1 Prelimirano

Kakav će ovo kurs biti?

Ne možemo tvrditi da ćemo u ovom kursu moći niti blizu pokriti sve moguće aspekte geometrije-e, ali ćemo pokušati pokriti što više interesantnih oblasti ove fundamentalne grane matematike. Na početku ćemo se koncentrirati se na slijedeće:

- Fraktali;
- Tenzori i primjena u specijalnoj teoriji relativnosti;
- Konstruktivni antički problemi;
- Diferencijalna geometrija (opća);
- Još neke teme (ako bude vremena!).

Ko sam ja?

Vedad Pašić

MMath University of Sussex

PhD University of Bath

Trenutno: Prirodno-matematički Fakultet, Univerzitet u Tuzli

email: vedad.pasic@untz.ba

Web: http://www.frontslobode.org/vedad/

2 Fraktali

2.1 Uvod u fraktale

Mandelbrotov skup

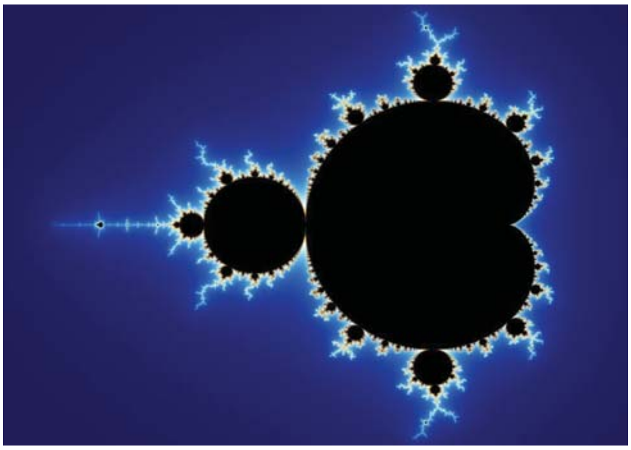
U prošlosti, matematika se pretežno bavila skupovima i funkcijama na koje se pretežno mogu primjeniti metode klasičnog diferencijalnog računa. Skupovi funkcija koje nisu dovoljno glatke ili regularne se se pretežno ignorirali.

Posljednih decenija ovaj se način razmišljanja promijenio. Shvatilo se da se veoma mnogo može reći o matematici na neglatkim skupovima.

Fraktalna geometrija daje generalni okvir unutar kojeg se izučavaju takvi iregularni skupovi. Iako realtivno često čujemo o "fraktalima", većina ne razumije šta oni predstavljaju i uopće šta su.

Mnogi su pokušaji napravljeni kako bi se fraktali definisali u čisto matematičkom smislu, ali su se takve definicije često ispostavile nezadovoljavajućim u općem kontekstu.

Ipak, fraktalna geometrija daje dosta tehnika za upravljanje fraktalima.



Definicija fraktala

Rečeno informalno, fraktal je grub ili fragmentiran geometrijski oblik koji se može podijeliti u dijelove od kojih je svaki (barem približno) umanjena kopija originala.

Ova osobina se naziva 'samo-sličnost'.

Riječ dolazi od latinskog *fractus*, što znači slomljen i termin je 1975. godine izmislio Benoît Mandelbrot.

Matematički fraktal je zasnovan na jednačini koja prolazi kroz iteraciju.

Definicija fraktala

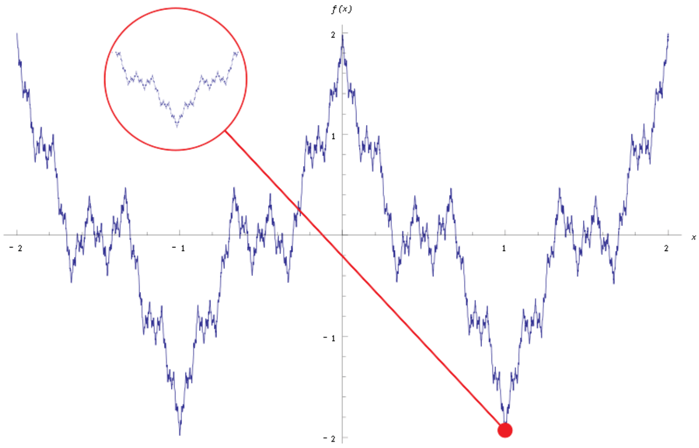
Fraktal obično ima slijedeće osobine:

- Ima finu strukturu do proizvoljno malih skaliranja.
- Previše je iregularan da bi bio opisan Euclidskom geometrijom.
- Samo-sličnost.
- Njegova Hausdorffova dimenzija je veća od topološke dimenzije.
- Ima jednostavnu rekurzivnu definiciju.

Definicija fraktala

Prirodni primjeri fraktala uključuju:

- Oblaci;
- Planinski lanci;
- Munje;
- Obalni pojasevi;
- Snježne pahuljice;
- Određeno povrće (karfiol ili brokula)...



Historija fraktala

1872. se pojavljuje funkcija čiji se graf može smatrati fraktalom.

Karl Weierstrass daje primjer funkcije sa neintuitivnom osobinom da je svugdje neprekidna, a nigdje diferencijabilna!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdje je $0 < a < 1$, b pozitivan neparan cijeli broj i

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Weierstrassova funkcija

Kochova pahuljica

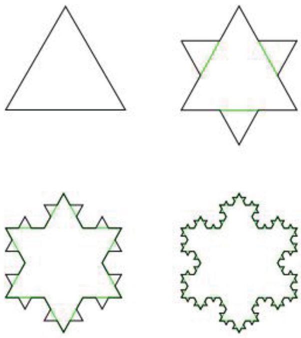
1904. Helge von Koch, nezadovoljan Weierstrassovom definicijom, daje mnogo više geometrijski primjer fraktala.

Kochova pahuljica

Površina Kochove pahuljice je

$$\frac{2s^2\sqrt{3}}{5}$$

gdje je s dužina jedne stranice originalnog trougla. Dakle, Kochova pahuljica ima beskonačnu granicu, a konačnu površinu! 1918 godine Bertrand Russell je priznao 'vrhunsku ljepotu' unutar nastajuće matematike fraktala. Slijedeći argument daje relativno grubu interpretaciju šta bi bila dimenzija ovog skupa, što pokazuje kako ona reflektira osobine skaliranja i samo-sličnosti.



Kao što vidimo na slici, Kochova kriva (jedna strana trougla) se sastoji od četiri kopije same sebe, skalirane faktorom $1/3$, pa stoga ima dimenziju

$$d = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,262.$$

Generalno, skup koji se sastoji od m kopija samog sebe skaliranih faktorom r smatramo da ima dimenziju $d = -\ln m / \ln r$. Broj koji dobijemo na ovaj način se obično naziva dimenzijom sličnosti skupa.

Fraktali kompleksne ravni

Iterirane funkcije u kompleksnoj ravni su ispitivane u kasnom 19om i ranom 20om stoljeću.

Taj rad je bio djelo Henri Poincaréa, Felixa Kleina, Pierrea Fatoua i Gastona Julia-e.

Međutim bez pomoći kompjuterske grafike, nismo imali mogućnost vizeulizacije ljepote mnogih objekata koji su bili otkriveni.

Mandelbrotov skup

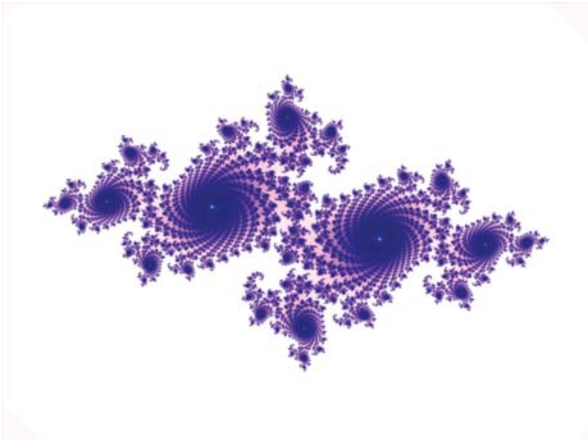
Mandebrotov skup je skup tačaka u kompleksnoj ravni čija granica formira fraktal. Matematički, ovaj skup se definiše kao skup kompleksnih tačaka $c \in \mathbb{C}$, za koje orbita nule pod iteracijama kvadratnog kompleksnog polinoma $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ostaje ograničena. Jasnije, kompleksni broj $c \in \mathbb{C}$ se nalazi u Mandebrotovom skupu ako, počevši od $z_0 = 0$, $|z_n|$ pod gornjom iteracijom nikada ne prelazi određeni broj, ma koliko veliko n postalo! Broj 1 nije u Mandelbrotovom skupu. No, broj i jeste!

$$0, i, (-1+i), -i, -1+i, -i, \ldots$$

Možemo li ovo vizuelizirati? Koristimo Mathematica-u!

Pa prije svega trebamo definisati funkciju Mandelbrot, koja vraća broj iteracija kojih moramo proći kako bi $|z_n|$ pod gornjom iteracijom prešao određenu vrijednost.

Pošto smo naravno ograničeni, neka je taj ograničavajući broj 2, a maksimalni broj iteracija 100.



Dakle, recimo

$$Mandelbrot[zc\_] := Module[\{z = 0, i = 0\},$$

$$While[i < 100\&\&Abs[z] < 2, z = z^2 + zc; i + +]; i];$$

Probajmo ovu funkciju na gornjim primjerima. Očito, od interesa su nam u stvari oni brojevi koji su "ni tamo, ni ovamo" dakle koji dosta dugo ne divergiraju, pa onda to učine! Recimo, broj

$$c = -1.2 + 0.193i$$

tek poslije 83 iteracije pređe vrijednost 2, dok već broj $c = -1.2 + 0.2i$ poslije 18 iteracija učini isto. Ovi granični brojevi su oni koji u stvari formiraju granicu Mandelbrotovog skupa! No kako ih prikazati?

Funkcija $DensityPlot$ - veoma slična $ContourPlot$-u.

Julia skup

U kompleksnoj dinamici, Julia skup $J(f)$ holomorfične funkcije f se informalno sastoji od onih tačaka čije se dugoročno ponašanje pod ponovljenim iteracijama funkcije f može drastično promjeniti pod proizvoljno malim perturbacijama.

