# Čisto aksijalni torzijski talasi kao nova rješenja metrički-afine gravitacije i analitička reprezentacija Diracove jednačine†

Vedad Pašić

Odsjek matematika, Prirodno-matematički Fakultet Univerziteta u Tuzli

Institut za fiziku Univerziteta u Beogradu
6. maj 2016.

† skupa sa Elvisom Barakovićem i Dmitrijem Vassilievom

# Struktura predavanja

# Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija

# Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija

# Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija
- pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i fizikalna interpretacija

# Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija
- pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i fizikalna interpretacija
- Spektralna asimetrija Diracovog operatora bez mase

# Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija
- pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i fizikalna interpretacija
- Spektralna asimetrija Diracovog operatora bez mase
- Diracov operator kao izvor geometrije

# Metrički–afina gravitacija

# Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme: konektovana realna 4–mnogostukost $\mathcal{M}$ sa Lorentzovom metrikom $g$ i afinom konekcijom $\Gamma$, tj.

# Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme: konektovana realna 4–mnogostukost $\mathcal{M}$ sa Lorentzovom metrikom $g$ i afinom konekcijom $\Gamma$, tj.

$$\nabla_\mu A^\lambda = \partial_\mu A^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A^\nu .$$

# Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme: konektovana realna 4–mnogostukost $\mathcal{M}$ sa Lorentzovom metrikom $g$ i afinom konekcijom $\Gamma$, tj.

$$\nabla_\mu A^\lambda = \partial_\mu A^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A^\nu .$$

- *Nezavisna* linearna konekcija $\Gamma$ odvaja MAG od GR – $g$ i $\Gamma$ dvije potpuno nezavisne veličine.

# Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme: konektovana realna 4–mnogostukost $\mathcal{M}$ sa Lorentzovom metrikom $g$ i afinom konekcijom $\Gamma$, tj.

$$\nabla_\mu A^\lambda = \partial_\mu A^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} A^\nu .$$

- *Nezavisna* linearna konekcija $\Gamma$ odvaja MAG od GR – $g$ i $\Gamma$ dvije potpuno nezavisne veličine.
- Nepoznate u MAG:
  - 10 nezavisnih komponenti metrike $g_{\mu\nu}$;
  - 64 koeficijenta konekcije $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$.

# Kvadratna metrički–afina gravitacija

# Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R) \tag{1}$$

# Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R) \tag{1}$$

$q(R)$ Lorentz invarijantna *čisto kvadratna* forma na krivini $R$, 16 $R^2$ članova.

# Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R) \tag{1}$$

$q(R)$ Lorentz invarijantna *čisto kvadratna* forma na krivini $R$, 16 $R^2$ članova.

Akcija je konformalno invarijantna.

# Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R) \tag{1}$$

$q(R)$ Lorentz invarijantna *čisto kvadratna* forma na krivini $R$, 16 $R^2$ članova.

Akcija je konformalno invarijantna.

Yang–Millsova akcija za afinu konekciju je posebni slučaj (1) sa

$$q(R) := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}.$$

# Jednačine polja

# Jednačine polja

Nezavisne varijacije po $g$ i $\Gamma$ nam daju Euler–Lagrangeov sistem

$$\frac{\partial S}{\partial g} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Gamma} = 0. \tag{3}$$

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

- Einsteinovi prostori (Yang, Mielke);

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

- Einsteinovi prostori (Yang, Mielke);
- pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom (Vassiliev);

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

- Einsteinovi prostori (Yang, Mielke);
- pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom (Vassiliev);
- Određeni eksplicitno dati talasi torzije (Singh and Griffiths);

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

- Einsteinovi prostori (Yang, Mielke);
- pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom (Vassiliev);
- Određeni eksplicitno dati talasi torzije (Singh and Griffiths);
- *Triplet ansatz* (Hehl, Macías, Obukhov, Esser, ...);

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

- Einsteinovi prostori (Yang, Mielke);
- pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom (Vassiliev);
- Određeni eksplicitno dati talasi torzije (Singh and Griffiths);
- *Triplet ansatz* (Hehl, Macías, Obukhov, Esser, ...);
- Minimalna generalizacija pseudoinstantona (Obukhov).

