# 1 Banachovi prostori

## 1.1 Linearni vektorski prostori

### Linearni vektorski prostori

**Definicija 1.1.** Neka je $\Phi$ ili skup realnih ($\mathbb{R}$) ili skup kompleksnih ($\mathcal{C}$) brojeva. Neprazan apstraktan skup $V$, snabdjeven sa dvije binarne operacije $" + " : V \times V \to V$ (sabiranje) i $" \cdot " : \Phi \times V \to V$ (množenje skalarom) je (realan ili kompleksan) linearan vektorski prostor ako i samo ako su za sve $a, b \in \Phi$ i sve $u, v, w \in V$ zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. $u + v \in V$ (zatvorenost operacije sabiranja)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (asocijativnost sabiranja)
3. $(\exists 0 \in V)(\forall u \in V)\ 0 + u = u$ (egzistencija neutralnog elementa za sabiranje)
4. $(\forall u \in V)(\exists u^* \in V)\ u + u^* = 0$ (egzistencija inverznog elementa za sabiranje)
5. $u + v = v + u$ (komutativnost sabiranja)
6. $a \cdot u \in V$ (zatvorenost operacije množenja sa skalarom)
7. $a(bu) = (ab)u$ (asocijativnost množenja sa skalarom)
8. $(\exists 1 \in \Phi)(\forall u \in V)\ 1 \cdot u = u$ (egzistencija neutralnog elementa za množenje skalarom)
9. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ (distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje)
10. $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ (distributivnost u odnosu na sabiranje skalara)

Elemente skupa $\Phi$ nazivamo skalarima, a elemente skupa $V$ nazivamo vektorima. Množenje skalarom, $a \cdot u$, uobičajeno zapisujemo sa $au$, a za izraz $u + (-v)$ koristimo kraći zapis sa $u - v$. Gornja definicija radi sa proizvoljnim apstraktnim skupom $V$, ne uzimajući u obzir o kakvoj vrsti elemenata je riječ. Tako skup $V$ može biti skup realnih brojeva, ali takođe može biti skup beskonačnih nizova, skup integrabilnih funkcija, skup matrica i sl. U ispitivanju da li je $V$ linearan vektorski prostor, prije ispitivanja svih gornjih deset osobina, uobičajeno je prvo ispitati

- Da li $V$ sadrži nula element?
- Da li je $V$ zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja skalarom?

Ukoliko je odgovor negativan na jedno od ovih pitanja, $V$ nije linearan vektorski prostor.

**Primjer 1.2.** *Za $1 \leq p < +\infty$, posmatrajmo prostor $l_p(\Phi)$, svih sa $p$-tim stepenom sumabilnih nizova u $\Phi$ (realnih za $\Phi = \mathbb{R}$ ili kompleksnih za $\Phi = \mathcal{C}$),*

$$l_p(\Phi) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \Phi \ (n \in \mathbb{N}), \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\} .$$

*Za $x, y \in l_p(\Phi)$ i $\lambda \in \Phi$, neka je*

$$x + y \stackrel{def}{=} (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ \lambda x \stackrel{def}{=} (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ .$$

*Lako se provjerava da sa ovako definisanim operacijama $l_p(\Phi)$ zaista jeste linearan vektorski prostor.*

Jedino nije jasna zatvorenost operacije "+", a to obrazlažemo sljedećim rasuđivanjem.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{i=1}^{n} 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p) \leq 2^p \left( \sum_{i=1}^{\infty}(|x_n|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_n|^p) \right) < +\infty \ .$$

Na isti način možemo i na $l_\infty(\Phi)$ definisati operacije sabiranja i množenja skalarom, sa čime je i $l_\infty(\Phi)$ linearan vektorski prostor.

## 1.2 Normirani prostori

**Definicija 1.3.** Neka je $X$ linearan vektorski prostor na kome je definisana funkcija $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sa sljedećim osobinama:

1. $(\forall x \in X) \ \|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$, ako i samo ako $x = 0$,
3. $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X) \, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
4. $(\forall x, y \in X) \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada za funkciju $\|\cdot\|$ kažemo da je norma na $X$, a za $X$ kažemo da je normiran linearan vektorski prostor.

**Primjer 1.4.** *Primjeri normi na nekim poznatim nam skupovima:*

1. *Za* $x \in c$ *ili* $x \in c_0$, $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.
2. *Za* $x \in l_p$ *(*$1 \leq p < \infty$*),* $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.
3. *Za* $x \in l_\infty$, $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.
4. *Za* $x \in C[a,b]$, $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.
5. *Za* $x \in L_p(\Omega)$ *(*$1 \leq p < \infty$*),* $\|x\| = \left( \int_\Omega |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

Definišimo sada pomoću norme, funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, na sljedeći način

$$d(x,y) = \|x - y\| \quad , \quad x, y \in X \ .$$

Nije teško provjeriti da ovako definisana funkcija zadovoljava sve uslove za metriku, pa je na ovaj način uvedena metrika na $X$, za koju kažemo da je inducirana normom u datom prostoru. Samim tim imamo da je svaki normiran linearan vektorski prostor ujedno i metrički prostor, te sve što je rečeno za metričke prostore vrijedi i za normirane prostore.

**Definicija 1.5.** Dva normirana prostora $(X, ||\cdot||)$ i $(Y, ||\cdot||)$ su izometrički izomorfni, ili jednostavnije izometrični, ako postoji izomorfizam $f : X \to Y$, takav da za proizvoljan $x \in X$ vrijedi

$$||f(x)||_Y = ||x||_X \ .$$

## 1.3 Banachovi prostori

Iz metričkih prostora preuzimamo i definiciju kompletnosti, tj. normiran prostor je kompletan, ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan.