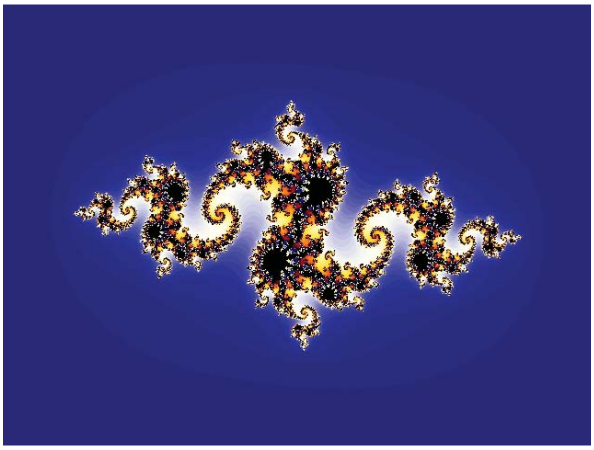
Veoma popularan dinamički sistem je dat sa porodicom kvadratnih polinoma, koji su naravno poseban slučaj racionalnih preslikavanja. Kvadratni polinomi se izražavaju kao

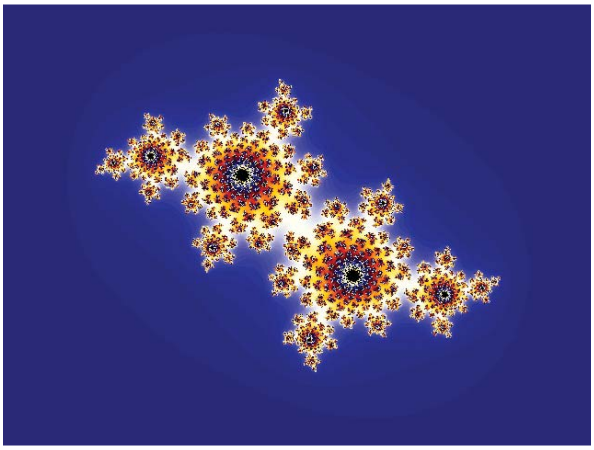
$$f_c(z) = z^2 + c,$$

gdje je c kompleksan parametar. Ovo se fundamentalno dakako razlikuje od prethodnog skupa i proizvodi čitav niz različitih skupova. Primjenimo sličan pristup kao maloprije.

Julia skup

Julia skup





Julia skup

Julia skup

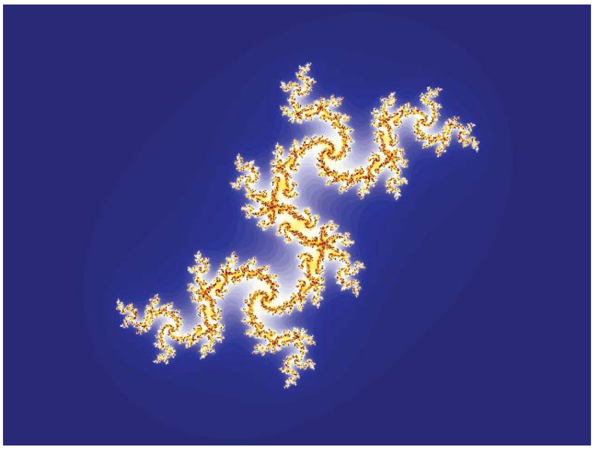
2.2 Fraktalna dimenzija

Hausdorffova mjera i dimenzija

OD raznih vrsta fraktalnih dimenzija, Hausdorffova dimenzija je vjerovatno najstarija i ima tu prednost da se može definisati za bilo koji skup!

Ona je također matematički pogodna, jer koristi pojam mjere, sa kojima možemo relativno lako upravljati. Za razumjevanje fraktalne dimenzije i uopće fraktalne geometrije, razumjevanje Hausdorffove dimenzije je veoma bitno.

Hausdorffova mjera



Sjetimo se da ako je U neprazan podskup n-dimenzionalnog Euklidovog prostora $\mathbb{R}^n$, dijametar skupa U definišemo kao

$$|U| = \text{diam }(U) = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}.$$

Ako je $\{U_i\}$ prebrojiva ili konačna kolekcija skupova dijametra ε koji pokrivaju F, tj.

$$F \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} U_i,$$

gdje je $0 < |U_i| < \varepsilon$ za svako i, akžemo da je $\{U_i\}$ ε-pokrivač skupa F. Pretpostavimo da je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ i da je s nenegativan broj. Za $\varepsilon > 0$, definišemo

$$H^s_\varepsilon(F) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^s : U_i \text{ je } \varepsilon \text{ prekrivač od } F\right\}.$$

Pišemo da je

$$H^s(F) = \lim_{\varepsilon\to 0} H^s_\varepsilon(F).$$

Kažemo da je $H^s(F)$ s-dimenzionalna Hausdorffova mjera skupa F. Hausdorffova mjera generalizira pojmove dužine, površine, zapremina, itd. Može se pokazati da je, za podskupe $\mathbb{R}^n$, n-dimenzionalna Hausdorffova mjera je, do konstantnog faktora, samo n.dimenzionalna Lebesgueova mjera, tj. n-dimenzionalna zapremina.

Stoga $H^n(F) = c_n \text{vol}^n(F)$, gdje je konstanta

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)},$$

gdje je Γ gamma funkcija u stvari samo zapremina n-dimenzionalne lopte radijusa 1.

Za parno n imamo

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!},$$

a za neparno n, jer je $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$C_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!!}.$$

Stoga imamo da je $H^0(F)$ samo broj tačaka u F.

$H^1(F)$ daje dužinu glatke krive F.

$H^2(F)$ je $\pi/4\cdot$ površina glatke površi F.

$H^m(F) = c_m \cdot vol^n(F)$ ako je F glatka m-dimenzionalna mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$, tj. m-dimenzionalna površ u klasičnom smislu. Slijedeća jednakost se naziva skalirajućom osobinom Hausdorffove mjere.

Ukoliko je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\lambda > 0$, onda

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F),$$

gdje je $\lambda F := \{\lambda x : x \in F\}$, tj. skup F skaliran pozitivnim brojem λ.

Hausdorffova dimenzija

Hausdorffova dimenzija, koja se nekad naziva i Hausdorff-Besikovičeva dimenzija, definiše se formalno na slijedeće način:

$$\dim_H F = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\},$$

tako da je $H^s(F) = \infty$ ako je $s < \dim_H F$, a $H^s(F) = 0$ ako je $s > \dim_H F$.

Ovo znači da postoji kritična vrijednost s u kojoj $H^s(F)$ 'skače' sa ∞ na 0 i ova vrijednost s predstavlja Hausdorffovu dimenziju skupa F.

Osobine Hausdorffove dimenzije

1. Ako je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, onda je $\dim_H F = n$, jer F sadrži loptu pozitivne n-dimenzionalne zapremine.

2. Ako je F neprekidno diferencijabilna m-dimenzionalna podmnogostrukost (tj. m-dimenzionalna površ) od $\mathbb{R}^n$,onda je $\dim_H F = m$.

3. Ako je $e \subseteq F$, tada je $\dim_H E \leq \dim_H F$.

4. Ako je $F_1, F_2, \ldots$ prebrojiv niz skupova, onda je

$$\dim_H \sup_{i=1}^{\infty} = \sup_{1<i<\infty} \{\dim_H F_i\}.$$

5. Ako je F prebrojiv skup, onda je $\dim_H F = 0$.

Dimenzija Minkowskog

U prošloj sekciji, vidjeli smo da je kalkulacija Hausdorffovih mjera dosta zamoran posao, čak i za dosta jednostave skupove. Sada smo zainteresovani za pronalaženje definicije dimenzije koja može biti više aplikativna u izračunavanju dimenzije skupa F.

Medjutim, nema brzih i lakih pravila za određivanje da li se neka vrijednost može racionalno smatrati dimenzijom. Faktori koji određuju prihvatljivost definicije dimenzije se pretežno prepoznaju pomoću iskustva i intuicije.

Ne trebamo pretpostaviti da različite definicije dimenzije daju istu vrijednost dimenzije za sve skupove, čak i za one koji bi se mogli smatrati 'finim'. Stoga, pojam dimenzije se treba odvojiti od pojma definicije dimenzije!

Dimenzija Minkowskog je jedna od najšire korištenih definicija. Relativno je jednostavna za izračuanti i pojam mjere se izbjegava. Ima nekoliko različitih verzija ove definicije. Prva je

Definicija 2.1. Neka je F neprazan ograničen skup u $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Gornja i donja dimenzija Minkowskog skupa F su date sa

$$\underline{\dim}_M F = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln\varepsilon},$$

$$\overline{\dim}_M F = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln\varepsilon},$$

a dimenzija Minkowskog sa

$$\dim_M F = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln\varepsilon},$$

ukoliko ovaj limes postoji, gdje je $N_\varepsilon(F)$ jedno od slijedećih

1. Najmanji broj zatvorenih kugli radijusa ε koji pokriva F;
2. Najmanji broj kocki stranice ε koje pokrivaju F;
3. Broj ε-mrežnih kocki koje presjecaju F;
4. najmanji broj skupova dijametra najviše ε koji pokrivaju F;
5. najveći broj disjunktnih lopti radijusa ε sa centrima u F.

Ovo je veoma korisna definicija, ali nije previše fina kada se treba doista izračunati dimenzija Minkowskog. Međutim, postoji ekvivalentna definicija ove dimenzije koja je dosta različite forme. Prije svega sjetimo se šta je to ε-okolina F_ε skupa F

$$F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < \varepsilon\},$$

gdje je

$$d(x, F) = \inf_{y\in F}\{d(x, y)\}.$$

Stoga je ε-susjedstvo skupa F, F_ε, skup svih tačaka udaljenih od F najviše ε - nekad se ovo naziva Minkowski kobasicom!

Lema 2.2. *Ako je $F \subseteq \mathbb{R}^n$, onda je*

$$\underline{\dim}_M F = n - \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln vol^n(F_\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

$$\overline{\dim}_M F = n - \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln vol^n(F_\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

gdje je F_ε ε-susjedstvo skupa F, a $vol^n F_\varepsilon$ njegova n-dimenzionalna zapremina.

Postoji veoma važan odnos između dimenzija Minkowskog i Hausdorffa. Ako F možemo pokriti sa $N_\varepsilon(F)$ skupova dijametra ε, iz skalirajućeg svojstva Hausdorffove mjere, slijedi

$$H^s_\varepsilon \leq N_\varepsilon(F)\varepsilon^s.$$

ako je $1 < H^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^s_\varepsilon(F)$, onda je

$$\ln N_\varepsilon(F) + s \ln \varepsilon > 0,$$

ako je ε dovoljno malo.Stoga je

$$s \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon},$$

pa očito imamo

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_M \leq \overline{\dim}_M$$

3 Tenzori u linearnim prostorima

3.1 Linearni i afini prostori

Tenzori u linearnim prostorima

Linearni i njima bliski afini prostori se natkriljuju nad svim u matematičkoj i fizikalnoj literaturi. Nije to samo zbog jednostavnosti linearnog prostora, već zbog toga što se lokalno ponašanje glatke funkcije može predstaviti linearnom funkcijom.