# Znana rješenja KMAG

## Definicija

Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo *Riemannovim* ako je konekcija Levi–Civita (tj. $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$).

- Einsteinovi prostori (Yang, Mielke);
- pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom (Vassiliev);
- Određeni eksplicitno dati talasi torzije (Singh and Griffiths);
- *Triplet ansatz* (Hehl, Macías, Obukhov, Esser, ...);
- Minimalna generalizacija pseudoinstantona (Obukhov).
- ...

# Klasični pp-talasi

# Klasični pp-talasi

## Definicija

*pp-talas* je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće *paralelno* spinorsko polje ($\nabla\chi = 0$).

# Klasični pp-talasi

## Definicija

*pp-talas* je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće *paralelno* spinorsko polje ($\nabla\chi = 0$).

## Ekvivalentna definicija

*pp-talas* je Riemannovo prostorvrijeme čija se metrika može lokalno napisati u formi

$$ds^2 = 2\,dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x^1, x^2, x^3)\,(dx^3)^2$$

u nekim lokalnim koordinatama.

# Klasični pp-talasi

## Definicija

*pp-talas* je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće *paralelno* spinorsko polje ($\nabla\chi = 0$).

## Ekvivalentna definicija

*pp-talas* je Riemannovo prostorvrijeme čija se metrika može lokalno napisati u formi

$$ds^2 = 2\,dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x^1, x^2, x^3)\,(dx^3)^2$$

u nekim lokalnim koordinatama.

Dobro znana prostorvremena u GR, jednostavna formula za krivinu - samo Ricci bez traga i Weyl dijelovi krivine.

# Generalizirani pp-talasi

# Generalizirani pp-talasi

Posmatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i}\, dA.$$

# Generalizirani pp-talasi

Posmatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i}\, dA .$$

Rješenja ove jednačine u obliku ravnih talasa se mogu napisati

$$A = h(\varphi)\, m + k(\varphi)\, l \,,$$

$$\varphi : M \mapsto \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_M l \cdot dx \,.$$

# Generalizirani pp-talasi

Posmatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i}\, dA.$$

Rješenja ove jednačine u obliku ravnih talasa se mogu napisati

$$A = h(\varphi)\, m + k(\varphi)\, l\,,$$

$$\varphi : M \mapsto \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_M l \cdot dx\,.$$

## Definicija

*Generalizirani pp-talas* čisto tenzorske torzije je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i *torzijom*

# Generalizirani pp-talasi

Posmatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm\mathrm{i}\, dA.$$

Rješenja ove jednačine u obliku ravnih talasa se mogu napisati

$$A = h(\varphi)\, m + k(\varphi)\, l\,,$$

$$\varphi : M \mapsto \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_M l \cdot dx\,.$$

## Definicija

*Generalizirani pp-talas* čisto tenzorske torzije je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i *torzijom*

$$T := \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A \otimes dA).$$

# pp-talasna rješenja za KMAG

## Teorem

Generalizirani pp-talasi čisto tenzorske torzije sa paralelnom Ricci krivinom rješenja su jednačina polja (2) i (3).

# pp-talasna rješenja za KMAG

## Teorem

Generalizirani pp-talasi čisto tenzorske torzije sa paralelnom Ricci krivinom rješenja su jednačina polja (2) i (3).

Ova prostorvremena imaju vrlo jednostavan eksplicitan opis.

# pp-talasna rješenja za KMAG

**Teorem**

Generalizirani pp-talasi čisto tenzorske torzije sa paralelnom Ricci krivinom rješenja su jednačina polja (2) i (3).

Ova prostorvremena imaju vrlo jednostavan eksplicitan opis.

Rezultat objavljen: "PP-waves with torsion and metric affine gravity", V. Pasic, D. Vassiliev, *Class. Quantum Grav.* **22** 3961-3975.

# Fizikalna interpretacija?

# Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.

# Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.
- Torzija i dio krivine koji torzija generiše su talasi koji putuju brzinom svjetla.

# Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.
- Torzija i dio krivine koji torzija generiše su talasi koji putuju brzinom svjetla.
- pp-prostor može se posmatrati kao ‘gravitacioni otisak’ koji pravi talas nekog polja bez mase.

# Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.
- Torzija i dio krivine koji torzija generiše su talasi koji putuju brzinom svjetla.
- pp-prostor može se posmatrati kao 'gravitacioni otisak' koji pravi talas nekog polja bez mase.
- Matematički model za neku bezmasnu elementarnu česticu?

# MAG vs Einstein-Weyl

# MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i \int \left( \xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \; - \; (\nabla_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \right).$$

# MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_W := 2i \int \left( \xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \; - \; (\nabla_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \right).$$

U generaliziranom pp-prostoru, Diracova jednačina bez mase uzima formu

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \{\nabla\}_\mu \, \xi^a = 0.$$

# MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i \int \Big( \xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \, - \, (\nabla_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \Big).$$

U generaliziranom pp-prostoru, Diracova jednačina bez mase uzima formu

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \{\nabla\}_\mu \, \xi^a = 0.$$

Postoje pp-talasna rješenja Einstein-Weylovog modela

# MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i \int \left( \xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \; - \; (\nabla_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \right).$$

U generaliziranom pp-prostoru, Diracova jednačina bez mase uzima formu

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \{\nabla\}_\mu \, \xi^a = 0.$$

Postoje pp-talasna rješenja Einstein-Weylovog modela

$$S_{\mathrm{EW}} := k \int \mathcal{R} + S_{\mathrm{W}},$$

$$\partial S_{\mathrm{EW}} / \partial g = 0, \quad \partial S_{\mathrm{EW}} / \partial \xi = 0.$$

# Fizikalna interpretacija

Fizikalna interpretacija - ova prostorvremena predstavljaju konformalno invarijantan metrički-afin model neke čestice bez mase.

# Fizikalna interpretacija

Fizikalna interpretacija - ova prostorvremena predstavljaju konformalno invarijantan metrički-afin model neke čestice bez mase.

Veoma slični pp-talasnim rješenjima Einstein–Weyl modela.

## Propozicija

Generalizovani pp-talasi čisto tenzorske torzije sa paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički-afin model za neutrino bez mase.

# Fizikalna interpretacija

Fizikalna interpretacija - ova prostorvremena predstavljaju konformalno invarijantan metrički-afin model neke čestice bez mase.

Veoma slični pp-talasnim rješenjima Einstein–Weyl modela.

## Propozicija

Generalizovani pp-talasi čisto tenzorske torzije sa paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički-afin model za neutrino bez mase.

Rezultat objavljen u "*PP-waves with torsion: a metric-affine model for the massless neutrino*",
V. Pasic, E. Barakovic, *Gen. Relativ. Grav.* **46** (10), 1787 (2014).

# Nova generalizacija

# Nova generalizacija

## Definicija

Generalizirani pp-talas čisto aksijalne torzije je metrički kompatibilno prostor-vrijeme sa pp-metrikom i torzijom:

$$T := *A \tag{4}$$

# Nova generalizacija

## Definicija

Generalizirani pp-talas čisto aksijalne torzije je metrički kompatibilno prostor-vrijeme sa pp-metrikom i torzijom:

$$T := *A \tag{4}$$

gdje je $A$ realno vektorsko polje

$$A = k(\varphi)\, l,$$

gdje je $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ proizvoljna realna funkcija faze.

# Nova generalizacija

## Definicija

Generalizirani pp-talas čisto aksijalne torzije je metrički kompatibilno prostor-vrijeme sa pp-metrikom i torzijom:

$$T := *A \tag{4}$$

gdje je $A$ realno vektorsko polje

$$A = k(\varphi)\, l,$$

gdje je $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ proizvoljna realna funkcija faze.

Torzija (4) jasno čisto aksijalna po definiciji.

# Osobine aksijalnih pp-talasa

# Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

# Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\})\, f$$
$$+\frac{1}{4}k^2\, \mathrm{Re}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \mp \frac{1}{2}k'\, \mathrm{Im}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m}))$$

# Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\})\, f$$
$$+\frac{1}{4}k^2 \operatorname{Re}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})\right) \mp \frac{1}{2}k' \operatorname{Im}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})\right)$$

- Torzija je $T = \mp \frac{i}{2} k\, l \wedge m \wedge \overline{m}$.

# Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\})\, f$$
$$+\frac{1}{4}k^2\, \mathrm{Re}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \mp \frac{1}{2}k'\, \mathrm{Im}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m}))$$

- Torzija je $T = \mp\frac{i}{2}k\, l \wedge m \wedge \overline{m}$.

- Ricci krivina je $Ric = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22} - k^2)\, l \otimes l$.

# Nova rješenja

# Nova rješenja

## Teorem

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (2), (3) u Yang–Mills slučaju.

# Nova rješenja

## Teorem

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (2), (3) u Yang–Mills slučaju.

- Sa $\{Ric\}$ označavamo Riemannov dio Ricci krivine.
- Uslov $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$ implicira da je $f_{11} + f_{22} = C$.
- Rezultat također vrijedi ako je *Ric* paralelno.

# Nova rješenja

## Teorem

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (2), (3) u Yang–Mills slučaju.

- Sa $\{Ric\}$ označavamo Riemannov dio Ricci krivine.
- Uslov $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$ implicira da je $f_{11} + f_{22} = C$.
- Rezultat također vrijedi ako je *Ric* paralelno.

Rezultat: "*Torsion Wave Solutions in Yang–Mielke Theory of Gravity*", V. Pasic, E. Barakovic, *Advances in High Energy Physics* **2015** (239076)

## Konjektura

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja sistema (2), (3) u općem slučaju.

## Konjektura

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja sistema (2), (3) u općem slučaju.

Dokazano za jednačinu (2), te za posebni slučaj jednačine (3).

## Konjektura

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja sistema (2), (3) u općem slučaju.

Dokazano za jednačinu (2), te za posebni slučaj jednačine (3).

Interesantna geometrija u promatranju prostorvremena sa čisto aksijalnom torzijom.

Ranije je predloženo da se aksijalna komponenta torzije može interpretirati kao Hodgeov dual elektromagnetnog vektorskog potencijala.

## Konjektura

Generalizirani pp-talasi čisto aksijalne torzije sa paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja sistema (2), (3) u općem slučaju.

Dokazano za jednačinu (2), te za posebni slučaj jednačine (3).

Interesantna geometrija u promatranju prostorvremena sa čisto aksijalnom torzijom.

Ranije je predloženo da se aksijalna komponenta torzije može interpretirati kao Hodgeov dual elektromagnetnog vektorskog potencijala.

Završetak rada očekujemo do kraja godine.

# Fizikalna interpetacija?

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.

# Fizikalna interpetacija?

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.
- Ponovo razmatramo Einstein-Weyl model.
- Rezultat sličan, no uslovi nešto drukčiji.

# Fizikalna interpetacija?

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.
- Ponovo razmatramo Einstein-Weyl model.
- Rezultat sličan, no uslovi nešto drukčiji.
- Kombinacija dva rješenja na žalost nemoguća.

# Matematički model

Neka je $\mathcal{M}$ 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannovom metrikom $g$.

# Matematički model

Neka je $\mathcal{M}$ 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannovom metrikom $g$.

Izaberemo trojku glatkih ortonormiranih vektora $e_j$ –

# Matematički model

Neka je $\mathcal{M}$ 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannovom metrikom $g$.

Izaberemo trojku glatkih ortonormiranih vektora $e_j$ – *okvir*.

Svaki vektor ima svoje koordinatne komponente $e_j^{\alpha}(x)$.

# Matematički model

Neka je $\mathcal{M}$ 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannovom metrikom $g$.

Izaberemo trojku glatkih ortonormiranih vektora $e_j$ – *okvir*.

Svaki vektor ima svoje koordinatne komponente $e_j^{\alpha}(x)$.

*Kookvir* $e^j$ je definisan relacijom

$$e_j^{\alpha} e_{\alpha}^{k} = \delta_j{}^k.$$

## Diracov operator bez mase

Matrični $2 \times 2$ operator

$$W := -i\sigma^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left( \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ {\beta \atop \alpha\gamma} \right\} \sigma^\gamma \right) \right).$$

## Diracov operator bez mase

Matrični $2 \times 2$ operator

$$W := -i\sigma^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left( \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ {\beta \atop \alpha\gamma} \right\} \sigma^\gamma \right) \right).$$

## Euklidska metrika, standardna spin struktura:

$$W = -i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

## Diracov operator bez mase

Matrični $2 \times 2$ operator

$$W := -i\sigma^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left( \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \sigma^\gamma \right) \right).$$

## Euklidska metrika, standardna spin struktura:

$$W = -i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Tražimo svojstvene funkcije oblika $v(x) = ue^{im_\alpha x^\alpha}$, $m \in \mathbb{Z}^3$, $u \in \mathbb{C}^2$.

