Nermin Okičić

Vedad Pašić

# Elementi matematičke logike

## sa primjenom u računarskoj nauci

# ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

## SA PRIMJENOM U RAČUNARSKOJ NAUCI

Nermin Okičić Vedad Pašić

Udžbenik Univerziteta u Tuzli
Manualia Universitatis Studiorum Tuzlaensis

Tuzla, 2015

ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE
SA PRIMJENOM U RAČUNARSKOJ NAUCI

Nermin Okičić
Vedad Pašić

**Izdavač:**
"OFF-SET" Tuzla

**Za izdavača:**
Sadika Murić, direktor

**Recenzenti:**
Dr. Siniša Crvenković, prof.
Dr.sc. Naser Prljača, red. prof.
Dr.sc. Enes Duvnjaković, vanr. profesor

**Štampa:**
"OFF-SET" Tuzla

**Tiraž:**
150 primjeraka

---

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

510.6(075.8)

OKIČIĆ, Nermin
Elementi matematičke logike sa primjenom u računarskoj nauci / Nermin Okičić, Vedad Pašić. - Tuzla : Off-set, 2015. - 191 str. : ilustr. ; 25 cm

Bibliografija: str. 188. - Registar.

ISBN 978-9958-31-233-5
1. Pašić, Vedad
COBISS.BH-ID 22600710

---

# Sadržaj

# Predgovor

LOGIKA je nauka o *logosu*, pri čemu se pod logosom podrazumijeva govor, riječ, smisao izražen riječima, pojam duha ili misao. Najuobičajenije shvatanje logike je da je to nauka o mišljenju, o poretku misli ili o poretku razuma. Pri tome se pretpostavlja ili podrazumijeva da se razum ponaša po nekim pravilima, a ta pravila su upravo logička pravila. Za logiku kažu da je filozofska disciplina koja se bavi oblicima valjane misli (Petrović [7]) ili da je to disciplina koja se bavi načelima dosljednog zaključivanja. Pri tome dosljednost u zaključivanju ne treba da zavisi samo o značenju rečenica i riječi, koje mogu čak biti i nepoznate. Logička dosljednost je nešto sasvim apstraktno i treba da se tiče same forme i oblika. Zbog toga je logika formalna nauka.

Šta je matematička logika? Da li je matematička logika primjena matematike prilikom logičkih zaključivanja, ili je neka "strožija" primjena logike prilikom matematičkih dokaza? Krajem osamnaestog vijeka Immanuel Kant je izrekao mišljenje da je logika "kompletiran predmet", međutim samo pedeset godina kasnije nova saznanja i rezultati su se pojavili u logici kao rezultat rada Georgea Boola i drugih. Od tada, logika i matematika su počele da se isprepliću do te mjere da uskoro nije bilo moguće povući liniju razdvajanja između njih (Levitz i Levitz [5]). Da li je matematika dio logike, ili obratno, ne slažu se ni svi logičari u odgovoru. Intuicionisti smatraju da su matematičke konstrukcije osnova, a logičko rasuđivanje je sekundarno, dok logicisti smatraju da se matematika zasniva na logici to jest, matematika je grana logike. Jedno je sigurno: matematička logika jedna je od matematičkih teorija. Neki njeni veliki dijelovi su: teorija skupova, teorija modela, teorija dokaza, teorija rekurzije itd.

Ono što matematiku izdvaja od drugih disciplina jeste korištenje dokaza kao glavnog alata za određivanje istine. Pri tome se naravno postavlja pitanje "Šta je dokaz?". Praktično govoreći, dokaz je bilo koji rezonski argument koga prihvataju i drugi matematičari. Naravno da je preciznija definicija dokaza neophodna kako bismo neki matematički rezon htjeli ili ne htjeli prihvatiti. Ovo predstavlja jedan od osnovnih razloga izučavanja matematičke logike.