Najvažniji linearni prostor za nas je prostor tangentnih vektora u tački. Elementi ovog prostora su lokalne aproksimacije na glatke krive koje prolaze kroz datu tačku. Stoga je tangentni prostor lokalna slika cjelokupnog prostora kao takvog.

Ako nam je dat bilo koji linearni prostor, postoji cijela algebra vezanih prostora koji se sastoje od raznih linearnih i multilinearnih operatora. OVi operatori se nazivaju *tenzori*. Blisko vezani za ovo su *afini* prostori. Ovi prostori imaju svu strukturu linearnog prostora, osim što su sve tačke ekvivalentne- nedostaje im posebna tačka za kordinatni početak. Ovi su prostori važni stoga što formiraju arenu za mnogo fizičkih teorija.

Newtonova mehanika i specijalna relativnost su obje smještene u afine prostore. PRave linije i uniformna parametrizacija daju model za slobodno kretajuće čestice. U generalnoj relativnosti, ova afina struktura rezultira zbog toga što je specijalna relativnost lokalna aproksimacija generalne relativnosti. O linearnim prostorima je već mnogo toga rečeno, pa odmah prelazimo na kratko predstavljanje afinih prostora. *Afini* prostor ima manje strukture od vektorskog. Ako u nam date dvije tačke u afinom prostoru, afina struktura nam omogućava da nacrtamo pravu kroz njih.

On definiše pojam uniformnosti duž familije paralelnih linija. Nema pojma koordinatnog početka u afinom prostoru, niti ideje skaliranja!

Parametrizacija duž linije koja prolazi kroz dvije tačke u afinom prostoru nije jedinstvena. Transformacije parametra u

$$u \mapsto ku + b$$

mijenjaju jednu uniormnu parametrizaciju u drugu. Ako izdvojimo parametrizaciju koja ide od nula do jedan između tačaka, onda je struktura afinog prostora A data sa preslikavanjem:

$$\Lambda \ : \ A \times A \times \mathbb{R} \mapsto A; \ (a, b, k) \mapsto \Lambda_k(a, b)$$

sa uslovima

$$\Lambda_0(a, b) = a, \quad \Lambda_1(a, b) = b.$$

Ovo preslikavanje se, bez iznenađenja, naziva *afino preslikavanje*. Vjerovatno sada očekujete skup aksioma za preslikavanje Λ.

Interesantno, odgovarajući skup aksioma niti je očit niti je koristan! Bolji način opisivanja strukture afinog prostora je subtraktivan. Afini prostor je linearni prostor minus njegov početak. Ako nam je dat linearni prostor, lako možemo vidjeti da je afino preslikavanje

$$\Lambda_k(a, b) = a + k(b - a)$$

invarijantno pod promjenama koordinatnog početka.

Ovaj substraktivni stil definisanja strukture je manje intuitivan od direktnog impoziranja strukture, ali je često veoma efikasan i prirodan.

Slobodni vektori

Postoji moguća zabuna ovdje između vektorskih prostora koji odmah padaju na pamet matematičarima - apstraktni skupovi čije elemente možemo sabirati i skalirati - i ideje koja dolazi od 3-vektora o kojima razmišlja fizičar. 'Fizičarskom' vektoru je dozvoljeno da se slobodno kreće preko vektorskog prostora.

Da budemo precizniji, ove vektore nazivamo *slobodni* vektori. Vektore u smislu vektorskog prostora (sa jednim krajem u koordinatnom početku) nazivamo *vezanim* vektorima.

Očito, u afinom prostoru, samo je slobodan vektor dobro definisan pojam!

Kovektori

Za bilo koji vektorski prostor, linearni operatori koji preslikavaju vektore na skup realnih brojeva su veoma važni. Oni i sami formiraju vektorski prostor; ima istu dimenziju kao originalni vektorski prostor i naziva se *dualom*. Ovi se lienarni operatori nazivaju *kovektorima*.

Kovektor se može predstaviti paralelnim hiperpovršima. Za dati kovektor $\omega : V \mapsto \mathbb{R}$, skup $\hat{\omega}$ vektora za koje je $\omega \cdot v = 1$,

$$\hat{\omega} = \{v \in V | \omega \cdot v = 1\},$$

formira hiperpovrš u vektorskom prostoru i daje vjernu reprezentaciju za ω. Skaliranje i sabiranje se lako izvodi u ovoj reprezentaciji. I naravno, dual prostora V se označava sa V^*.

Tenzorska algebra

Počevši od bilo kojeg datog linearnog vektorskog prostora, možemo konstruisati algebru multilinearnih operatora koji nazivamo *tenzorska algebra*. Proizvod u ovoj algebri se može specificirati pomoću nekoliko jednostavnih pravila. Ali umjesto da ova pravila samo izvučemo iz šešira, prvo ih deduciramo za bilinearne operatore.

U smislu kovektora, kada je konkretni vektorski prostor koji posmatramo porstor tangentnih vektora, ovi dualni vektori se nazivaju I-formama. Recionalno pitanje koje se postavlja, ukoliko su nam dati kovektori, moemo li konstruisati bilinearne operatore iz njih? Bilinearni operator Ω djeluje na paru vektora po pravilima

$$\begin{aligned}\Omega \cdot (a+b, c) &= \Omega \cdot (a, c) + \Omega \cdot (b, c),\\ \Omega \cdot (a, b+c) &= \Omega \cdot (a, c) + \Omega \cdot (a, c),\\ \Omega \cdot (ka, b) &= \Omega \cdot (a, kb) = k\Omega \cdot (a, b).\end{aligned}$$

Prirodan način formiranja bilinearnog operatora od dva data kovektora je da pustimo da svaki od njih djeluje na jedan od vektora. Označimo kombinovani operator sa $\omega \otimes \nu$ i definišemo ga sa

$$\omega \otimes \nu \cdot (a, b) = (\omega \cdot a)(\nu \cdot b).$$

Objekti kao što su $\omega \otimes \nu$ se nazivaju tenzori, dok se operator $\otimes : (\omega, \nu) \mapsto \Omega \otimes \nu$ naziva tenzorski proizvod, dok se algebra koja je generisana pomoću ovog proizvoda naziva tenzorska algebra.

Svaki bilinearni operator može se napisati kao suma članova kao što su $\omega \otimes \nu$. Ovi se članovi nazivaju *monomijali*.

Primjer 3.1. *Neka su e_x, e_y, e_z baza Euclidskih vektora u 3-prostoru i neka su f^x, f^y, f^z dualna baza. Euclidska metrika je generisana pomoću bilinearnog operatora*

$$\mathcal{E} = f^x \otimes f^x + f^y \otimes f^y + f^z \otimes f^z.$$

Skup bilinearnih operatora formira vektorski prostor koji pišemo $V^* \otimes V^*$. Elementi se nazivaju tenzorima tipa $(0, 2)$.

Tenzori tipa $(2, 0)$ i $(1, 1)$ su također bilenerani operatori. Prvi djeluju na parovima kovektora, dok drugi djeluje na mješani par jednog vektora i jednog kovektora. Tanzorski proizvod $\otimes$ se može definisati na svim tenzorskim prostorima koristeći se pravilima koja smo do sada naveli. Proizvod je asocijativan

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c = a \otimes b \otimes c,$$

komutira sa realnim brojevima

$$ka \otimes b = a \otimes kb = k(a \otimes b),$$

i distributivan je preko adicije

$$a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c,$$

gdje su a, b, c tenzori a $k \in mathbbR$. Tenzorski proizvod se lako može proširiti sa skupova vektora i kovektora baze na opće tnezore. Možemo množiti tenzore tipa (p, q) sa tenzorima tipa (r, s), kako bismo dobili tenzore tipa $(p + r, q + s)$!

Od datog skupa vektora baze, možemo formirati bazu za tenzorske prostore koristeći se svim mogućim tenzorskim proizvodima odgovarajućeg tipa. Koeficijenti u ekspanziji pomoću ove baze se nazivaju *komponentama* tenzora. Ove komponente se često indeksiraju koristeći se superskriptom za vektorske termine i subskriptom za kovektorske termine.

Kontrakcija

Ako nam je dat rtenzorski prostor tipa (p, q), psotoje prirodna preslikavanja u tenzore tipa $(p - 1, q - 1)$, dakle u tenzore koji imaju jedan manje vektorski faktor i jedan manje kovektorski faktor. Ova prirodna preslikavanja se nazivaju *kontrakcije*.

Nazivaju se prirodnim jer ih svaki tenzorski prostor prima. Kako bismo kontrakovali, koristimo član po član prirodnu operaciju kovektora na vektoru.

Primjer 3.2. *U* $\mathbb{R}^3$*, tenzor*

$$T = e_x \otimes e_y \otimes f^x + e_y \otimes e_z \otimes f^x + e_x \otimes e_x \otimes f^y$$

je oblika $(2, 1)$*. Postojedva različita načina da kontrakujemo ovaj tenzor. Ako kontrakujemo prvi i treći faktor, imamo*

$$(f^x \cdot e_x)e_y + (f^x \cdot e_y)e_z + (f^y \cdot e_x)e_x = e_y$$

Ako kontrakujemo drugi i treći, dobivamo nulu. Ne možemo kontrakovati prvi i drugi, jer ovi prostori nisu dualni.

3.2 Alternacijski produkti

Bilinearni operatori imaju *simetrični* i *antisimetricni* dio. Ovi dijelovi se ponašaju značajno drugačije jedni od drugih i mnogi su tenzori koji su od fizičkog značaja isključivo jednog ili drugog tipa.

Tenzor metrike je npr. simetričan. Ovdje ćemo raspravljati neke geometrijske reprezentacije altarnacijskih tenzora. Alternacijski produkt dva vektora, koji se označava sa $\wedge$ se efiniše kao

$$a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a.$$

Lako možemo produžiti $\wedge$ na trostruke i veće produkte:

$$a \wedge b \wedge c = a \otimes b \otimes c - a \otimes c \otimes b - b \otimes a \otimes c + b \otimes c \otimes a + c \otimes a \otimes b - c \otimes b \otimes a.$$

Ako su a i b vektori, onda se $a \wedge b$ zove *bivektor*. Bivektori imaju razne primjene i mogu npr. predstavljati dio 2-površi.

Napomena: kaoda je vektorski prostor promatranja prostor tangentnih vektora, dualni vektori (kovektori) se nazivaju 1-forme. Također možemo promatrati $\wedge$-proizvod 1-formi

$$\omega \wedge \nu = \omega \otimes \nu - \nu \otimes \omega,$$

što se naziva 2-forma. 2-forme npr. predstavljaju elektromagnetno polje u prostorvremenu! Ovaj $\wedge$-produkt je sličan vektorskom proizvodu, sem što je asocijativan.