**Definicija 1.6.** Kompletan, normiran, linearan vektorski prostor se naziva Banachov prostor.

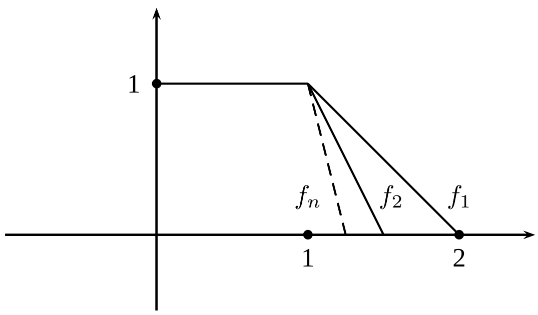
**Primjer 1.7.** *Neki od standardnih primjera Banachovih prostora su* $c$, $c_0$, $l_p$ *(*$1 \leq p \leq \infty$*),* $C[a,b]$, $L_p[a,b]$, *na kojima su norme uvedene kao u Primjeru 1.4.*

**Primjer 1.8.** *Posmatrajmo skup* $C[0,2]$, *neprekidnih funkcija na segmentu* $[0,2]$. *Za* $x \in C[0,2]$ *stavimo*

$$\|x\| = \int_0^2 |x(t)| dt \ ,$$

*čime smo definisali normu na $C[0,2]$. Posmatrajmo sada sljedeći niz funkcija*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 1+n-nx & ; \quad x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \in \left(1+\frac{1}{n}, 2\right] \end{cases} \quad , \; n \in \mathbb{N} \; .$$




Za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, imamo

$$\|f_n - f_m\| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \to 0 \; , \; (n, m \to \infty) \; .$$

Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz. Međutim, očigledno da $f_n \to f^*$ $(n \to \infty)$, gdje je

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 0 & ; \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

ali $f^* \notin C[0,2]$, tj. dati Cauchyjev niz nije konvergentan.

**Teorema 1.9.** *Svaki normiran linearan vektorski prostor se može kompletirati, tj. za svaki normiran linearan vektorski prostor $X$, postoji kompletan normiran linearan vektorski prostor $\overline{X}$, takav da je $X$ svuda gust u $\overline{X}$.*

**Definicija 1.10.** Neka je $X$ Banachov prostor i neka je $Y \subseteq X$. Ako je $Y$ sam za sebe Banachov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz $X$, kažemo da je $Y$ Banachov potprostor od $X$.

**Lema 1.11.** *Svaki zatvoreni vektorski potprostor Banahovog prostora je Banachov potprostor.*

**Teorema 1.12.** *Svaka dva konačnodimenzionalna linearna vektorska prostora, iste dimenzije, su izomorfni.*

**Posljedica 1.13.** *Svaki konačnodimenzionalan normiran linearan vektorski prostor je kompletan.*

# 2 Linearni operatori

Neka su $X$ i $Y$ dva proizvoljna prostora. Preslikavanje $A : X \to Y$ nazivamo operator, pri čemu koristimo standardnu definiciju preslikavanja. Dakle, pod terminom operator podrazumijevamo najopštiji oblik preslikavanja, tj. kada se područje originala nalazi u proizvoljnom prostoru $X$, a područje slika u proizvoljnom prostoru $Y$.

Sa $D_A \subseteq X$ ćemo označavati domen preslikavanja operatora $A$ i podrazumijevamo da je on linearan vektorski prostor. Sa $R_A \subseteq Y$ (ili sa $Rang(A)$) označavamo područje slika ili kodomen operatora $A$. Za $x \in X$, djelovanje operatora $A$ uobičajeno ćemo zapisivati sa $Ax$, umjesto $A(x)$.

**Definicija 2.1.** Za operator $A : X \to Y$ kažemo da je aditivan ako i samo ako za proizvoljne $x_1, x_2 \in D_A \subseteq X$, vrijedi

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \ .$$

**Definicija 2.2.** Za operator $A : X \to Y$ kažemo da je homogen ako i samo ako vrijedi

$$(\forall x \in D_A \subseteq X)(\forall \lambda \in \Phi) \ A(\lambda x) = \lambda Ax \ .$$

**Definicija 2.3.** Za operator $A : X \to Y$ kažemo da je linearan operator ako i samo ako je on istovremeno aditivan i homogen, tj. ako vrijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in D_A \subseteq X)(\forall \lambda, \mu \in \Phi) \ A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Ax_1 + \mu Ax_2 \ .$$

**Definicija 2.4.** Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Skup

$$Ker(A) = \{x \in X | \ Ax = 0\} \ ,$$

nazivamo jezgro operatora ili nul-prostor operatora. Skup

$$Rang(A) = \{y \in Y | \ (\exists x \in X) \ f(x) = y\} \ ,$$

nazivamo rang operatora $A$.

**Teorema 2.5.** *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Tada vrijedi:*

1. $Ker(A)$ *je potprostor od* $X$.
2. $Rang(A)$ *je potprostor od* $Y$.
3. *Ako su $X$ i $Y$ konačnodimenzionalni prostori onda je*

$$dim(X) = dim(Ker(A)) + dim(Rang(A)) \ .$$

**Definicija 2.6.** Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako i samo ako za svaku okolinu $V$ tačke $Ax_0$, postoji okolina $U$ tačke $x_0$, tako da je za svako $x \in U$, $Ax \in V$.