Matematička logika je fundamentalna disciplina u računarskoj nauci. Sve one famozne "nule i jedinice" o kojima stalno čujemo u popularnoj kulturi su u stvari stanja promjenljivih u Booleovim algebrama. Činjenica da je Booleov rad iz devetnaestog vijeka u osnovi svakog elektroničkog uređaja i računara bi sigurno zapanjila samog Boolea. Takođe, teorija računarstva kao takva je zasnovana na konceptima koje su definisali logičari i matematičari. Gödel[1] presudno je uticao na razvoj logike dvadesetog vijeka, a njegov pojam izračunljive funkcije inspirisao je Turinga[2] da napravi svoje (Turingove) mašine, koje predstavljaju teorijsku osnovu svakog modernog računara, te Churcha[3] u njegovom lambda računu, konceptualno jednostavnom univerzalnom modelu izračunljivosti. Dobro poznavanje osnova matematičke logike je stoga obavezno svakom dobrom inžinjeru ili programeru.

Matematička logika se bavi formalizacijom i analizom vrsta rezonovanja koje koristimo u ostalim dijelovima matematike. Zadatak matematičke logike nije pokušaj bavljenja matematikom *per se* potpuno formalno, nego izučavanje formalnih logičkih sistema kao matematičkih objekata u njihovoj sopstvenoj zakonitosti, radi dokazivanja činjenica o njima.

Jedan dio problema formalizacije matematičkog rezonovanja je nužno vezan za preciznu specifikaciju jezika u kojem radimo. Govorni jezici su i odviše kompleksni i "živući", podložni stalnim promjenama, te su kao takvi teško upotrebljivi u matematici. Za razliku od njih, jezici formalne logike su kao i programski jezici, strogo određeni, jednostavni i fleksibilni, te će jedan od zadataka matematičke logike upravo biti utvrđivanje jezika, kao i naše opismenjavanje u okviru istog.

Formalni logički sistemi zahtjevaju pažljivu specifikaciju dozvoljenih pravila rezonovanja, kao i neke ideje o interpretaciji tvrđenja iskazanih u datom jeziku i utvrđivanju njihovih istinitosti. Upravo veze između interpretacije tvrđenja, istinitosti i rezonovanja su kvantitativno i kvalitativno stvarna vrijednost ove discipline.

Ova knjiga prvenstveno je namjenjena studentima prve godine dodiplomskog studija matematike i u potpunosti prati silabus predmeta "Elementi matematičke logike" na Odsjeku Matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli, te je namjenjena da bude udžbenik na tom predmetu. Dakako, nadamo se da će ovaj udžbenik biti od interesima i drugima, a pogotovo studentima elektrotehnike i računarstva, budući da se u ovoj knjizi bavimo i primjenama logike u računarskoj nauci.

U pisanju ovog udžbenika koristili smo se jezičkim pravilima iz knjige "Pravopis

[1]Kurt Friedrich Gödel (1906 - 1978), austrijski i američki logičar, matematičar i filozof

[2]Alan Turing (1912 - 1954), engleski matematičar i obavještajac

[3]Alonzo Church (1903 - 1995), američki matematičar i logičar

bosanskog jezika" autora Senahida Halilovića (Preporod 1996. godine).
Zahvaljujemo se mr. sci. Elvisu Barakoviću na tehničkoj i drugarskoj pomoći u tehničkoj obradi teksta. Posebno se zahvaljujemo recenzentima ovog udžbenika, Prof. dr. sci. Siniši Crvenkoviću, Prof. dr. sci. Naseru Prljači i Prof. dr. sci. Enesu Duvnjakoviću na njihovom trudu, radu i doprinosu da ovaj udžbenik bude što bolji, pregledniji i sadržajniji. Prijatna nam je dužnost i čast da im izrazimo iskrenu zahvalnost na pomoći i suradnji.
Ovaj udžbenik se sastoji od 5 poglavlja. U poglavlju "Logika iskaza" uvodimo i bavimo se osnovnim pojmovima matematičke logike, iskazima, iskaznim formulama i algebrama, tautologijama, hipotezama, poljedicama i normalnim formama.
U poglavlju "Logika u računarskoj nauci" uvodimo osnovne koncepte u računarskoj nauci, te prezentujemo neke primjene matematičke logike u istoj: logičkim predstavljanjima prekidačkih kola, logičkim elementima, logičkim mrežama (njihovom analizom i sintezom), te pojednostavljivanjem logičkih mreža.
U poglavlju "Logika predikata" uvodimo pojmove kvantifikatora, terma i predikatskih formula, vezanih i slobodnih promjenljivih, te raspravljamo o interpretaciji i valuaciji, valjanim formulama, odnosima među predikatskim rečenicama, a uvodimo i tzv. glavni test za predikatske formule, preneks forme i način zamjene promjenljivih termom.
U poglavlju "O matematičkim teorijama" uvodimo formalno pojmove definicije, aksiome, teoreme, te najvažnije stvari, tojest dokaza u matematičkim teorijama. Pokazujemo izgradnju aksiomatske teorije i dajemo konkretne primjere.
U poglavlju "O formalnim teorijama" uvodimo pojam formalne teorije, iskaznu logiku i predikatsku logiku posmatramo kao takve, te dajemo primjer formalizovane teorije.
Na kraju u dodatku dajemo primjere logičkih veznika u svakodnevnom govoru, kao i popise slika, tabela i algoritama koji se pojavljuju u tekstu.