Primjer 3.3. *Nađimo geometrijsku reprezentaciju za* 2*-formu* Ω *u dvije dimenzije. Takav* (02) *tenzor je preslikavanje*

$$\Omega : V \times V \mapsto \mathbb{R};\ (b, c) \mapsto \Omega \cdot (b, c).$$

Parcijalnom evaluacijom, to je također preslikavanje $\Omega : V \mapsto V^*$*,* $b \mapsto \Omega \cdot b = \Omega \cdot (b, \cdot))$*. Kako bismo počeli, izaberimo proizvoljan vektor* b *i uzmimo* $\Omega \cdot b$*, što je* 1*-forma. Kako je* Ω *alternirajuća,*

$$\Omega \cdot (b, b) = 0.$$

Sada uzmimo bilo koji drugi vektor c. Možemo li naći vektor c znajući samo što je na slici? Odogovor je da, jer zbog lienarnosti možemo skalirati c tako da

$$(\Omega \cdot b) \cdot c = 1.$$

Kako je Ω alternirajući, imamo

$$(\Omega \cdot c) \cdot b = -1,$$

pa skupa sa

$$\Omega \cdot (c, c) = 0,$$

moramo imati c kao na slici. Dakle, bilo koja slika kao prethodne mora biti reprezentacija Ω.

4 Specijalna relativnost

Specijalna relativnost

Specijalna relativnost daje veoma fin primjer korištenja geometrijske strukture kako bi se modelirala fizička realnost. Ovu geometrijsku strukturu je izmislio A. Einstein naglo u jednom trenutku nadahnuća i ona se ovako obično i predstavlja. Puno je instruktivnije da se ova struktura izgradi nivo po nivo.

Budite oprezni od naivnog srednjoškolskog uvjerenja da je fizički zakon matematička relacija između dvije prethodno definisane veličine. Situacija je takva da data matematička struktura reprezentuje datu fizičku strukturu. Tako na primjer, Newtonova mehanika ne kaže da je $F = ma$, sa F, m, a odvojeno definisano.

U stvari, ovaj zakon asertira da se struktura diferencijalnih jednačina drugog reda primjenjuje na kretanje mase. Falsifikacija Newtonove mehanike bi rekla recimo da pozicija i brzina nisu dovoljni za predikciju budućeg kretanja ili da je dovoljna samo pozicija za istu stvar. Ukoliko ne uviđate ovu logiku, ovi će se zakoni činiti cirkularnima.

Topološka struktura

Počinjemo sa najširom strukturom koja je korisna u klasičnoj fizici : *neprekidnost*! Asertiramo da neprekidno preslikavanje ψ : (događaji) $\rightarrow \mathbb{R}^4$ postoji. *Događaj* je primitivan pojam, koji odgovara određenoj lokaciji u nekom određenom vremenu.

Događaji se dešavaju u fizičkom svijetu i preslikavanje ψ je operacijska procedura koja se koristi fizičkim aparatom.

Brojevi u $\mathbb{R}^4$ se nazivaju koordinatama. Preslikavanje ψ se smatra neprekidnim ako susjedni događaji imaju susjedne koordinate.

Čestica je nešto što se opisuje neprekidnom linijom događaja, što se naziva njenom $svjetovnom\ linijom$.

Izjava da takvo preslikavanje uopće postoji je značajna! Reći da ova matematička struktura odgovara svijetu je reći da je svijet 4-dimenzionalan! Ono što se na prvu čini samo definicijom je često puta mnogo više od toga...

Projektivna struktura

Svijet ima naravno više strukture od topologije događaja i čestica. Među česticama postoji podstruktura koja se naziva $slobodne$ čestice.

Struktura ovih slobodnih čestica se daje tvrdnjom da u klasi neprekidnim preslikavanja ψ možemo naći preslikavanja takva da su svjetovne linije slobodnih čestica prave linije u $\mathbb{R}^4$. Ova struktura se naziva *projektivna struktura*.

Primjetite da su cirkularno na ovaj način definisane i slobodne čestice i prave linije. Također, ne mora značiti da postoji samo jedna projektivna stuktura. Mi samo tvrdimo da postoji barem jedna!

Primjer 4.1. *Ne predstavlja svaki skup svjetovnih linija slobodne čestice. Npr. nijedno preslikavanje ne može ispraviti dvije svjetovne linije ako su date kao na slici.*

Pretpostavimo da se univerzum sastoji od samo dvije klase čestica, neutrona i elektrona i regiji prostora koja je popunjena uniformnim električnim poljem. Onda se ili neutroni ili elektroni (ukoliko su daleko jedni od drugih) mogu uzeti kao slobodne čestice.

Nemoguća situacija za slobodne čestice

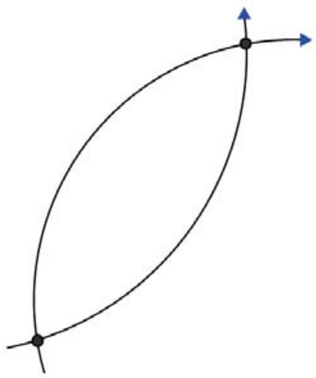
Konformalna struktura

Dodatni primitivni pojam je ideja specijalnih svjetovnih linija koje se nazivaju *svjetlosni signali*. Stuktura data ovdje je ona mogućih pravaca svjetovnih linija svjetlosnih signala u prostor vremenu, tzv. svjetlosna kupa.

Svjetlo poslano u specificiranom prostornom pravcu putuje sa jedinstvenom brzinom. Ova posebna klasa pravaca daje prostorvremenu ono što se naziva *konformalna struktura*.

Afina struktura

Postoji još struktura u svijetu! Sat je još jedan primitvni pojam. To je operacija koja dodjeljuje brojeve intervalima duž svjetovne linije. Ovi intervali se nazivaju vremenskim intervalima.



Afina struktura ovih satova se sadrži u dvije izjave. Prva je *univerzalnost*: Svi satovi su esencijalno isti. Druga je *uniformnost*. Duž projektivnih koordinata možemo naći posebne koordinate takve da je prirodna afina struktura $\mathbb{R}^4$ kompatibilna sa očitanjima sata. Također otkucaji sata moraju dijeliti interval na isti način kako to radi afina struktura.

Primjer 4.2. *Koristeći se samo linearnim i konformalnim strukturama, možemo definisati realtivnu brzinu izmedju svjetskih linija slobodnih čestica. Vremenski intervali sa slike se trebaju izračunati i relativna brzina v se onda definiše kao*

$$v = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Ova konstrukcija poredi vremenske intervale duž samo jedne svjetske linije i ovaj odnos zavisi samo o afinoj strukturi satova i afinoj strukturi svjetlosnih signala.

Svaka reprezentacija slobodnih čestica i satova u $\mathbb{R}^4$ koja je kompatibilna sa uobičajenom afinom strukturom $\mathbb{R}^4$ se zove *inercijalni referentni okvir*.

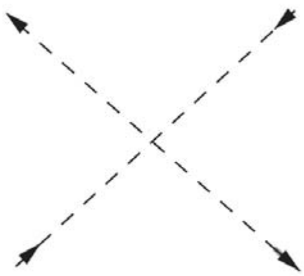
Kanonski referentni okviri

Kombinirajući afine i konformalne strukture, posmatrač može izabrati preslikavanje ψ koje je jedinstveno do rotacije i opće veličine. Zbog jednostavnosti, ovo opisujemo u dvije dimenzije. Počnemo sa preslikavanjima ψ koja su kompatibilna sa afinom strukturom.

Među ovima izaberemo one unutar kojih se svjetlosni signali kreću duž linija nagiba plus i minus 1. Preostala sloboda se sastoji od ekspanzija i kontrakcija duž ovih osa sa nagibom 45^o. Koristeći se koordinatama duž ovih osa, nalazimo da su ove transformacije date sa

$$(u, v) \mapsto (\alpha u, v/\alpha),$$

kao na slici.



Akcija Lorentzove trasformacije

Ove transformacije se nazivaju *Lorentzove transformacije*. Ove transformacije zavise samo o afinoj i konformalnoj strukturi i čak i apsolutni satovi Newtonove mehanike rade ovdje! Koristeći se odgovarajućom Lorentzovom transformacijom, bilo koji posmatrač može napraviti svoju svjetsku liniju vertikalnom. Reprezentacija je sada jedinstena osim moguće opće magnifikacije.

Ovu reprezentaciju zovemo *kanonskim referentnim okvirom za tog posmatrača*.

Satovi specijalne relativnosti

Koristeći se kanonskim referentnim okvirom kao prije, posmatrač sada može proučavati detaljno ponašanje satova. Obzervacija je mjerenje jedinične vremenske intervale duž svjetovnih linija različitih koeficijenata pravca.

Takve obzervacije se mogu sumarizirati koristeći se afinom strukturom da prenese sve ove jedinične vremenske intervale tako da počinju u koordinatnom početku. Ponašanje satova koji zadovoljavaju naše pretpostavke se u potpunosti sadrži u skupu $\mathcal{G}$ tačaka koje su jedinični vremenski interval udaljeni od koordinatnog početka. Primjetite da je mjerenje skupa $\mathcal{G}$ bilo kojim jedinstvenim posmatračem kompletna teorija satova. Transformacija iz kanoničnog referentnog okvira jednog promatrača do drugog je Lorentzova transfomacija i određena je jedino afinom i konformalnom struktirom prostorvremena. Kad se satovi proučavaju u stvarnom svijetu, skup $\mathcal{G}$ je primjereno predstavljen hiperbolom

$$t^2 - x^2 = 1,$$

ili u četiri dimenzije sa hiperboloidom

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Mi koristimo sekundu kao jedinicu vremena i svjetlosnu sekundu kao jedinicu dužine. Divna osobina ovog ponašanja sata je da se ne mijenja Lorentzovom transformacijom. Ovo se naziva Lorentz-invarijantnost. Primjetite da formalizam može predstavljati satove koji nisu Lorentz-invavijantni.

Metrička struktura

Satovna struktura koju opisuje hiperbola $t^2 - x^2 = 1$ je posebna. Može se predstaviti simetričnim tenzorom tipa $(0\ 2)$. Skup jediničnih vremenskih intervala je dat vektorima a za koje je

$$\mathcal{G} \cdot (a, a)) = -1,$$

gdje je $\mathcal{G}$ tenzor

$$\mathcal{G} = f^x \otimes f^x - f^t \otimes f^t.$$

Jednostavno je provjeriti direktno da ovaj tenzor ima istu Lorentz invarijanciju kao i satovi koje predstavlja. Ova metrika predstavlja svjetovne linije svjetlosnih signala pomoću zahtjeva da vremenski intervali mjereni duž njih nestaju.

Upotreba kovarijansa

Ako računamo stvarne fizičke veličine, onda rezultati mogu biti nezavisni od reprezentacije koju koristimo. Ovo se naziva kovarijansa. Samo konačni rezultat kalkulacije mora biti kovarijantan.