Ako su $X$ i $Y$ metrički prostori, gornju definiciju iskazujemo sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_A)(d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon) ,$$

a u normiranim prostorima sa

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_A)(||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow ||Ax - Ax_0||_Y < \varepsilon) .$$

Kažemo da je linearan operator neprekidan na skupu $D$ ako je neprekidan u svakoj tački skupa $D$.

**Definicija 2.7.** Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je $A$ ograničen linearan operator ako važi

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X)\ \|Ax\|_Y \leq M\,\|x\|_X\ . \tag{1}$$

Infimum svih brojeva $M$ za koje važi (1) nazivamo norma operatora $A$ i označavamo je sa $\|A\|_{X\to Y}$ ili jednostavno sa $\|A\|$, podrazumijevajući djelovanje operatora. Linearan operator je ograničen ukoliko mu je norma konačna i pri tome onda vrijedi

$$(\forall x \in X)\ \|Ax\|_Y \leq \|A\|_{X\to Y}\,\|x\|_X\ .$$

**Teorema 2.8.** *Linearan operator je neprekidan ako i samo ako je ograničen.*

**Teorema 2.9.** *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Operator $A$ je neprekidan ako i samo ako ograničene skupove iz $X$ preslikava u ograničene skupove u $Y$.*

U ispitivanju ograničenosti proizvoljnog operatora $A : X \to Y$ prvo nastojimo pokazati da za svako $x \in X$ vrijedi $||Ax|| \leq M||x||$, za neko $M > 0$ (po mogućnosti najbolju aproksimaciju), čime ustvari pokažemo ograničenost operatora ($||A|| \leq M$). Pokazati da je $||A|| = M$ znači naći konkretan element $x' \in X$, za koga je $||Ax'|| = M||x'||$. Ovo bi značilo da je $||A|| \geq M$, što sa ranije pokazanim daje ukupno $||A|| = M$.

**Primjer 2.10.** *Posmatrajmo operator $T : L_2(a, b) \to L_2(a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), zadat sa*

$$Tx(t) = f(t)x(t) ,$$

*gdje je $f \in C[a, b]$. Linearnost se jednostavno pokazuje, a za ograničenost imamo*

$$\begin{aligned} ||Tx|| &= \left(\int_a^b |f(t)x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |f(t)|^2|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max_{a\leq t\leq b} |f(t)| \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

*Dakle, $||Tx||_{L_2(a,b)} \leq ||f||_{C[a,b]}||x||_{L_2(a,b)}$, iz čega onda imamo $||T|| \leq ||f||_{C[a,b]}$.*

Kako je $f$ neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$, postoji $c \in [a,b]$ u kojoj funkcija uzima maksimalnu vrijednost (ne gubeći na opštosti, neka je $c \in (a,b)$). Za $n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo funkcije

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad |t-c| < \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad \text{inače} \end{cases}$$

Tada imamo

$$\frac{||Tx_n||}{||x_n||} = \frac{n}{2}\left(\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \to |f(c)| \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

zato što je $f$ neprekidna funkcija. Iz ovoga onda zaključujemo da je

$$||T|| = |f(c)| = \max_{a \le t \le b} |f(t)| = ||f||_{C[a,b]} \ .$$

Skup svih ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa prostora $X$ u prostor $Y$ označavat ćemo sa $\mathcal{L}(X,Y)$. Na $\mathcal{L}(X,Y)$ možemo definisati operacije sabiranja i množenja skalarom. Neka su $A,B \in \mathcal{L}(X,Y)$ i neka je $\lambda \in \Phi$. Za $x \in X$ definišemo

$$(A+B)x \stackrel{def}{=} Ax + Bx \ , \ (\lambda A)x \stackrel{def}{=} \lambda Ax \ .$$

Pri tome je $D_{A+B} = D_A \cap D_B$ i $D_{\lambda A} = D_A$. Neka su $x,y \in X$ i $\lambda, \mu, \alpha \in \Phi$. Tada imamo

$$\begin{aligned} (A+B)(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x + \mu y) + B(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda Ax + \mu Ay + \lambda Bx + \mu By \\ &= \lambda(A+B)x + \mu(A+B)y \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha A(\lambda x + \mu y) &= \alpha(\lambda Ax + \mu Ay) \\ &= \alpha\lambda Ax + \alpha\mu Ay \\ &= \lambda(\alpha A)x + \mu(\alpha A)y \ . \end{aligned}$$

Dakle, $A+B$ i $\alpha A$ su linearni operatori. Osim toga vrijedi

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (\|A\| + \|B\|)\, \|x\| \ , \ x \in X \ ,$$

i

$$\|(\alpha A)x\| \le |\alpha|\, \|A\|\, \|x\| \ ,$$

pa zaključujemo da su oni i ograničeni operatori, tj. $A+B, \alpha A \in \mathcal{L}(X,Y)$, čime smo pokazali da je $\mathcal{L}(X,Y)$ linearan vektorski prostor. Šta više, vrijedi

**Teorema 2.11.** *Neka je $X$ proizvoljan normiran prostor i $Y$ Banachov prostor. $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachov prostor.*

## 2.1 Inverzni operator

Neka je $A : X \to Y$ linearan operator čiji je domen $D_A \subseteq X$ i kodomen $R_A \subseteq Y$. Ukoliko za svako $y \in R_A$, jednačina $y = Ax$ ima jedinstveno rješenje $x \in D_A$, onda kažemo da postoji inverzno preslikavanje, u oznaci $A^{-1}$, preslikavanja $A$ i zapisujemo $x = A^{-1}y$. Pri tome je $D_{A^{-1}} = R_A$ i $R_{A^{-1}} = D_A$. Dakle, za postojanje inverznog operatora linearnog operatora $A : D_A \to R_A$, dovoljno je da $A$ bude injektivno preslikavanje.

