Duž projektivnih koordinata možemo naći posebne koordinate takve da je prirodna afina struktura $\mathbb{R}^4$ kompatibilna sa očitanjima sata. Također otkucaji sata moraju dijeliti interval na isti način kako to radi afina struktura.

Primjer 2.2. *Koristeći se samo linearnim i konformalnim strukturama, možemo definisati realtivnu brzinu izmedju svjetskih linija slobodnih čestica. Vremenski intervali sa slike se trebaju izračunati i relativna brzina v se onda definiše kao*

$$v = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Ova konstrukcija poredi vremenske intervale duž samo jedne svjetske linije i ovaj odnos zavisi samo o afinoj strukturi satova i afinoj strukturi svjetlosnih signala.

Svaka reprezentacija slobodnih čestica i satova u $\mathbb{R}^4$ koja je kompatibilna sa uobičajenom afinom strukturom $\mathbb{R}^4$ se zove *inercijalni referentni okvir*.

Kanonski referentni okviri

Kombinirajući afine i konformalne strukture, posmatrač može izabrati preslikavanje ψ koje je jedinstveno do rotacije i opće veličine. Zbog jednostavnosti, ovo opisujemo u dvije dimenzije. Počnemo sa preslikavanjima ψ koja su kompatibilna sa afinom strukturom.

Među ovima izaberemo one unutar kojih se svjetlosni signali kreću duž linija nagiba plus i minus 1. Preostala sloboda se sastoji od ekspanzija i kontrakcija duž ovih osa sa nagibom 45^o. Koristeći se koordinatama duž ovih osa, nalazimo da su ove transformacije date sa

$$(u, v) \mapsto (\alpha u, v/\alpha),$$

kao na slici.

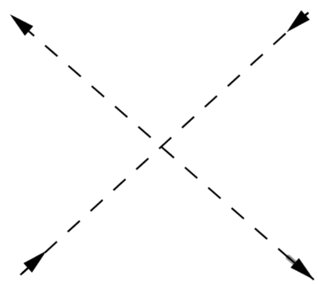
Akcija Lorentzove trasformacije

Ove transformacije se nazivaju *Lorentzove transformacije*. Ove transformacije zavise samo o afinoj i konformalnoj strukturi i čak i apsolutni satovi Newtonove mehanike rade ovdje! Koristeći se odgovarajućom Lorentzovom transformacijom, bilo koji posmatrač može napraviti svoju svjetsku liniju vertikalnom. Reprezentacija je sada jedinstena osim moguće opće magnifikacije.

Ovu reprezentaciju zovemo *kanonskim referentnim okvirom za tog posmatrača*.

Satovi specijalne relativnosti

Koristeći se kanonskim referentnim okvirom kao prije, posmatrač sada može proučavati detaljno ponašanje satova. Obzervacija je mjerenje jedinične vremenske intervale duž svjetovnih linija različitih koeficijenata pravca.



Takve obzervacije se mogu sumarizirati koristeći se afinom strukturom da prenese sve ove jedinične vremenske intervale tako da počinju u koordinatnom početku. Ponašanje satova koji zadovoljavaju naše pretpostavke se u potpunosti sadrži u skupu $\mathcal{G}$ tačaka koje su jedinični vremenski interval udaljeni od koordinatnog početka. Primjetite da je mjerenje skupa $\mathcal{G}$ bilo kojim jedinstvenim posmatračem kompletna teorija satova. Transformacija iz kanoničnog referentnog okvira jednog promatrača do drugog je Lorentzova transfomacija i određena je jedino afinom i konformalnom struktirom prostorvremena. Kad se satovi proučavaju u stvarnom svijetu, skup $\mathcal{G}$ je primjereno predstavljen hiperbolom

$$t^2 - x^2 = 1,$$

ili u četiri dimenzije sa hiperboloidom

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Mi koristimo sekundu kao jedinicu vremena i svjetlosnu sekundu kao jedinicu dužine. Divna osobina ovog ponašanja sata je da se ne mijenja Lorentzovom transformacijom. Ovo se naziva Lorentz-invarijantnost. Primjetite da formalizam može predstavljati satove koji nisu Lorentz-invavijantni.