Velika kalkulacijska prednost se medjutim dobije ako stavimo rezultate u oblik u kojem su sami različiti dijelovi kovarijantni.

Dopplerov efekt/pomak

Specijalna nam relativnost daje nekoliko dobrih primjera. Pretpostavimo da se posmatrač kreće sa 4-brzinom d salje svjetlosni signal drugom posmatraču koji se kreće 4-brzinom b. Neka je pravac svjetlosnog signala sat vektorom c. Doplerov efekt (promjena promatrane talasne dužine talasa zbog međusobnog približavanja ili udaljavanja izvora i promatrača) koji posmatramo će biti odnos $(1 + z)$ primljene talasne dužine prema emitovanoj talasnoj dužini.

Ovaj odnos može zavisiti o samo 3 vektora d, b, c i metričkom tenzoru (vidi sliku). Metrički tenzor nam omogućava da formiramo skalarne produkte i da normaliziramo vektore brzine

$$d \cdot d = b \cdot b = -1.$$

Prostorvremenska geometrija Dopplerovog pomaka

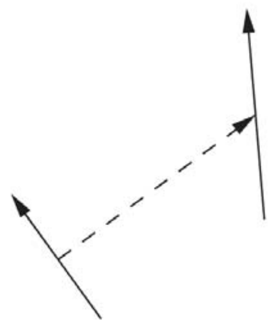
Svjetlosni signal zadovoljava

$$c \cdot c = 0.$$

Tačka ovdje označava unutrašnji proizvod koristeći se Lorentzovom metrikom. Dopplerov efekt ne može ovisiti o generalizaciji skalarnog trostrukog proizvoda, niti rezultat može ovisiti o intenzitetu c. Jedina mogućnost konzistentna sa ovim uslovima je

$$(1 + z) = F\left(\frac{c \cdot d}{c \cdot b}\right).$$

Kako bismo izračunali funkciju F, možemo uraditi kalkulacije u specijalnom referentnom okviru koji izaberemo zbog jednostavnosti, ili da smao primjetimo da ako mislimo o c ako o 1-formi koja opisuje geometrijski raspored vrhova talasa u prostorvremenu,



onda je $(c \cdot d)$ brzina kojom posmatrač sa brzinom d vidi prolaz vrhova talasa. Stoga moramo imati

$$(1+z) = \left(\frac{c \cdot d}{c \cdot b}\right)$$

Aberacija

Sličan problem uključuje jednog posmatrača d koji mjeri ugao između dva svjetlosna signala b i c. Ponovo, ovaj ugao mora biti neka skalarna kombinacija različitih unutrašnjih proizvoda ovih vektora i postoje tri takva koji su netrivijalni. Ugao naravo neće zavisiti od veličina b i c. Ima samo jedna takva kombinacija i moramo imati

$$\theta = F\left(\frac{b \cdot c}{(d \cdot b)(d \cdot c)}\right).$$

Kako bismo evaaluirali funkciju F, posmatramo dva svjetlosna signala i ugao između njih:

$$d = e_t, \quad b = e_t - e_x$$
$$c = e_t - \cos\theta e_x - \sin\theta e_y;$$

Ovdje koristimo e_x kako bismo označili jedinični vektor u x pravcu i tako dalje. Ovi vektori zadovoljavaju

$$d \cdot d = -1, \; b \cdot b = c \cdot c = 0.$$

Prethodna kombinacija se redukuje u

$$\frac{b \cdot c}{(d \cdot b)(d \cdot c)} = \cos\theta - 1.$$

Obje strane ove jednakosti su kovarijanse, tako da je ovo opći izraz.

Dihedralni proizvod

Posmatrajmo geometrijsku situaciju koju definišu dvije ravni, jedna spacificirana vektorima d i b, a druga vektorima b i c. U Euclidskoj geometriji presjek dvije ravni definiše *dihedralni ugao*. Ovaj ugao zavisi od kovarijantne funkcije skalarnih proizvoda tri vektora, sa slijedećim dodatnim osobinama:

1. Nezavisan je od veličina tri vektora (ne podrazumjevamo normalizaciju).

2. Nezavisan je od promjena d koje ga ostavljaju u istoj ravni i slično za c.

Drugi uslov se može zadovoljiti koristeći se altrnirajućim tenzorskim proizvodima $d \wedge b$ i $c \wedge b$. Ovi alternirajući proizvodi se nazivaju bivektorima i imaju osobinu da promjene d oblika

$$d \mapsto d + kb$$

ostavljaju bivektor nepromjenjenim.

Ovim bivektorima možemo dati metričku strukturu koristeći se definicijom

$$(d \wedge b) \cdot (c \wedge d) = (d \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(d \cdot d)$$

koja zadržava drugi uslov bez obzira da li je metrika Euklidksa ili Lorentzova. Naš problem uključuje dva bivektora, po jedan za svaku ravan, te stoga i tri unutrašnja proizvoda. Kombinacija koja je nezavisna od intenziteta d, b, c se lako vidi u bivektorskoj formi

$$\frac{[(d \wedge b) \cdot (c \wedge b)]^2}{[(d \wedge b) \cdot (d \wedge b)][(c \wedge b) \cdot (c \wedge b)]};$$

što je

$$\frac{[(d \cdot c)(b \cdot b) - (b \cdot c)(d \cdot b)]^2}{[(d \cdot d)(b \cdot b) - (d \cdot b)^2][(c \cdot c)(b \cdot b) - (c \cdot b)^2]}.$$

Euklidski dihedralni ugao θ u posebnoj poziciji je dat sa

$$b = e_z, \quad d = e_x,$$

$$c = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y,$$

i imamo

$$\frac{[\,]^2}{[\,][\,]} = \cos^2\theta.$$

Kako su obje strane ove jednačine kovarijanse ovdojeno, imamo u općem slučaju

$$\cos\theta = \frac{(d \cdot c)(b \cdot b) - (b \cdot c)(d \cdot b)}{[(d \cdot d)(b \cdot b) - (d \cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}[(c \cdot c)(b \cdot b) - (c \cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ovu kombinaciju tri vektora nazivamo dihedralni proizvod.

Dihedrale u prostorvremenu

Posmatrajmo tri posmatrača koji se kreću konstantnom brzinom dalje od nekog događaja. Mogu izmjenjivati svjetlosne signale i svaki posmatrač može mjeriti vidljivi ugao imađu druga dva. Ovdje imamo kombinaciju dva efekta: geometrijsko umanjenje kreirano njihovom separacijom i magnifikacija uzrokovana aberacijom. Sitiacija je samoslična u vremenu i vidljivi uglovi će biti nezavisni od vremena.

Vidljivi ugao će jedino zavisito od vektora 4-brzine tri posmatrača. Posmatrajmo sliku. Za posmatrača b, samo je svjetlosni signal bitan. Mijenjanje brzine izvora na takav način da ostane u istoj ravni ne utiče ne uglove. Posmatrač će jednostavno vidjeti izvor sa različitim Dopplerovim pomakom. Ponovo imamo situaciju sa simetrijom dihedralnog proizvoda. Poseban slučaj za laganu komputaciju je

$$b = e_t, \quad d = \cosh\psi e_t + \sinh\psi e_x,$$

$$c = \cosh\psi e_t + \sinh\psi(\cos\theta e_x + \sin\theta e_y),$$

iz čega nađemo opći izraz

$$\cos\theta = \frac{(b\cdot c)(d\cdot b) - (d\cdot c)(b\cdot b)}{[(d\cdot d)(b\cdot b) - (d\cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}[(c\cdot c)(b\cdot b) - (c\cdot b)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Primjetite promjenu znaka koju izaziva Lorentzova metrika.

Primjer 4.3. *Pretpostavimo da imamo šest ekvivalentnih posmatrača poredanih u heksagon u ravni koji se svi pomjeraju radijalno dalje od početka, slika. Šta je njihova radijalna brzina ako svaki posmatrač, kao što je npr. B, vidi svoja dva susjeda, A i C razdvojena sa $90°$?*

U okviru simetrije, imamo za normalizovane tangentne vektore

$$b = \cosh\psi e_t + \sinh\psi e_x,$$

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \cosh\psi e_t + \sinh\psi\left(\frac{1}{2}e_x \pm \sqrt{\frac{3}{4}}e_y\right).$$

Pravi ugao zahtjeva

$$(b\cdot c)(b\cdot a) + (a\cdot c) = 0,$$

što nam daje

$$\sinh\psi = \sqrt{2}.$$

Pseudosferična geometrija

Ako uzmemo radijalno kretajuće posmatrače iz zadnjeg primjera kao tačke u prostoru posmatrača onda možemo definisati geometriju na tom prostoru. Uzmimo udaljenost između ovih tački da je relativna brzina između posmatrača na takav način da je aditivna. Normirani vektori brzine ovih posmatrača formiraju jedinični hiperboloid u prostorvremenu.

Zbog Lorentz invarijantnosti ova geometrija ima iste simetrije lap uobičajena pseudosferična geometrija pa je stoga njoj ekvivalentna! Ovdje sve projektujemo na jedinični hiperboloid koristeći se previm linijama kroz polazište. Svjetlosni zraci između posmatrača se projiciraju u geodezije na jediničnom hiperboloidu. Geometrija jediničnog hiperboloida nalik na vrijeme he ne-Euklidska geometrija površi sa uniformnom negativnom krivinom koja se naziva *pseudosfera*. Analogoni pravila sferične trigonometrije je sinusna teorema (za trougao sa stranicama a, b, c i suprotnim uglovima A, B, C, kao na slici),

$$\frac{\sinh a}{\sin B} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C},$$

kosinusna teorema

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cosh a$$

i zakon hiperbolnih kosinusa

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A.$$

Primjer 4.4. *Prethodni heksagon posmatrača sadrži 12 pseudosferičnih trouglova ABC sa slike. Imamo*

$$\cosh a = \frac{\cos 45^\circ + \cos 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ} = \sqrt{3}$$

Relativna brzina između posmatrača je

$$\cosh c = \frac{\cos 60^\circ + \cos^2 45^\circ}{\sin^2 45^\circ} = 1 + \sqrt{3}.$$

5 Riemannova geometrija

5.1 Mnogostrukosti

Mnogostrukosti

Većina skupova na kojima trebamo da radimo analizu nisu linearni prostori. Površina sfere je poznat primjer glatkog skupa koji nema strukturu linearnog prostora!

Sfera nema koordinatnog početka (nula vektora). Također, na sferi ne možemo definisati sabiranje parova tačaka (slobodnih vektora) na način koji je konzistentan sa aksiomima linearnog prostora, niti možemo definisati konstantno vektorsko polje na takovoj površi.

Nelinearni prostori su od kozmološkog interesa su pogotovo 3-sfere i pseudosfere.

U ovom poglavlju ćemo razviti osnovne alate koji nam omogućuju da se bavimo i takvim prostorima, što se nazivan *račun na mnogostrukostima*.