**Teorema 2.12.** *Ako postoji, inverzni operator linearnog operatora je i sam linearan operator.*

**Teorema 2.13.** *Ako postoji inverzni operator operatora $A$, onda vrijedi $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*

**Teorema 2.14.** *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. $A$ ima ograničen inverzan operator na $R_A$ ako i samo ako vrijedi*

$$(\exists m > 0)(\forall x \in X)\ \|Ax\| \geq m\,\|x\|\ . \tag{2}$$

*Pri tome vrijedi $\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{m}$.*

**Lema 2.15.** *Neka je $M$ svuda gust skup u Banachovom prostoru $X$. Tada se svaki nenula vektor $x \in X$ može prikazati u formi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ ,$$

*gdje su $x_n \in M$ ($n \in \mathbb{N}$), takvi da je*

$$\|x_n\| \leq \frac{3}{2^n}\,\|x\|\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

**Teorema 2.16.** *Banachov teorem o inverznom operatoru Neka je $A$ ograničen linearan operator koji obostrano jednoznačno preslikava Banachov prostor $X$ na Banachov prostor $Y$. Tada je i inverzni operator $A^{-1}$ takođe ograničen.*

# 3 Linearni funckionali

Izučavajući operatore i njihove osobine, mi smo ustvari posmatrali preslikavanja sa proizvoljnog protora $X$ u proizvoljan prostor $Y$. Ukoliko prostor $Y$ preciziramo, tojest ukoliko je $Y = \mathbb{R}$ ili $Y = \mathcal{C}$, onda takvim operatorima dajemo poseban naziv.

Neka je $X$ proizvoljan linearan prostor. Preslikavanje $f : X \longrightarrow \Phi$, gdje je $\Phi = \mathbb{R}$ ili $\Phi = \mathcal{C}$, nazivamo funkcional. Dakle, fukcionali su specijalna vrsta operatora, pa sve iskazano o operatorima vrijedi i za funkcionale. Tako imamo, za funkcional $f : X \longrightarrow$

$\Phi$ kažemo da je aditivan, ako za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi $f(x+y) = f(x)+f(y)$ , a ako i za proizvoljan $\lambda \in \Phi$ vrijedi

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) ,$$

kažemo da je funkcional homogen. Za homogen i aditivan funkcional jednostavno kažemo da je linearan funkcional. I normu funkcionala definišemo kao normu operatora, stim da normu u kodomenu zamjenjujemo sa modulom,

$$||f|| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)| .$$

**Primjer 3.1.** *Neka je $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan fiksan element. Tada je sa*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ , \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) ,$$

*definisan linearan funkcional $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*

**Primjer 3.2.** *Neka je $x \in C[a, b]$ proizvoljan. Tada je sa*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt ,$$

*definisan linearan funkcional $f : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*Za fiksirano $t_0 \in [a, b]$, sa*

$$g(x) = x(t_0)$$

*je takođe definisan linearan funkcional na $C[a, b]$.*

**Primjer 3.3.** *Na prostoru $l_p$ ($1 \leq p \leq +\infty$) primjer linearnog funkcionala je*

$$f(x) = x_k \ , \ k \in \mathbb{N} ,$$

*gdje je $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_p$.*

Skup svih linearnih neprekidnih funkcionala, definisanih na normiranom linearnom vektorskom prostoru $X$, označavamo sa $X^*$. Dake, saglasno odgovarajućem skupu za operatore imamo $X^* = \mathcal{L}(X, \Phi)$. Na osnovu Teorema 2.11, prostor $X^*$ je Banachov prostor jer je $\Phi$ takav, i nazivamo ga *dualni, adjungovani* ili *konjugovani* prostor prostora $X$.

## 3.1 Geometrijski smisao

Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljan linearan funkcional definisan na linearnom vektorskom prostoru $X$. Posmatrajmo sve elemenata $x \in X$ koji zadovoljavaju jednačinu

$$f(x) = 0 .$$

Skup svih ovakvih $x \in X$ nazivamo jezgro funkcionala $f$ i označavamo ga sa

$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \ .$$

Jezgro funkcionala je vektorski potprostor prostora $X$. Zaista, za $x, y \in Ker(f)$ i za proizvoljne $\lambda, \mu \in \Phi$ imamo

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0 \ .$$

Međutim, jezgro funkcionala ne mora biti potprostor prostora $X$, tj. on nije obavezno zatvoren skup. Šta više, vrijedi

**Teorema 3.4.** *Neka je $X$ normiran prostor i $f$ linearan funkcional na $X$. $f$ je ograničen ako i samo ako je $Ker(f)$ zatvoren skup.*

**Posljedica 3.5.** *Neka je $f$ linearan funkcional na normiranom prostoru $X$. $f$ je neograničen funkcional ako i samo ako $Ker(f)$ je pravi podskup od $X$ i svuda gust u $X$.*

**Lema 3.6.** *Neka je $f$ proizvoljan netrivijalan, ograničen linearan funkcional na linearnom vektorskom prostoru $X$. Kodimenzija potprostora $Ker(f)$ jednaka je 1.*