Principalni i subprincipalni simbol Diracovog operatora bez mase na polugustinama je dat sa

Principalni i subprincipalni simbol Diracovog operatora bez mase na polugustinama je dat sa

$$A_1(x,\xi) = \begin{pmatrix} {e_3}^\alpha & {e_1}^\alpha - i{e_2}^\alpha \\ {e_1}^\alpha + i{e_2}^\alpha & -{e_3}^\alpha \end{pmatrix} \xi_\alpha,$$

$$A_{\mathrm{sub}} = \frac{3}{4}(*T^{\mathrm{ax}}(x))I,$$

Principalni i subprincipalni simbol Diracovog operatora bez mase na polugustinama je dat sa

$$A_1(x,\xi) = \begin{pmatrix} {e_3}^{\alpha} & {e_1}^{\alpha} - i{e_2}^{\alpha} \\ {e_1}^{\alpha} + i{e_2}^{\alpha} & -{e_3}^{\alpha} \end{pmatrix} \xi_\alpha,$$

$$A_{\mathrm{sub}} = \frac{3}{4}(*T^{\mathrm{ax}}(x))I,$$

Eksplicitna formula za Hodgeov dual aksijalnog dijela torzije:

$$*T^{\mathrm{ax}}(x) = \frac{\delta_{lk}}{3}\sqrt{\det g^{\alpha\beta}}\,\big[{e^k}_1\,\partial {e^l}_3/\partial x^2 + {e^k}_2\partial {e^l}_1/\partial x^3 + {e^k}_3\partial {e^l}_2/\partial x^1$$
$$-{e^k}_1\partial {e^l}_2/\partial x^3 - {e^k}_2\partial {e^l}_3/\partial x^1 - {e^k}_3\partial {e^l}_1/\partial x^2\big]$$

# Spektar Diracovog operatora bez mase na torusu $\mathbb{T}^3$

# Spektar Diracovog operatora bez mase na torusu $\mathbb{T}^3$

- Nula je svojstvena vrijednost višestrukosti 2.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $\|m\|$ i jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $-\|m\|$ i jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.

# Spektar Diracovog operatora bez mase na torusu $\mathbb{T}^3$

- Nula je svojstvena vrijednost višestrukosti 2.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $\|m\|$ i jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $-\|m\|$ i jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.
- Spektar operatora je simetričan!

# Spektralna asimetrija

# Spektralna asimetrija

Trivijalna topologija 3–torusa i perturbacija euklidske metrike.

# Spektralna asimetrija

Trivijalna topologija 3–torusa i perturbacija euklidske metrike.

$$g_{\alpha\beta}(x;\epsilon) = \delta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}(x) + \frac{\epsilon^2}{4} k_{\alpha\beta}(x) + O(\epsilon^3).$$

## Perturbirani problem svojstvenih vrijednosti

$$W(\epsilon)v(\epsilon) = \lambda(\epsilon)v(\epsilon)$$

# Spektralna asimetrija

Trivijalna topologija 3–torusa i perturbacija euklidske metrike.

$$g_{\alpha\beta}(x;\epsilon) = \delta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}(x) + \frac{\epsilon^2}{4} k_{\alpha\beta}(x) + O(\epsilon^3).$$

## Perturbirani problem svojstvenih vrijednosti

$$W(\epsilon)v(\epsilon) = \lambda(\epsilon)v(\epsilon)$$

Radimo na 3-torusu i perturbiramo metriku $g_{\alpha\beta}(x;\epsilon)$.

Perturbirani operator: $W(\epsilon) = W^{(0)} + \epsilon W^{(1)} + \epsilon^2 W^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

Perturbirani svojstveni vektor: $v(\epsilon) = v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

Perturbirana svojstvena vrijednost: $\lambda(\epsilon) = \lambda^{(0)} + \epsilon\lambda^{(1)} + \epsilon^2\lambda^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

Cilj: Izračunati $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$.