Mnogostrukosti koje se pojavljuju u primjenama su dvojake. Prvo, imamo mnogostrukosti kao što je konfiguracijski prostor čvrstog tijela u slobodnom padu. Tačke ove mnogostrukosti su na primjer sve moguće rotacije. Izbor jedinične rotacije je proizvoljan i sve tačke ovog konfiguracijskog prostora su ekvivalentne. Iako će koordinate ovdje biti potrebne kako bi se opisale konkretne situacije, geometrijske strukture neće uključivati koordinate direktno. Drugo, imamo mnogostrukosti kao što je prostor energije, temperature, entropije, pritiska, zapremina, itd...

Ovdjekoordinate imaju direktnu fizikalnu interpretaciju. Iznenađujuće, metode bez koordinata koje su razvijene za prvi tip mnogostrukosti su također korisni i efektivni alati za mnogostrukosti sa određenim koordinatama!

Primjer 5.1. *Iako prostor i vrijeme imaju odvojene fizikalne interpretacije, nedisperzivna talasna jednačina*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

se često izučava u rotiranim koordinatama

$$u = t - x, \quad v = t + x$$

pa postaje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

Mnogostrukosti

Dobro 'ponašajući' skupovi sa dovoljno strukture na sebi da se na njima može raditi diferencijalni račun nazivaju se diferencijabilne mnogo strukosti ili skraćeno mnogostrukosti.

Najmanja struktura koju skup može imati bi nam omogućila da samo damo imena tačkama i da diskutujemo identitet tačaka i njihovo članstvo u raznim drugim skupovima.

Minimalna dodatna struktura je topologija, koja daje dovoljno strukture da se može rasprevljati o neprekidnosti krivih i preslikavanja. Skupovi koji se nazivaju mnogostrukostima imaju još više strukture i glatkost krivih i preslikavanja se također može razmatrati!

Glatke krive na mnogostrukostima imaju lokalne linearne aproksimacije koje se nazivaju tangentnim vektorima.

$\mathbb{R}^n$ naravno ima svu ovo strukturu i više. Dodatne strukture u $\mathbb{R}^n$ nam dozvoljavaju da definišemo prave, globalnu paralelnost i posebnu tačku koju nazivamo koordinatnim početkom.

Ovo nisu strukture koje obavezno zahtjevamo od mnogostrukosti. Definisat ćemo mnogostrukosti tako da lokalno izgledaju kao $\mathbb{R}^n$, ali da nemaju ovu prekomjernu strukturu.

Primjer 5.2. *Neka je P skup svih pravih linija koje prolaze kroz koordinatni početak u Euklidskom 3-prostoru. Vidjet ćemo uskoro da je ovaj skup mnogostrukost.*

Neka je G skup svih velikih krugova na sferi. Ovaj skup je također mnogostrukost.

Neka je Q skup svih trojki (x, y, z) osim $(0, 0, 0)$, modul relacija ekvivalencije

$$(x, y, z) \equiv (kx, ky, kz)$$

za sve realne brojeve k. Q je mnogostrukost sa esencijalno istom strukturom kao mnogostrukosti P i G.

Zajednička mnogostrukna struktura se naziva P^2, projektivni 2-prostor.

Karte

Kako bismo dodali strukturu mnogostukosti skupu, moramo pokazati kako se otvorena regija oko bilo koje tačke preslikava na injektivan i neprekidan način na otvorenu regiju u $\mathbb{R}^n$.

Inverzno preslikavanje također mora biti neprekidno.

Svako takvo preslikavanje se naziva *kartom*.

KArte zadovoljavaju uslov kompatibilnosti - kad god se dvije karte preklapaju na mnogostrukosti, one definišu preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ na samog sebe.

Ako je skup glatka mnogostrukost, onda će i ova preslikavanja biti glatka i imati glatke inverse.

Kolekcija svih kompatibilnih karti naziva se *atlas* mngostrukosti.

Primjer 5.3. *Svaki linearni vektorski prostor može biti pokriven jednom kartom koja preslikava svaki vektor na brojnu n-torku koja se dobija od njegovih komponenti u nekog bazi. Atlas se sastoji od svih karti koje su izvedene iz ove pomoću glatkih trasformacija, koje se nazivaju koordinatnim transformacijama.*

Sve n-dimenzionalne sfere S^n mogu se pokriti dvjema kartama koristeći se stereografskom projekcijom. Ako je n-sfera definisana kao skup svih tačaka u $(n+1)$-dimezionalnom Euklidskom prostoru koje zadovoljavaju

$$w^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

onda je karta za regiju $w \neq -1$ preslikavanje

$$(w, \vec{x}) \mapsto (\vec{x}/(1+w)).$$

Formalnije

Definicija 5.4. Preslikavanje $f : (X, \tau) \mapsto (Y, \tau')$ naziva se *homeomorfizmom* (izomorfizam u kontekstu opće topologije) ako

1. f je bijekcija;
2. f i f^{-1} su neprekidne.

m-dimezionalna koordinatna karta ($m < \infty$) na topološkom prostoru $\mathcal{M}$ je par (U, ϕ) gdje je ϕ otvoreni podskup $\mathcal{M}$ (domen koordinatne karte) a $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^m$ je homemorfizam iz U na otvoreni podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^m$ sa uobičajeno topologijom.Ako je $U = \mathcal{M}$, onda je koordinatna karta globalno definisana; inače je lokalno definisana.

Neka su (U_1, ϕ_1) i (U_2, ϕ_2) par m-dimenzionalnih koordinatnih karti sa $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Onda je *funkcija preklapanja* između dvije koordinatne karte preslikavanje $\phi_2 \circ \phi^{-1}$ iz otvorenog podskupa $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ na otvoreni podskup $\phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Atlas dimenzije m na $\mathcal{M}$ je porodica m-dimenzionalnih koordinatnih karti $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ t.d.

- $\mathcal{M}$ je pokriveno porodicom u smislu da je $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} U_i$;

- svaka funkcija preklapanja $\phi_j \circ \phi_i^{-1}, i, j \in I$ je C^∞ preslikavanje iz $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ na $\phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$.

Za atlas kažemo da je kompletan ukoliko je maksimalan - tj. nije sadžan niti u jednom drugom atlasu.

Za kompletan atlas, porodica $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ naziva se *diferencijalna struktura* na $\mathcal{M}$ dimenzije m. Topološki prostor $\mathcal{M}$ se onda naziva *deiferencijalna mngostrukost* (ili m-mnogostrukost, ako treba navesti dimenziju eksplicitno).

Tačka $p \in U \subset \mathcal{M}$ ima koordinate $(\phi^1(p), \phi^2(p), \ldots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ u odnosu na kartu (U, ϕ), gdje su koordinatne funkcije $\phi^\mu : U \mapsto \mathbb{R}, \mu = 1, 2, \ldots, m$ definišu se pomoću projektivnih funkcija $u^\mu(x) := x^\mu$ kao

$$\phi^\mu(p) := u^\mu(\phi(p)).$$

Skupovi P i Q definisani ranije mogu dobiti mnogostruknu strukturu na isti način. Euklidske koordinate bilo koje tačke na pravoj liniji u skupu P daju brojnu trojku, dok relacija ekvivalencije skupa Q identifikuje brojne trojke koje pripadaju istoj liniji.

Kako bismo pokazali da je skup Q mnogostukost, pogledajmo tačku $(a, b, c) \in Q$. Pretpostavimo da je c najveći od njih. Onda je karta oko tačke (a, b, c) data sa preslikavanjem

$$(x, y, z) \mapsto (x/y, y/z)$$

za otvoreni skup tačaka koje zadovoljavaju $z \neq 0$. I karta i ovaj uslov su kompatibilni sa relaciojom ekvivalencije i ona preslikava cijeli skup Q osim kruga na cijelu ravan.

Međutim možemo definisati još dvije karte i svaka se tačka Q onda pojavljuje u jednoj od njih. Ako ovima dodamo sve druge kompatibilne karte, imamo atlas za Q.

Primjer 5.5. *Kružnica S^1: Kružnica S^1 se može smatrati kao podskup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$. Ako se taj prostor osposobi sa uobičajenom metričkom topologijom, onda je S^1 očito zatvoren i ograničen podskup i stoga, po Heine-Borelovoj teoremi, njegova podprostorna topologija je kompaktna.*

Generalno, nije moguće locirati tačku bilo gdje na tipičnoj m-mnogostrukosti sa samo jednom koordinatnom kartom. U slučaju S^1 jedna mogućnost je korištenje para preklapajućih uglovnih koordinata. Još jedna mogućnost je data sa

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{(x, y) | x > 0\} \quad \phi_1(x, y) := y; \\
U_2 &:= \{(x, y) | x < 0\} \quad \phi_2(x, y) := y; \\
U_3 &:= \{(x, y) | y > 0\} \quad \phi_3(x, y) := x; \\
U_4 &:= \{(x, y) | y < 0\} \quad \phi_4(x, y) := x;
\end{aligned}$$

Primjetite da iako su koordinatne funkcije napisane kao funkcije i x i y, podrazumjeva se da su ove koordinate pod ograničenjem $x^2 + y^2 = 1$ i da (x, y) predstavlja tačku na kružnici sa ovom ograničenom vrijednošću x i y, tj. kružnica je skup dimenzije 1, a ne 2.

Kako bismo vidjeli da su preklopne funkcije diferencijabilne, posmatrajmo na primjer preklop U_1 i U_3. U $U_1 \cap U_3$ imamo

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 < y < 1 \; i \; 0 < x < 1.$$

Stoga je $\phi_3(x)^{-1} = (x, (1 - x^2)^{1/2})$ pa je

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1}(x) = (1 - x^2)^{1/2},$$

koja je doista beskonačno diferencijabila za ovaj skup vrijednosti x i y.

Primjetite da ukoliko se $\mathbb{R}^2$ smatra mnogostrukošću, onda je S^1 komapktna jednodimenzionalna mnogostrukost. □

Diferencijabilna preslikavanja

Veoma vaćan koncept u matematici je pojam preslikavanja koje prezervira strukturu između dva skupa koji su osprbljeni sa istom vrstom matematičke strukture. Npr. u teoriji grupa, ovo bi bilo homomorfizmi; U topologiji ovo bi bilo neprekidno preslikavanje koje prezervira strukturu između dva topološka prostora.

U diferencijalnoj geometriji, ulogu preslikavanja koje prezervira strukturu igra C^r-funkcija između dvije mnogostrukosti koju definišemo na slijedeći način

Definicija 5.6.