Ukoliko dva funkcionala imaju ista jezgra, onda su oni proporcionalni. Zaista, neka za linearne funkcionale $f$ i $g$ vrijedi $Ker(f) = Ker(g)$. Neka je $x_0$ takav da je $f(x_0) = 1$. Tada na osnovu dokaza gornje leme imamo za proizvoljno $x$

$$x = f(x)x_0 + y \ , \ y \in Ker(f) = Ker(g) \ .$$

Djelujmo funkcionalom $g$ na $x$, dobijamo

$$g(x) = f(x)g(x_0) + g(y) = f(x)g(x_0) \ .$$

Ako bi sada imali da je $g(x_0) = 0$, to bi značilo da je funkcional $g$ identički jednak nuli, ali onda bi zbog jednakosti jezgara i funkcional $f$ bio identički jednak nuli, što nije moguće zbog izbora elementa $x_0$. Dakle $g(x_0) \neq 0$, a to onda znači $\frac{g(x)}{f(x)} = g(x_0)$, za proizvoljno $x$.

**Lema 3.7.** *Neka je $X$ linearan vektorski prostor i $L$ njegov potprostor kodimenzije 1. Tada postoji ograničen linearan funkcional na $X$, takav da je $Ker(f) = L$.*

Neka je $L$ potprostor prostora $X$, kodimenzije 1. Tada $L$ predstavlja hiperpovrš u prostoru $X$. Međutim, svaka klasa ekvivalencije iz $X/L$ takođe predstavlja hiperpovrš datog prostora i to "paralelnu" potprostoru $L$. Pri tome pod "paralelnošću" ovdje podrazumijevamo da se svaka od tih klasa može dobiti paralelnim pomjeranjem ili translacijom potprostora $L$ za neki vektor $x_0 \in X$,

$$\xi \in X/L \ , \ \xi = L + x_0 = \{y \mid y = x + x_0 \ , \ x \in L\} \ .$$

Ako je $x_0 \in L$, tada je $\xi = L$. U suprotnom, tojest ako $x_0 \notin L$, onda je $\xi \neq L$.

**Lema 3.8.** *Neka je $f$ proizvoljan netrivijalan, ograničen linearan funkcional na $X$. Tada je skup*

$$H = \{x \in X \mid f(x) = 1\} \ ,$$

*hiperpovrš u prostoru $X$, šta više, paralelna je potprostoru $Ker(f)$.*

## 3.2 Hahn-Banachov teorem

U svakom Banachovom prostoru preslikavanje identički jednako nuli, predstavlja jedan ograničen linearan funkcional. Postavlja se pitanje, da li postoje i drugi, netrivijalni funkcionali na proizvoljnom Banachovom prostoru?

Ako postoje, mogu li im se unaprijed pripisati, i u kojoj mjeri, izvjesne osobine? Specijalno, postoji li ograničen linearan funkcional jednak nuli na nekom pravom potprostoru Banachovog prostora, a da pri tome ne isčezava na čitavom prostoru? Na sva ova pitanja egzistencije, odgovor nam daje Hahn-Banachov teorem o produženju linearnog ograničenog funkcionala. Bez ovog teorema, današnja funkcionalna analiza bi bila sasvim drugačija. Po svojoj eleganciji i jačini, Hahn-Banachov teorem je omiljen u matemati-čkim krugovima. Neki od "nadimaka" ovog teorema su "Analitička forma aksioma izbora" i "Krunski dragulj funkcionalne analize". Neophodan je alat u funkcionalnoj analizi, ali i u drugim oblastima matematike, kao što su teorija upravljanja, konveksno programiranje, teorija igara, neophodan je u dokazu egzistencije Greenove funkcije, u formulaciji termodinamike i sl.

**Teorema 3.9** (Hahn-Banachov teorem, realan slučaj)**.** *Neka je $X$ realan Banachov prostor i neka je $L$ lineal u $X$. Neka je na $L$ definisan ograničen linearan funkcional $f$. Tada postoji ograničen linearan funkcional $f^*$, definisan na cijelom $X$, takav da vrijedi*

- $(\forall x \in L)\ f^*(x) = f(x)$ *i*
- $||f^*|| = ||f||$.

### Posljedice Hahn-Banacha

**Teorema 3.10.** *Neka je $x_0$ proizvoljan nenula element prostora $X$. Tada na $X$ postoji linearan funkcional $f^*$, takav da vrijedi*

- $||f^*|| = 1$.
- $f^*(x_0) = ||x_0||$.

**Teorema 3.11.** *Neka je $X$ Banachov prostor i neka je $L$ pravi potprostor od $X$. Neka je $x_0 \in X \setminus L$. Tada postoji ograničen linearan funkcional $f^*$ na $X$, takav da vrijedi*

- $||f^*|| = 1$.
- $f^*(x_0) = d = d(x_0, L)$.
- $(\forall x \in L)\ f^*(x) = 0$.