# Aksisimetrični slučaj

Važan poseban slučaj : metrika $g(x^1;\epsilon)$ funkcija samo $x^1$ koordinate.

U tom slučaju možemo izabrati i okvir i kookvir tako da samo zavise od $x^1$.

Svojstvene funkcije tražimo u obliku $v(x^1)$.

# Aksisimetrični slučaj

Važan poseban slučaj : metrika $g(x^1;\epsilon)$ funkcija samo $x^1$ koordinate.

U tom slučaju možemo izabrati i okvir i kookvir tako da samo zavise od $x^1$.

Svojstvene funkcije tražimo u obliku $v(x^1)$.

Aksisimetrični Diracov operator bez mase na polugustinama koji odgovara perturbovanoj metrici $g(x^1,\epsilon)$ je

$$
\begin{aligned}
W_{1/2}(\epsilon) = & -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} {e_3}^1 & {e_1}^1 - i{e_2}^1 \\ {e_1}^1 + i{e_2}^1 & -{e_3}^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\
& -\frac{i}{2}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {e_3}^1 & {e_1}^1 - i{e_2}^1 \\ {e_1}^1 + i{e_2}^1 & -{e_3}^1 \end{pmatrix} \\
& +\frac{\delta_{jk}}{4\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}}\left({e^j}_3\left(\frac{d{e^k}_2}{dx^1}\right) - {e^j}_2\left(\frac{d{e^k}_3}{dx^1}\right)\right) I .
\end{aligned}
$$

# Glavni rezultat

Pod proizvoljnim perturbacijama metrike $g(x^1;\epsilon)$, koeficijenti asimptotskog razvoja svojstvenih vrijednosti $\pm 1$

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 + \lambda_+^{(1)}\epsilon + \lambda_+^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{ kako } \ \epsilon \to 0,$$
$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \lambda_-^{(1)}\epsilon + \lambda_-^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{ kako } \ \epsilon \to 0,$$

mogu se izračunati eksplicitno.

# Glavni rezultat

Pod proizvoljnim perturbacijama metrike $g(x^1;\epsilon)$, koeficijenti asimptotskog razvoja svojstvenih vrijednosti $\pm 1$

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 + \lambda_+^{(1)}\epsilon + \lambda_+^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{ kako } \ \epsilon \to 0,$$
$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \lambda_-^{(1)}\epsilon + \lambda_-^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{ kako } \ \epsilon \to 0,$$

mogu se izračunati eksplicitno.

## Koeficijenti linearog izraza

$$\lambda_+^{(1)} = -\frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0), \quad \lambda_-^{(1)} = \frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0).$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_+^{(2)} = {} & \frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) - \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m) \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}(m+1)^2\,\widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)} \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{31}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \overline{i\widehat{h}_{21}(m+1)}\right) \\
& - \frac{i}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{21}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \overline{i\widehat{h}_{21}(m+1)}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_-^{(2)} = {} & -\frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) + \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m) \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{1}{m+1}(m-1)^2\,\widehat{h}_{11}(m+1)\overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{31}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - \overline{i\widehat{h}_{21}(m-1)}\right) \\
& - \frac{i}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{21}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - \overline{i\widehat{h}_{21}(m-1)}\right).
\end{aligned}
$$

# Primjer spektralne asimetrije

Za perturbacijske matrice

$$h_{\alpha\beta}(x^1) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ 0 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}, \quad k_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ \cos x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

imamo

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

$$\lambda_-(\epsilon) = -1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Tako imamo $\lambda_+^{(1)} + \lambda_-^{(1)} = 0$ and $\lambda_+^{(2)} + \lambda_-^{(2)} \neq 0$.

# Primjer spektralne asimetrije

Za perturbacijske matrice

$$h_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} 1 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ \cos x^1 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ \sin x^1 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}, k_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ \cos x^1 & -\sin x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

imamo

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{4}\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Tako da je $\lambda_+^{(1)} + \lambda_-^{(1)} = 0$ and $\lambda_+^{(2)} + \lambda_-^{(2)} \neq 0$.