1. Lokalna reprezentacija funkcije f (sa mnogostrukosti $\mathcal{M}$ na mnogostrukost $\mathcal{N}$) u odnosu na koordinatne karte (U, ϕ) i (X, ψ) respektivno na $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ je preslikavanje

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \phi(U) \mapsto \mathbb{R}^n.$$

2. Preslikavanje $f_{\mathcal{M}} \mapsto \mathcal{N}$ je C^r-funkcija ako, za sva pokrivanja $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ pomoću koordinatnih susjedstava, lokalne reprezentacije su C^r funkcije iz standardne realne analize funkcije između topološskih vektorskih prostora $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^n$. Konkretno, diferencijabila funkcija je C^1 funkicija. Funkcija koja je C^∞ se naziva glatkom.

3. Funkcija $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$ naziva se C^r-difeomorfizam ako je f bijekcija sa osobinom da su i f i f^{-1} C^r funkcije.

5.2 Tangentni prostor i vektori

Jedan od osnovnih koncepta računa na mnogostukostima je pojam *tangentnog prostora*, prostor tangentnih vektora.

Ovaj koncept je zasnovan na intuitivnoj geometrijskoj ideji tangentne ravni na površ. Stoga je tangentni prostor u tački $\vec{x} \in S^n$ izgleda kao da bi trebao biti definisan kao

$$T_{\vec{x}} S^n := \{\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1} | \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Međutim, ispostavlja se da je struktura tangentnog prostora takeđer duboko povezana sa lokalnim diferencijabilnim osobinama funkcija na mnogostrukosti i ovo daje mnogo algebarskiji pogled na ideju. Ključno pitanje je stoga da razumijemo šta bi to trebalo zamijeniti intuitivnu ideju tangentnog vektora kao nečega što je tangentno na površ u uobičajenom smislu? Odgovor je da tangentni vektor treba razumjeti kao nešto što je tangentno na krivu u mnogostrukosti. Ključna stavka ovdje je da kriva leži u mnogostrukosti, ne u okružujućem $\mathbb{R}^{n+1}$ i ova ideja moće biti generalizovana na proizvoljne mnogostrukosti bez potrebe da ih se prvo ubaci u višedimenzionalni vektorski prostor!

Tangentnost dva preslikavanja je lokalno slaganje preslikavanja. Posmatrajmo dva preslikavanja, ϕ i ψ, oba $\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$. U svakoj tački ona se mogu presdstaviti pomoću Taylorovog reda. Ako se ove ekspanzije slažu do članova do reda p, kažemo da ova preslikavanja imaju tangentnost p-tog reda u toj tački. Mi ćemo ovdje samo koristiti tangentnost prvog reda.

Primjer 5.7. *Preslikavanja* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ *:*

$$u \mapsto (u, u^3), \quad u \mapsto (\sin u, 0)$$

su tangentna u $u = 0$.

Tangentnost za preslikavanja između mnogostrukosti se definira pomoću karti koristeći se prethodnom definicijom.

Tangentnost je struktura koju prezerviraju glatka preslikavanja.

Tangentni vektor

Tangentni vektor je abstrakcija koja treba predstavljati strukturu koja je zajednička klasi parametrizovanih krivih tangentnih u tački.

To je lokalna struktura preslikavanja oblika $\mathbb{R} \mapsto M$ u mnogostrukosti M. Tangentni vektor ćemo u stvari definisati da bude klasa ekvivalencije tangentnih krivih. Ovu klasu ekvivalencije možemo predstaviti na razne načine: pomoću nasumično izabranog člana ili pomoću numeričkog algoritma.

Tangenta na krivu $\gamma : s \mapsto \gamma(s)$ u $\gamma(s)$ ćemo označavati sa $\dot{\gamma}(s)$.

Prostor tangentnih vektora u tački p mnogostrukosti M ćemo označavati sa $T_p(M)$.

Tangentni vektor kao klasa ekvivalencije krivih

Definicija 5.8. *Kriva* na mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je glatko, tj. C^∞, preslikavanje σ sa nekog intervala $(-\epsilon, \epsilon)$ sa realne prave na $\mathcal{M}$.

Dvije krive σ_1 i σ_2 su *tangentne* u tački $p \in \mathcal{M}$ ako

- $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p$;
- U nekom lokalnom kordinatnom sistemu $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ oko tačke, dvije krive su 'tangentne' u uobičajenom smislu krivih u $\mathbb{R}^m$:

$$\frac{dx^i}{dt}(\sigma_1(t))|_{t=0} = \frac{dx^i}{dt}(\sigma_2(t))|_{t=0}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

- *Tangentni vektor* u $p \in \mathcal{M}$ je klasa ekvivalencije krivih u $\mathcal{M}$ gdje je relacija ekvivalencije između dvije krive ta da su tangentne u tački p. Klasa ekvivalencije konkretne krive σ se označava sa $[\sigma]$.

- *Tangentni prostor* $T_p\mathcal{M}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}$ u tački $p \in \mathcal{M}$ je skup svih tangentnih vektora u tački p.

  Tangentni snop $T\mathcal{M}$ je definisan kao $T\mathcal{M} := \cup_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$.

  Postoji prirodno projektivno preslikavanje $\pi : T\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ koje povezuje svaki tangentni vektor sa pačkom $p \in \mathcal{M}$ u kojoj je tangentan. Inverzna slika (*nit* preko p) bilo koje tačke p pod preslikavanjem π je stoga skup svih vektora koji su tangentni na mnogostrukost u toj tački.

Ova je definicija konzistentna sa intuitivnom geometrijskom slikom. Ova se primjedba također da primjeniti na tangentni snop $T\mathcal{M}$ koji u slučaju sfere recimo izgleda kao

$$TS^n = \{(\vec{x}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} | \vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \wedge \vec{x} \cdot \vec{v} = 0\}.$$

Tangentni vektor $v \in T_P\mathcal{M}$ se može koristiti kao izvod u pravcu na funkcijama f mnogostukosti $\mathcal{M}$ pomoću:

$$v(f) := \frac{df(\sigma(t))}{dt}|_{t=0},$$

gdje je σ bilo koja kriva u klasi ekvivalencije koju representira v, tj. $v = [\sigma]$.

Teorema 5.9. *Tangenetni prostor $T_p\mathcal{M}$ ima strukturu realnog vektorskog prostora!*

Tangentni vektori kao derivacije

Definicija 5.10. Derivacija u tački $p \in \mathcal{M}$ je preslikavanje $v : C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto \mathbb{R}$ koje zadovoljava:

1. $v(f + g) = v(f) + v(g) \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$
2. $v(rf) = rv(f) \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), r \in \mathbb{R}$
3. $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$

Skup svih derivacija u $p \in \mathcal{M}$ se označava sa $D_p\mathcal{M}$.

Veoma važan primjer derivacije je dat pomoću bilo koje koordinatne karte (U, ϕ) koja sadrži tačku p koja nas interesuje. Specifično, skup derivacija u p je definisan pomoću:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f := \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1}|_{\phi(p)}; \quad \mu = 1, 2, \ldots, \dim \mathcal{M}.$$

Lema 5.11. *Neka je (U, ϕ) koordinatna karta oko $p \in \mathcal{M}$ sa asociranim koordinatnim funkcijama $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ i takvim da je $x^\mu(p) = 0$ za svako $\mu = 1, 2, \ldots \dim \mathcal{M}$. Onda za svako $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ postoji $f_\mu \in C^\infty(\mathcal{M})$ tako da*

1. $f_\mu(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f$

2. $f(q) = f(p) + \sum_{\nu=1}^{m} x^\nu(q) f_\nu(q)$

za svako q iz nekog otvorenog susjedstva tačke p.

Posljedica 5.12. *Ako je $v \in D_p(\mathcal{M})$, onda je*

$$v = \sum_{\mu=1}^{m} v(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \tag{1}$$

Vektorska polja

Sada možemo razmatrati i vežnu generalizaciju dosadašnjih ideja i govoriti i o polju tangentnih vektora na isti način kao što je vektor pripisan svakoj tački $\mathcal{M}$.

Definicija 5.13. Vektorsko polje X na C^∞-mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je glatko pripisivanje tangentnog vektora $X_p \in T_p\mathcal{M}$ u svakoj tački $p \in \mathcal{M}$, gdje 'glatko' zanči da za svako $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, funkcija $Xf : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ definisana pomoću

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \mapsto & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & (Xf)(p) := X_p(f) \end{array} \tag{2}$$

je beskonačno diferencijabilna. Vektorsko polje otvorenog podskupa $U \in \mathcal{M}$ je definisano na isti način osim što je gornji uslov zahtjevan za sve $f \in C^\infty(U)$ i tačke p u podskupu $U \in \mathcal{M}$.

Lie izvod

Vektorsko polje definisano pomoću jednačine (2) daje preslikavanje $X : C^\infty(\mathcal{M}) \mapsto C^\infty(\mathcal{M})$ u kojem se slika Xf od $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ definiše pomoću jednačine (2). Funkcija se Xf često naziva i *Lie izvodom* funkcije f duž vektorskog polja X i označava se sa $L_X f$ ili $\mathcal{L}_X f$.

Lie izvod ima sve osobine derivacije navedene nešto ranije i to implicira da je X linearno preslikavanje iz vektorskog prostora $C^\infty(\mathcal{M})$ u samog sebe. Stoga je X derivacija na prstenu $C^\infty(\mathcal{M})$ u tradicionalnom smislu te riječi. Neka je (U, ϕ) koordinatna karta na mnogostrukosti $\mathcal{M}$. Onda u svakoj tački p otvorenog skupa U možemo koristiti ekspanziju iz jednačine (1) za derivaciju X_p povezanu sa vektorskim poljem X definisanim na $\mathcal{M}$. Stoga, za svako $p \in U$,

$$\begin{aligned} (Xf)(p) = X_p f &= \sum_{\mu=1}^{m} X_p x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} (Xx^\mu)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \end{aligned}$$

što zapisujemo kao

$$X_U = \sum_{\mu=1}^{m} X_U x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Napomena: U većini literature se znak sumacije u ovom slučaju izaostavlja, radi skraćenog pisanja (takozvana Einsteinova sumacija).

Funkcije $\{Xx^\mu, \mu = 1, 2, \ldots, m\}$ na U se zovu komponentama vektorskog polja X u odnosu na koordinatni sistem asociran sa kartom (U, ϕ). Često se označavaju kao X^μ.

Lie zagrada

Lie zagrada je važna u proučavanju simetrija i transformacijskih grupa (nešto kasnije). Ova diskusija treba pojasniti ideju tangentnog vektora na mnogostukosti i pripremiti nas za pojam tenzora koji slijedi.

Pretpostavimo da imamo dva vektorska polja A i B. Vektorsko polje je preavilo kojim biramo tangentni vektor u svakoj tački mnogostukosti. Ako nam je također data funkcija $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, onda možemo operisati na f sa A kako bismo u svakoj tački našli izvod of f u pravcu A, A(f), kao maloprije.