Metrička struktura

Satovna struktura koju opisuje hiperbola $t^2 - x^2 = 1$ je posebna. Može se predstaviti simetričnim tenzorom tipa $(0\ 2)$. Skup jediničnih vremenskih intervala je dat vektorima a za koje je

$$\mathcal{G} \cdot (a, a)) = -1,$$

gdje je $\mathcal{G}$ tenzor

$$\mathcal{G} = f^x \otimes f^x - f^t \otimes f^t.$$

Jednostavno je provjeriti direktno da ovaj tenzor ima istu Lorentz invarijanciju kao i satovi koje predstavlja. Ova metrika predstavlja svjetovne linije svjetlosnih signala pomoću zahtjeva da vremenski intervali mjereni duž njih nestaju.

Upotreba kovarijansa

Ako računamo stvarne fizičke veličine, onda rezultati mogu biti nezavisni od reprezentacije koju koristimo. Ovo se naziva kovarijansa. Samo konačni rezultat kalkulacije mora biti kovarijantan.

Velika kalkulacijska prednost se medjutim dobije ako stavimo rezultate u oblik u kojem su sami različiti dijelovi kovarijantni.

Dopplerov efekt/pomak

Specijalna nam relativnost daje nekoliko dobrih primjera. Pretpostavimo da se posmatrač kreće sa 4-brzinom d salje svjetlosni signal drugom posmatraču koji se kreće 4-brzinom b. Neka je pravac svjetlosnog signala sat vektorom c. Doplerov efekt (promjena promatrane talasne dužine talasa zbog međusobnog približavanja ili udaljavanja izvora i promatrača) koji posmatramo će biti odnos $(1 + z)$ primljene talasne dužine prema emitovanoj talasnoj dužini.

Ovaj odnos može zavisiti o samo 3 vektora d, b, c i metričkom tenzoru (vidi sliku). Metrički tenzor nam omogućava da formiramo skalarne produkte i da normaliziramo vektore brzine

$$d \cdot d = b \cdot b = -1.$$

Prostorvremenska geometrija Dopplerovog pomaka

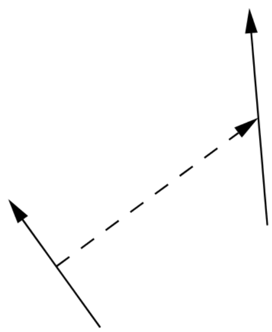
Svjetlosni signal zadovoljava

$$c \cdot c = 0.$$

Tačka ovdje označava unutrašnji proizvod koristeći se Lorentzovom metrikom. Dopplerov efekt ne može ovisiti o generalizaciji skalarnog trostrukog proizvoda, niti rezultat može ovisiti o intenzitetu c. Jedina mogućnost konzistentna sa ovim uslovima je

$$(1 + z) = F\left(\frac{c \cdot d}{c \cdot b}\right).$$

Kako bismo izračunali funkciju F, možemo uraditi kalkulacije u specijalnom referentnom okviru koji izaberemo zbog jednostavnosti, ili da smao primjetimo da ako mislimo o c ako o 1-formi koja opisuje geometrijski raspored vrhova talasa u prostorvremenu,



onda je $(c \cdot d)$ brzina kojom posmatrač sa brzinom d vidi prolaz vrhova talasa. Stoga moramo imati

$$(1+z) = \left(\frac{c \cdot d}{c \cdot b}\right)$$

Aberacija

Sličan problem uključuje jednog posmatrača d koji mjeri ugao između dva svjetlosna signala b i c. Ponovo, ovaj ugao mora biti neka skalarna kombinacija različitih unutrašnjih proizvoda ovih vektora i postoje tri takva koji su netrivijalni. Ugao naravo neće zavisiti od veličina b i c. Ima samo jedna takva kombinacija i moramo imati