# Ekspazija problema

- Ponovo radimo na 4-mnogostrukosti $\mathcal{M}$.
- Lokalne koordinate $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.
- Data pozitivna gustina $\rho$.
- Radimo sa 2-kolonama $v : M \mapsto \mathbb{C}^2$ skalarnih polja.
- Unutrašnji proizvod je $\langle v, w \rangle = \int_m w^* v \rho dx$.

# Ekspazija problema

- Ponovo radimo na 4-mnogostrukosti $\mathcal{M}$.
- Lokalne koordinate $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.
- Data pozitivna gustina $\rho$.
- Radimo sa 2-kolonama $v : M \mapsto \mathbb{C}^2$ skalarnih polja.
- Unutrašnji proizvod je $\langle v, w \rangle = \displaystyle\int_m w^* v \rho dx$.

Posmatramo formalno samokonjugovan linearni diferencijalni operator prvog reda $L$ koji djeluje na 2-kolonama skalarnih polja kompleksnih vrijednosti.

# Invarijantna analitička reprezentacija linearnog operatora

U lokalnim koordinatama operator je

$$L = U^{\alpha}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + V(x),$$

# Invarijantna analitička reprezentacija linearnog operatora

U lokalnim koordinatama operator je

$$L = U^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + V(x),$$

gdje su $U^\alpha(x)$ i $V(x)$ neke $2 \times 2$ matrične funkcije.

# Invarijantna analitička reprezentacija linearnog operatora

U lokalnim koordinatama operator je

$$L = U^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + V(x),$$

gdje su $U^\alpha(x)$ i $V(x)$ neke $2 \times 2$ matrične funkcije.

Definišemo principalni simbol $L_{\text{prin}}$ i subprincipalni simbol $L_{\text{sub}}$ koji jedinstveno određuju operator $L$.

$L_{\text{prin}}$ i $L_{\text{sub}}$ su invarijantno definisane $2 \times 2$ Hermitske matrične funkcije, respektivno na $T^*\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}$.

# Geometrija?

# Geometrija?

Determinanta principalnog simbola je kvadratna forma momentuma $p$

$$\det L_{\text{prin}}(x,p) = -g^{\alpha\beta}(x) p_\alpha p_\beta ,$$

# Geometrija?

Determinanta principalnog simbola je kvadratna forma momentuma $p$

$$\det L_{\text{prin}}(x,p) = -g^{\alpha\beta}(x)p_\alpha p_\beta,$$

koeficijenti $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ komponente su kontravarijantnog metričkog tenzora!

# Geometrija?

Determinanta principalnog simbola je kvadratna forma momentuma $p$

$$\det L_{\text{prin}}(x,p) = -g^{\alpha\beta}(x) p_\alpha p_\beta,$$

koeficijenti $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ komponente su kontravarijantnog metričkog tenzora!

Metrika je Lorentzova!

# Geometrija?

Determinanta principalnog simbola je kvadratna forma momentuma $p$

$$\det L_{\mathrm{prin}}(x,p) = -g^{\alpha\beta}(x)p_\alpha p_\beta,$$

koeficijenti $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ komponente su kontravarijantnog metričkog tenzora!

Metrika je Lorentzova!

Još više geometrije "iskače" - elektromagnetni kovektorski potencijal, Paulijeve matrice, konekcija za spinorska polja.

## Teorem [J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 165203]

Diracova jednačina u zakrivljenom prostorvremenu može se zapisati kao sistem od 4 jednačine

$$\begin{pmatrix} L & m\,I \\ m\,I & Adj\,L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

## Teorem [J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 165203]

Diracova jednačina u zakrivljenom prostorvremenu može se zapisati kao sistem od 4 jednačine

$$\begin{pmatrix} L & m\,I \\ m\,I & Adj\,L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

$m$ je masa elektrona, $I$ jedinična matrica, $v, w$ su nepoznate 2-kolone skalarnih polja kompleksnih vrijednosti.

# Četiri fundamentalne jednačine teorijske fizike

1. Maxwellove jednačine. Opisuju elektromagnetizam i fotone.
2. Diracova jednačina. Opisuje elektrone i pozitrone.
3. Diracova jednačina bez mase. Opisuje neutrine i antineutrine.
4. Linearizovane Einsteinove jednačine polja generalne relativnosti. Opisuju gravitaciju.