Primjer 5.14. *Izvod funkcije $f = x^2 + y^2$ u pravcu $(\partial/\partial x + \partial/\partial y)$ je*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2) = 2(x + y).$$

Stoga je $A(f)$ nova funkcija. Stoga možemo posmatrati vektorsko polje B koje djeluje na nju! Šta sad s ovom dvostrukom operacijom? Ona preslikava funkcije na funkcije - stoga da li je ona derivacija?

Primjer 5.15. *Vektor u tački $(0, 0)$ koji djeluje na $f(x, y) = x^2 + y^2$ mora dati nulu. Medjutim,*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2.$$

Ovo do sada nije iznenadjujuće. Ono što *jeste* značajno je to da *postoji* vektor skriven u drugim izvodima! Pogledajmo detaljnije AB. U koordinatnoj karti $(x^1, x^2, \ldots)$ imamo

$$A = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad B = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

i onda ako djelujemo na proizvod dvije funkcije f i g imamo

$$(BA)(fg) = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[a^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}(fg)\right],$$

$$(BA)(fg) = b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}[a^\nu (f_{,\nu} g + f g_{,\nu})]$$

gdje zarezi označavaju parcijalne izvode.

$$\begin{aligned}(BA)(fg) &= b^\mu a^\nu [f_{,\nu\mu} g + f_{,\nu} g_{,\mu} + f_{,\mu} g_{,\nu} + f g_{,\nu\mu}] + \\ &+ b^\mu a^\nu_{,\mu} (f_{,\nu} g + g f_{,\nu})\end{aligned}$$

i kada ovo pokušamo spojiti ponovno dobivamo

$$(BA)(fg) = g(BA)f + f(BA)g + b^{\mu}a^{\nu}(f_{,\mu}g_{,\nu} + f_{,\nu}g_{,\mu}).$$

Ovaj treći izraz sadrži 'smeće' koje uništava Leibnizovo pravilo, no ukoliko ga pogledamo, ono je simetrično. Stoga definišemo operator *Lie zagrade* sa

$$[B, A] = (BA - AB),$$

onda će on zadovoljavati

$$[B, A](fg) = f[B, A]g + g[B, A]f.$$

Onda će to biti derivacija (!) koja je osjetljiva samo na linearne članove u funkcijama na koje djeluje! Lie zagrada se jednostavno izačuna ako su vektori dati eksplicitno, koristeći

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right] = 0.$$

i

$$[fB, gA] = fg[B, A] + fB(g)A - gA(f)B.$$

Opći izraz za komponente se mogu izčitati iz gornje kalkulacije

$$[B, A] = (b^{\mu}a^{\nu}_{,\mu} - a^{\mu}b^{\nu}_{,\mu})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

Lie zagrada zadovoljava Jacobijevu jednakost

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

Kotangentni vektori

Za bilo koji realni vektorski prostor V postoji asocirani dualni prostor svih linearnih preslikavanja realne vrijednosti na V. Kada ovo apliciramo na vektorske prostore $T_p\mathcal{M}, p \in \mathcal{M}$ ova dobro znana konstrukcija ima najveću vrijednost.

- *Kotangentni vektor* u tački $p \in \mathcal{M}$ je realno linearno preslikavanje $k : T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$. Vrijednost od k primjenjeno na tangentni vektor $v \in T_p\mathcal{M}$ ćemo zapisivati sa $\langle k, v\rangle$ ili sa $\langle k, v\rangle_p$.

- *Kotangentni prostor* u $p \in \mathcal{M}$ je skup $T_p^*\mathcal{M}$ svih takvih linearnih preslikavanja, tj. on je dual vektorskog prostora $T_p\mathcal{M}$. Odatle slijedi da je i dualni prostor također vektorski prostor i da je $\dim T_p^*\mathcal{M} = \dim T_p\mathcal{M}[= \dim \mathcal{M}]$.

- *Kotangentni snop* $T^*\mathcal{M}$ je skup svih kotangentnih vektora u svim tačkama $\mathcal{M}$:

  $$T^*\mathcal{M} := \cup_{p\in\mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}.$$

  On je vektorski snop.

- 1-forma ω na $\mathcal{M}$ je glatko pripisivanje kotangentnog vektora ω_p svakoj tački $p \in \mathcal{M}$. U ovom kontekstu, glatko znači da je za bilo koje polje X na $\mathcal{M}$ realna funkcija na $\mathcal{M}$
$$\langle \omega, X \rangle(p) := \langle \omega_p, X_p \rangle$$
glatko.

Tenzori na mnogostrukostima

Sada kada imamo vektorski prostor, kao što je tangentni prostor $T_p\mathcal{M}$, onda cjelokupna tenzorska algebra nam postaje slobodna! Dakle, trebamo naglasiti ideju tenzora na mnogostrukostima.

Vektorsko polja, ne primjer, je izbor tangentnog vektora u svakoj tački i svaki od ovih živi u svom tangentnom prostoru. FUndamentalni pojam koji imamo je linearnost. Za tenzore na mnogostrukostia, zahtjevamo linearnost preko funkcija ne samo preko brojeva. Ovo forsira da su tenzori lokalni linearni operatori.

Primjer 5.16. *Operator Lie zagrade $V \times V \mapsto V$;*
$$(a, b) \mapsto [a, b]$$
nije *tenzor tipa* $(1\ 2)$ *jer*
$$[fa, b] \neq f[a, b]$$
za funkcije f.

Kada je mnogostukost porivena sa više od jedne karte, moramo biti oprezni da povežemo tenzorska polja glatko od karte do karte.

Formalnije

Prije svega moramo da uvedemo (prisjetimo se) tenzorskog produkta $V \otimes W$ dva vektorska prostora V i W. Najopćiji i najmoćniji pristup je preko 'osobine univerzalne faktorizacije' u kojoj tenzorski proizvod prostora V i W definišemo da bude vektorski prosto, koji pišemo $V \otimes W$ i bilinearno preslikavanje $\mu : V \times W \mapsto V \otimes W$ sa osobinom da za svaki drugi vektorski prostor Z i bilinearno preslikavanje $b : V \times W \mapsto Z$ postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $\tilde{b} : V \otimes W \mapsto Z$ takvo da slijedeći dijagram komutira:
$$\begin{array}{ccccc} V & \times & W & \overset{b}{\rightarrow} & Z \\ & \downarrow \mu & & \nearrow \tilde{b} & \\ V & \otimes & W & & \end{array}$$

Ova definicija je generalna, ali je veoma apstraktna. Stoga iskoristit ćemo činjenicu da je za konačnodimenzionalne vektorske prostore postoji prirodan izomorfizam $j : V \otimes W \mapsto B(V^* \times W^*, \mathbb{R})$, gdje je $B(V^* \times W^*, \mathbb{R})$ vektorski prostor bilinearnih preslikavanja iz kartezijevog proizvoda $V^* \times W^*$ duala V i W u $\mathbb{R}$. Ovaj izomorfizam se definiše pomoću
$$j(v \otimes w)(k, l) := \langle k, v \rangle \langle l, w \rangle.$$
Primjenjujući ove ideje kontekstu diferencijalne geometrije, dobivamo slijedeču definiciju

Definicija 5.17. *Tenzor tipa* (r, s) u tački $p \in \mathcal{M}$ je element tanzorskog produkt prostora

$$T_p^{r,s}\mathcal{M} := \left[\overset{r}{\otimes} T_p\mathcal{M}\right] \otimes \left[\overset{s}{\otimes} T_p^*\mathcal{M}\right].$$

Notacija $\overset{r}{\otimes} V$ predstavlja vektorski prostor koji se formira uzimajući tenzorski proizvod skupa V sa samim sobom r puta.

Posebni slučajevi tenzora tipa (r, s) uključuju:

1. $T_p^{0,1}\mathcal{M} = T_p^*\mathcal{M}$
2. $T_p^{1,0}\mathcal{M} = (T_p^*\mathcal{M})^* \cong T_p\mathcal{M}$.
3. $T_p^{r,0}\mathcal{M}$ naziva se prostorom r-kontravarijantnih tenzora.
4. $T_p^{0,s}\mathcal{M}$ naziva se prostorom s-kovarijantnih tenzora.

Pojam n-forme

VEoma važan primjer tenzorskog polja je n-forma, gdje je $0 \leq n \leq \dim \mathcal{M}$. 0-forma je po definiciji funkcija u $C^\infty(\mathcal{M})$, dok smo 1-formu već definisali. FOrmalna definicija n-forme je

Definicija 5.18. n-forma je tenzorsko polje ω tipa $(0, n)$ koje je totalno simetrično u smislu da je za svaku permutaciju P po indeksima $1, 2, \ldots, n$,

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (-1)^{\deg(P)}\omega(X_{P(1)}, X_{P(2)}, \ldots, X_{P(n)})$$

gdje su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ proizvoljna vektorska polja na $\mathcal{M}$, a $\deg(P)$ je stepen permutacije P,tj. $+1$ ukoliko je permutacija parna, a -1 ukoliko je neparna. Skup svih n-formi na $\mathcal{M}$ označavat ćemo sa $A^n(\mathcal{M})$.

Interesuje nas tenzorski proizvod na n-formama. Medjutim, ukoliko je $\omega_1 \in A^{n_1}(\mathcal{M})$ a $\omega_2 \in A^{n_2}(\mathcal{M})$, onda $\omega_1 \otimes \omega_2$ jeste $(n_1 + n_2)$-kovarijantni tenzor, ali neće biti $(n_1 + n_2)$-forma, jer ne zadovoljava alternacijsko svojstvo u odnosu na sve indekse. Medjutim, taj problem rješavamo pomoću

Definicija 5.19. Ako je $\omega_1 \in A^{n_1}(\mathcal{M})$ a $\omega_2 \in A^{n_2}(\mathcal{M})$, *vanjski ili* $\wedge$-produkt ili *vanjski* proizvod polja ω_1 i ω_2 je $(n_1 + n_2)$-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$ definisana pomoću:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 := \frac{1}{n_1! n_2!} \sum_{perm.P} (-1)^{\deg P} (\omega_1 \otimes \omega_2)^P,$$

gdje, ukoliko je ω bilo koje tenzorsko polje tipa $(0, n)$, permutirano tenzorsko polje ω^p tipa $(0, n)$ definišemo kao

$$\omega^P(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \omega(X_{P(1)}, X_{P(2)}, \ldots, X_{P(n)})$$

za sve vektore $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Vanjski izvod

Definicija 5.20. Ako je ω n-forma na $\mathcal{M}$ sa $1 \leq n \leq \dim \mathcal{M}$ onda je $vanjski$ proizvod od ω $(n+1)$-forma $d\omega$ koju definišemo sa

$$d\omega(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{n+1}))$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{n+1}).$$

za sva vektorska polja $X_1, X_2, \ldots, X_n$.