$$\theta = F\left(\frac{b \cdot c}{(d \cdot b)(d \cdot c)}\right).$$

Kako bismo evaaluirali funkciju F, posmatramo dva svjetlosna signala i ugao između njih:

$$d = e_t, \quad b = e_t - e_x$$
$$c = e_t - \cos\theta e_x - \sin\theta e_y;$$

Ovdje koristimo e_x kako bismo označili jedinični vektor u x pravcu i tako dalje. Ovi vektori zadovoljavaju

$$d \cdot d = -1, \; b \cdot b = c \cdot c = 0.$$

Prethodna kombinacija se redukuje u

$$\frac{b \cdot c}{(d \cdot b)(d \cdot c)} = \cos\theta - 1.$$

Obje strane ove jednakosti su kovarijanse, tako da je ovo opći izraz.

Dihedralni proizvod

Posmatrajmo geometrijsku situaciju koju definišu dvije ravni, jedna spacificirana vektorima d i b, a druga vektorima b i c. U Euclidskoj geometriji presjek dvije ravni definiše *dihedralni ugao*. Ovaj ugao zavisi od kovarijantne funkcije skalarnih proizvoda tri vektora, sa slijedećim dodatnim osobinama:

1. Nezavisan je od veličina tri vektora (ne podrazumjevamo normalizaciju).
2. Nezavisan je od promjena d koje ga ostavljaju u istoj ravni i slično za c.

Drugi uslov se može zadovoljiti koristeći se altrnirajućim tenzorskim proizvodima $d \wedge b$ i $c \wedge b$. Ovi alternirajući proizvodi se nazivaju bivektorima i imaju osobinu da promjene d oblika

$$d \mapsto d + kb$$

ostavljaju bivektor nepromjenjenim.

Ovim bivektorima možemo dati metričku strukturu koristeći se definicijom

$$(d \wedge b) \cdot (c \wedge d) = (d \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(d \cdot d)$$

koja zadržava drugi uslov bez obzira da li je metrika Euklidksa ili Lorentzova. Naš problem uključuje dva bivektora, po jedan za svaku ravan, te stoga i tri unutrašnja proizvoda. Kombinacija koja je nezavisna od intenziteta d, b, c se lako vidi u bivektorskoj formi

$$\frac{[(d \wedge b) \cdot (c \wedge b)]^2}{[(d \wedge b) \cdot (d \wedge b)][(c \wedge b) \cdot (c \wedge b)]};$$

što je

$$\frac{[(d \cdot c)(b \cdot b) - (b \cdot c)(d \cdot b)]^2}{[(d \cdot d)(b \cdot b) - (d \cdot b)^2][(c \cdot c)(b \cdot b) - (c \cdot b)^2]}.$$

Euklidski dihedralni ugao θ u posebnoj poziciji je dat sa

$$b = e_z, \quad d = e_x,$$

$$c = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y,$$

i imamo

$$\frac{[\,]^2}{[\,][\,]} = \cos^2\theta.$$

Kako su obje strane ove jednačine kovarijanse ovdojeno, imamo u općem slučaju

$$\cos\theta = \frac{(d \cdot c)(b \cdot b) - (b \cdot c)(d \cdot b)}{[(d \cdot d)(b \cdot b) - (d \cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}[(c \cdot c)(b \cdot b) - (c \cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ovu kombinaciju tri vektora nazivamo dihedralni proizvod.