Sve četiri sadrže istu fizikalnu konstantu, $c$.

# Prihvaćeno objašnjenje

Stvoritelj je geometar.

# Prihvaćeno objašnjenje

Stvoritelj je geometar.

On/a je napravio/la 4-dimenzionalni svijet parametrizovan pomoću lokalnih koordinata $x^0, x^1, x^2, x^3$ - udaljenosti se mjere na čudan, Lorentzov način.

# Prihvaćeno objašnjenje

Stvoritelj je geometar.

On/a je napravio/la 4-dimenzionalni svijet parametrizovan pomoću lokalnih koordinata $x^0, x^1, x^2, x^3$ - udaljenosti se mjere na čudan, Lorentzov način.

Nakon što se odlučio/la da iskoristi Lorentzovu metriku, veliki graditelj je onda napisao/la glavne jednačine teorijske fizike koristeći se samo geometrijskim konstrukcijama, tj. konceptima konekcije, krivine, torzije, itd.

Sve jednačine sadrže istu konstantu u sebi.

# Alternativno objašnjenje

Stvoritelj je analitičar.

# Alternativno objašnjenje

Stvoritelj je analitičar.

Napravio je 4-dimezionalni svijet, te je onda napisao jedan sistem nelinearnih PDJ koje opisuju sve fenomene u svemiru.

# Alternativno objašnjenje

Stvoritelj je analitičar.

Napravio je 4-dimezionalni svijet, te je onda napisao jedan sistem nelinearnih PDJ koje opisuju sve fenomene u svemiru.

Veliki graditelj nije želio neki posebni način mjerenja udaljenosti, a ovaj sistem PDJ ima različita rješenja koja mi interpretiramo kao elektromagnetizam, gravitaciju, elektrone, neutrine, itd.

# Alternativno objašnjenje

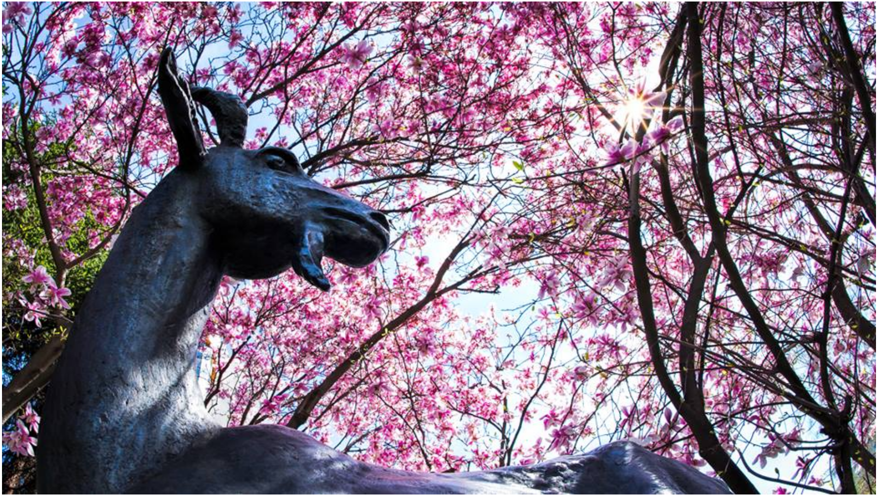
Stvoritelj je analitičar.

Napravio je 4-dimezionalni svijet, te je onda napisao jedan sistem nelinearnih PDJ koje opisuju sve fenomene u svemiru.

Veliki graditelj nije želio neki posebni način mjerenja udaljenosti, a ovaj sistem PDJ ima različita rješenja koja mi interpretiramo kao elektromagnetizam, gravitaciju, elektrone, neutrine, itd.

Razlog zbog kojeg se ista fizikalna konstanta, $c$, manifestira u svim fizikalnim fenomenima je taj što gledamo različita rješenja istog sistema PDJ.

Moguća prednost ovog pristupa je da postoji šansa da opišemo interakcije fizikalnih polja na konzistentniji, neperturbativni(?) način.



Hvala na pažnji i dobro došli u Tuzlu!