**Teorema 3.12.** *Neka je $X$ Banachov prostor i neka su $x, y \in X$. Ako za svaki $f \in X^*$ vrijedi $f(x) = f(y)$, tada je $x = y$.*

## 3.3 Reprezentacije ograničenih linernih funkcionala

**Teorema 3.13.** *Neka je $X$ konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije $n$ nad poljem $\Phi$. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od $X$ i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ proizvoljni elementi iz $\Phi$. Tada postoji jedinstven linearan funkcional $f : X \longrightarrow \Phi$ takav da vrijedi*

$$f(e_i) = a_i \ , \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ .$$

Navedeni teorem nam ustvari govori da je reprezentacija linearnog funkcionala $f : X \longrightarrow \Phi$ na konačnodimenzionalnom prostoru $X$ data sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \ , \tag{3}$$

gdje je $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_1 e_i \in X$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Phi$. Reprezentacija linearnog funkcionala $f$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru se može prikazati i u matričnom obliku. Neka je $x \in X$ proizvoljan vektor konačnodimenzionalnog prostora $X$. Prikažimo ga u obliku matrice formata "$n \times 1$",

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \ .$$

Sa "$a$" označimo matricu vrstu "$1 \times n$",

$$a = [a_1 \ a_2 \ldots a_n] \ ,$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati skalari iz $\Phi$. Proizvod ovih matrica definiše linearan funkcional na $X$, tj.

$$f(x) = [a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \ , \tag{4}$$

$$f(x) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_n\xi_n \ .$$

**Primjer 3.14.** *Preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = 2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3$, je linearan funkcional.*

*Neka su $x = \sum_{i=1}^{3} \xi_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^{3} \eta_i e_i$ dva proizvoljna vektora iz $\mathbb{R}^3$. Tada je, prema definiciji preslikavanja $f$,*

$$f(x) = 2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3 \ ,$$

$$f(y) = 2\eta_1 - \eta_2 + 4\eta_3 \ .$$

*Sa* $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$ *označimo vektore baze prostora* $\mathbb{R}^3$. *Odavde, na osnovu Teorema 3.13, vidimo da je* $f(e_1) = 2,\ f(e_2) = -1,\ f(e_3) = 4$.

Neka su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned}
\lambda x + \mu y &= \lambda\xi_1 e_1 + \lambda\xi_2 e_2 + \lambda\xi_3 e_3 + \mu\eta_1 e_1 + \mu\eta_2 e_2 + \mu\eta_3 e_3 \\
&= (\lambda\xi_1 + \mu\eta_1)e_1 + (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2)e_2 + (\lambda\xi_3 + \mu\eta_3)e_3 \ ,
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= f\left((\lambda\xi_1 + \mu\eta_1)e_1 + (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2)e_2 + (\lambda\xi_3 + \mu\eta_3)e_3\right) \\
&= (\lambda\xi_1 + \mu\eta_1)f(e_1) + (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2)f(e_2) + (\lambda\xi_3 + \mu\eta_3)f(e_3) \\
&= 2(\lambda\xi_1 + \mu\eta_1) - (\lambda\xi_2 + \mu\eta_2) + 4(\lambda\xi_3 + \mu\eta_3) \\
&= \lambda(2\xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3) + \mu(2\eta_1 - \eta_2 + 4\eta_3) \\
&= \lambda f(x) + \mu f(y) \ .
\end{aligned}$$

Kako ovo vrijedi za proizvoljne vektore $x, y \in \mathbb{R}^3$ i proizvoljne skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, zaključujemo da je dato preslikavanje $f$ linearan funkcional na $\mathbb{R}^3$ .

**Reprezentacije na Banachovim prostorima**

**Teorema 3.15.** *Ograničen linearan funkcional $f$ na prostoru $\ell_p$, $(1 < p < +\infty)$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \ ,$$

*gdje je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_q$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, pri čemu je $\|f\| = \|y\|_{\ell_q}$. Funkcionalom $f$ na $\ell_p$, tačka $y \in \ell_q$ je jednoznačno određena.*

**Teorema 3.16.** *Ograničen linearan funkcional $f$ na prostoru $\ell_1$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \ ,$$

*gdje je $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1,\ y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ i pri tome je $\|f\| = \|y\|$. Funkcionalom $f \in \ell_1^*$ jednoznačno je određen element $y \in \ell_\infty$.*

**Teorema 3.17.** *Ograničen linearan funkcional $f$ na prostoru $c_0$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \xi_i \ ,$$

*gdje je $y = (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ i $\|f\| = \|y\|$.Funkcionalom $f \in c_0^*$ tačka $y \in \ell_1$ jednoznačno je određena.*

**Teorema 3.18.** *Ograničen linearan funkcional $f$ na $C[a,b]$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) ,$$

*gdje je $x(t) \in C[a,b]$, $g(t)$ funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ koja se anulira u tački $t = a$ i pri tome je*

$$\|f\| = V_a^b(g) .$$

**Primjedba 3.19.** *Funkcional $f$ na $C[a,b]$ ne određuje jednoznačno funkciju ograničene varijacije g.*

**Teorema 3.20.** *Ograničen linearan funkcional $f$ na $L_p(a,b)$ $(1 < p < +\infty)$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \int_a^b y(t)x(t)dt ,$$

*gdje je $y \in L_q(a,b)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ i pri tome je*

$$\|f\| = \|y\| .$$

*Funkcionalom $f$ na $L_p$, funkcija $y$ u $L_q$ jednoznačno je određena.*

**Teorema 3.21.** *Ograničen linearan funkcional $f$ na prostoru $L(a,b)$ ima reprezentaciju*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt ,$$

*gdje je $y \in L_\infty(a,b)$ i $\|f\| = \|y\|_{L_\infty}$. Funkcionalom $f$ na $L$ funkcija $y \in L_\infty(a,b)$ jednoznačno je određena.*