Dihedrale u prostorvremenu

Posmatrajmo tri posmatrača koji se kreću konstantnom brzinom dalje od nekog događaja. Mogu izmjenjivati svjetlosne signale i svaki posmatrač može mjeriti vidljivi ugao imađu druga dva. Ovdje imamo kombinaciju dva efekta: geometrijsko umanjenje kreirano njihovom separacijom i magnifikacija uzrokovana aberacijom. Sitiacija je samoslična u vremenu i vidljivi uglovi će biti nezavisni od vremena.

Vidljivi ugao će jedino zavisito od vektora 4-brzine tri posmatrača. Posmatrajmo sliku. Za posmatrača b, samo je svjetlosni signal bitan. Mijenjanje brzine izvora na takav način da ostane u istoj ravni ne utiče ne uglove. Posmatrač će jednostavno vidjeti izvor sa različitim Dopplerovim pomakom. Ponovo imamo situaciju sa simetrijom dihedralnog proizvoda. Poseban slučaj za laganu komputaciju je

$$b = e_t, \quad d = \cosh\psi e_t + \sinh\psi e_x,$$

$$c = \cosh\psi e_t + \sinh\psi(\cos\theta e_x + \sin\theta e_y),$$

iz čega nađemo opći izraz

$$\cos\theta = \frac{(b\cdot c)(d\cdot b) - (d\cdot c)(b\cdot b)}{[(d\cdot d)(b\cdot b) - (d\cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}[(c\cdot c)(b\cdot b) - (c\cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Primjetite promjenu znaka koju izaziva Lorentzova metrika.

Primjer 2.3. *Pretpostavimo da imamo šest ekvivalentnih posmatrača poredanih u heksagon u ravni koji se svi pomjeraju radijalno dalje od početka, slika. Šta je njihova radijalna brzina ako svaki posmatrač, kao što je npr. B, vidi svoja dva susjeda, A i C razdvojena sa $90°$?*

U okviru simetrije, imamo za normalizovane tangentne vektore

$$b = \cosh\psi e_t + \sinh\psi e_x,$$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \cosh\psi e_t + \sinh\psi\left(\frac{1}{2}e_x \pm \sqrt{\frac{3}{4}}e_y\right).$$

Pravi ugao zahtjeva

$$(b\cdot c)(b\cdot a) + (a\cdot c) = 0,$$

što nam daje

$$\sinh\psi = \sqrt{2}.$$

Pseudosferična geometrija

Ako uzmemo radijalno kretajuće posmatrače iz zadnjeg primjera kao tačke u prostoru posmatrača onda možemo definisati geometriju na tom prostoru. Uzmimo udaljenost između ovih tački da je relativna brzina između posmatrača na takav način da je aditivna. Normirani vektori brzine ovih posmatrača formiraju jedinični hiperboloid u prostorvremenu.

Zbog Lorentz invarijantnosti ova geometrija ima iste simetrije lap uobičajena pseudosferična geometrija pa je stoga njoj ekvivalentna! Ovdje sve projektujemo na jedinični hiperboloid koristeći se previm linijama kroz polazište. Svjetlosni zraci između posmatrača se projiciraju u geodezije na jediničnom hiperboloidu. Geometrija jediničnog hiperboloida nalik na vrijeme he ne-Euklidska geometrija površi sa uniformnom negativnom krivinom koja se naziva *pseudosfera*. Analogoni pravila sferične trigonometrije je sinusna teorema (za trougao sa stranicama a, b, c i suprotnim uglovima A, B, C, kao na slici),

$$\frac{\sinh a}{\sin B} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C},$$

kosinusna teorema

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cosh a$$

i zakon hiperbolnih kosinusa

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A.$$

Primjer 2.4. *Prethodni heksagon posmatrača sadrži 12 pseudosferičnih trouglova ABC sa slike. Imamo*

$$\cosh a = \frac{\cos 45^\circ + \cos 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ} = \sqrt{3}$$

Relativna brzina između posmatrača je

$$\cosh c = \frac{\cos 60^\circ + \cos^2 45^\circ}{\sin^2 45^\circ} = 1 + \sqrt{3}.$$