**Konjugovani prostori i operatori**

Kao što smo vidjeli u sekciji o linearnim operatorima, sa $\mathcal{L}(X,Y)$ označavali smo skup svih ograničenih linearnih operatora sa prostora $X$ u prostor $Y$, gdje smo zahtjevali jedino da su $X$ i $Y$ normirani prostori. Na osnovu Teorema 2.11, pod pretpostavkom da je $Y$ Banachov prostor, $\mathcal{L}(X,Y)$ je sam za sebe Banachov prostor. Kada posmatramo sva ograničena linearna preslikavanja kod kojih je kodomen $Y = \mathbb{R}$ ili $Y = \mathcal{C}$, zbog činjenice da je $\mathbb{R}$ (ili $\mathcal{C}$) kompletan prostor, prostor $\mathcal{L}(X,\Phi)$ ($\Phi = \mathbb{R}$ ili $\Phi = \mathcal{C}$) je Banachov prostor i za njega ćemo koristiti oznaku $X^*$, a nazivamo ga *dualni, konjugovani* ili *adjungovani* prostor prostora $X$. Dakle, sa $X^*$ označavamo skup svih linearnih i ograničenih funkcionala definisanih na $X$,

$$X^* = \{f : X \to \Phi \mid f \text{ linearan i ograničen}\} .$$

Naravno da bi smo sada mogli posmatrati, za zadati Banachov prostor $X$, i skup svih neprekidnih funkcionala definisanih na $X^*$, tj. skup $(X^*)^* = X^{**}$, u kome linearne operacije i normu možemo uvesti na prirodan način, i sa kojima on takođe predstavlja jedan Banachov prostor. Slično bi smo mogli razmišljati i formirati prostore $X^{***}$, $X^{****}$ itd. Nama je ovde od interesa posebno prostor $X^{**}$ koga nazivamo drugi dualni ili adjungovani prostor prostora $X$.

Na osnovu teorema o reprezentaciji linearnih ograničenih funkcionala smo vidjeli naprimjer, da je dualni prostor prostora $c_0$ jednak prostoru $l_1$, tj. $c_0^* = l_1$, u smislu algebarske i metričke izomorfnosti. Takođe je $l_1^* = l_\infty$, $l_p^* = l_q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Praveći druge duale ovih prostora možemo zaključiti sljedeće veze, $c_0^{**} = l_1^* = l_\infty$ ili $l_p^{**} = l_q^* = l_p$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. U smislu algebarske i metričke izomorfnosti, prvi primjer nam govori da je $c_0 \subset c_0^{**}$, a drugi da je $l_p = l_p^{**}$. Sljedećim teoremom dajemo generalnu vezu između prostora i negovog drugog duala.

**Teorema 3.22.** *Proizvoljan Banachov prostor $X$ se može algebarski i izometri-čki uložiti u $X^{**}$, tj. vrijedi*

$$X \subseteq X^{**} \ .$$

**Definicija 3.23.** Ukoliko za neki Banachov prostor vrijedi $T_0(X) = X^{**}$ (odnosno $X = X^{**}$), tada kažemo da je $X$ refleskivan prostor.

Operator $T_0$ uveden u dokazu gornje teoreme se naziva prirodno ili kanonsko preslikavanje prostora $X$ u prostor $X^{**}$. Taj pojam preciziramo iz razloga da ako za neko drugo preslikavanje $T : X \to X^{**}$ vrijedi $T(X) = X^{**}$, to ne mora značiti refleksivnost prostora $X$.

**Teorema 3.24.** *Svaki potprostor refleksivnog Banachov prostora je takođe refleksivan.*

**Teorema 3.25.** *Banachov prostor je refleksivan ako i samo ako je njegov dual refleksivan prostor.*

**Teorema 3.26.** *Neka je $X$ Banachov prostor. Ako je $X^*$ separabilan, onda je i $X$ separabilan prostor.*

Da obrat gornje teoreme ne važi uvjeravamo se primjerom prostora $l_1$. Naime, $l_1$ jeste separabilan, ali njegov dual $l_1^* = l_\infty$, kao što smo to vidjeli u sekciji o separabilnosti, nije separabilan prostor.

### Konjugovani operator

Neka su $X$ i $Y$ Banachovi prostori i $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Neka je domen oparatora $A$ $(D_A)$ skup svuda gust u $X$. Za proizvoljan funkcional $g \in Y^*$ definišimo preslikavanje

$$f(x) = g(Ax) \ , \ x \in D_A \ .$$

Očigledno je $f$ dobro definisano za svako $x \in D_A$ jer je $Ax \in Y$. Kako je $g \in Y^*$ jasno je da je $f$ funkcional. Za proizvoljne $x_1, x_2 \in D_A$ i $\lambda, \mu \in \Phi$ je

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2) &= g(A(\lambda x_1 + \mu x_2)) = g(\lambda A x_1 + \mu A x_2) \\ &= \lambda g(Ax_1) + \mu g(Ax_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) , \end{aligned}$$

te je $f$ linearan. Takođe vrijedi

$$|f(x)| = |g(Ax)| \leq ||g|| \cdot ||Ax|| \leq ||g|| \cdot ||A|| \cdot ||x|| ,$$

tj. on je i ograničen funkcional (zbog ograničenosti funkcionala $g$ i operatora $A$). Kako je $D_A$ svuda gust u $X$, operator $A$ možemo bez promjene norme produžiti na čitav prostor, a time i funkcional $f$. Jednostavnosti radi, taj produženi funkcional označimo ponovo sa $f$. Dakle, na gore opisan način mi smo svakom funkcionalu na $Y$ pridružili jedan (tačno jedan) funkcional na $X$, te smo na taj način definisali jedno preslikavanje.

**Definicija 3.27.** Neka su $X, Y$ Banachovi prostori i $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Preslikavanje $A^* : Y^* \to X^*$, definisano sa

$$A^* g(x) = f(x) = g(Ax) \ , \ g \in Y^* \ , \ f \in X^* \ ,$$

nazivamo konjugovani, adjungovani ili dualni operator operatora $A$.

U gornjoj definiciji smo definisali konjugovani operator ograničenog operatora. Međutim, to smo mogli učiniti i za proizvoljan linearan operator, ali tada se oblast definisanosti konjugovanog operatora može bitno suziti u odnosu na $Y^*$, može se čak sastojati jedino iz trivijalnog funkcionala na $Y$, bez obzira što je domen operatora svuda gust u $X$.

**Teorema 3.28.** *Za $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ je $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ i pri tome vrijedi $||A^*|| = ||A||$.*

**Teorema 3.29.** *Konjugovani operator proizvoljnog operatora je uvijek zatvoren operator.*

**Primjer 3.30.** *Neka je $A_d : l_2 \to l_2$ desni shift operator, tj. za $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2$*

$$A_d x = (0, x_1, x_2, ...) \ .$$

*Na osnovu reprezentacije linearnih ograničenih funkcionala na $l_2$, za $g \in l_2$ onda imamo*

$$g(A_d x) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_d x)_i \eta_i = \sum_{i=2}^{\infty} x_{i-1} \eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \eta_{i+1} \ , \ y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2 \ .$$

*Dakle, $A_d^* = A_l$, konjugovani operator desnog shift operatora je lijevi shift operator, tj. operator sa djelovanjem*

$$A_l x = (x_2, x_3, ...) \ , \ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2 \ .$$

Neka je $K(s,t)$ neprekidna funkcija na kvadratu $\{(s,t)|\ 0 \le s \le 1\ ,\ 0 \le t \le 1\}$, pri čemu je za $q > 1$

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^q dt \le M\ ,\ \ \text{za svako}\ \ s \in [0,1]\ .$$

Definišimo preslikavanje $A : L_p[0,1] \to L_q[0,1]$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), sa

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt\ .$$

Zbog pretpostavljene neprekidnosti jezgra $K$, preslikavanje je dobro definisano i očigledno linearno. Osim toga vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 |Ax(s)|^q ds &\le \int_0^1 ds \left(\int_0^1 |K(s,t)||x(t)|dt\right)^q \\ &\le \int_0^1 ds \left(\int_0^1 |K(s,t)|^q dt \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{q}{p}}\right)\ ,\end{aligned}$$

pa je

$$||Ax|| \le \left(\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^q dtds\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le M^{\frac{1}{q}} ||x||_{L_p}$$

te je $A$ i ograničen operator. Odredimo sada konjugovani operator $A^*$. Proizvoljan funkcional $g$ na prosotoru $L_q[0,1]$ ima reprezentaciju

$$g(y) = \int_0^1 y(s)x_0(s)ds\ ,$$

gdje je $x_0 \in L_p[0,1]$, element jednoznačno pridružen funkcionalu $g$. Po definiciji konjugovanog oparatora, tada je

$$\begin{aligned}A^*g(x) = g(Ax) &= \int_0^1 Ax(s)x_0(s)ds = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(s,t)x(t)dt\right) x_0(s)ds \\ &= \int_0^1 x(t) \left(\int_0^1 K(s,t)x_0(s)ds\right) dt\ .\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo neki funkcional $f$ na $L_p[0,1]$, a opet zbog reprezentacije funkcionala je njemu jednoznačno pridruženi element dat sa

$$y_0(t) = \int_0^1 K(s,t)x_0(s)ds \in L_q[0,1]\ .$$

Zbog identifikacije prostora $L_p$ i $L_q^*$, posljednjom jednakošću je definisan konjugovani operator, tj.

$$A^*g = f\ ,$$

gdje smo poistovjetili funkcional $g$ sa njemu pridruženim elementom $x_0 \in L_p$ i takođe funkcional $f$ smo poistovjetili sa njemu pridruženom elementu $y_0 \in L_q$. Pri tome $A^*$ preslikava dakle $L_q^* = L_p$ u $L_p^* = L_q$.

**Teorema 3.31.** *Ako je* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *onda je* $A^{**} = (A^*)^* \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. *Operator* $A^{**}$ *je proširenje operatora* $A$*, tj.* $A \subseteq A^{**}$ *i pri tome je* $||A^{**}|| = ||A||$.

**Teorema 3.32.** *Neka je* $A : X \to Y$ *linearan operator takav da je* $D_A$ *svuda gust u* $X$. *Operator* $(A^*)^{-1}$ *postoji ako i samo ako je* $R_A$ *svuda gust u* $Y$.

**Teorema 3.33.** *Neka je* $A : X \to Y$ *linearan operator za koga je* $D_A$ *svuda gust u* $X$ *i* $R_A$ *svuda gust u* $Y$ *i neka postoji* $A^{-1}$. *Tada postoji i* $(A^*)^{-1}$ *i pri tome vrijedi*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \; .$$

**Teorema 3.34.** *Neka je* $A : X \to Y$ *linearan operator za koga je* $D_A$ *svuda gust u* $X$ *i* $R_A$ *svuda gust u* $Y$ *i neka postoji* $A^{-1}$. *Operator* $A^{-1}$ *je ograničen ako i samo ako je operator* $(A^*)^{-1}$ *definisan na cijelom* $X^*$ *i ograničem.*