*Za Bekira, Alju i Ajada...*

POGLAVLJE 1

# LOGIKA ISKAZA



ISKAZNA logika je dio matematičke logike koji se bavi isključivo iskazima. Kao što ćemo vidjeti, definisanje pojma iskaza nije jednostavan čin pa ćemo ga prihvatiti kao primitivan pojam ove teorije. U logici iskaza same promjenljive imaju ulogu iskaza, pri tome iskazi mogu biti kombinovani u složenije iskaze koristeći se logičkim veznicima. Logika iskaza nam je dovoljna za izražavanje i opisivanje većine matematičkog sadržaja, ali takođe i za opis nekih drugih teorija gdje se prije svega misli na računarske nauke. Logika iskaza ima svoju sintaksu (jezik), svoju semantiku (značenje iskaza), kao i svoje deduktivne sisteme. Semantika i deduktivni sistemi se grade nad isto definisanom sintaksom, to jest nad istim skupom formula. Glavni problem u logici iskaza jeste ispitivanje istinitosti iskaznih formula. S tim u vezi definišemo istinitosnu funkciju kao alat za ispitivanje istinitosti, a onda selektujemo iskazne formule prema njihovoj istinitosti. Jednu od selektovanih klasa, iskazne formule koje su uvijek istinite-tautologije, posebno izdvajamo jer su od posebne važnosti u matematici.

## 1.1 Iskazi i iskazne formule

Iskaz je osnovni pojam u matematičkoj logici koga bi mogli pokušati definisati kao smislenu rečenicu koja ima osobinu da može biti tačna ili netačna. Naprimjer, rečenicom

"2 je djelilac svakog parnog broja.",

dat je jedan iskaz jer rečenica ima smisla i tvrdnja njome iskazana je tačna, a rečenica

"Sunce je planeta koja kruži oko Zemlje."

je takođe smislena, ali netačna. Međutim, rečenice

"Kada ona gdje kako uh.",
"Da li je kraj časa?"

nisu u gornjem kontekstu iskazi jer prva nema nikakvog smisla, a druga ima smisla, ali je upitna rečenica i kao takva nije ni tačna ni netačna.
Ipak, gornji pokušaj definisanja pojma iskaza je neformalan i nedovoljno operativan. Postoje rečenice za koje nije uvijek moguće na ovaj način utvrditi da li jesu ili nisu iskazi. Naprimjer, rečenica

"Ovo što upravo tvrdim je laž.",

u prvi mah izgleda da jeste iskaz (smislena je i mogli bi utvrđivati njenu istinitost), ali isto tako njenom analizom bismo mogli reći da se njome nešto tvrdi, a da to nije tačno. Naime, ako je ta izjava lažna, to znači da smo rekli istinu, a ako je ta izjava istinita, to bi značilo da smo zaista rekli laž. Zbog svega ovoga u iskaznoj logici se pojmom iskaza služimo kao osnovnim, intuitivnim, to jest pojmom koga ne definišemo. Takve pojmove nazivamo *primitivnim pojmovima.*
Pojedinačne iskaze u iskaznoj logici označavamo sa malim pisanim slovima *p, q, r, s, t,...* i nazivamo ih iskazna slova ili iskazne varijable. Od jednostavnih iskaza gradimo složenije iskaze koristeći logičke veznike, odnosno logičke operacije.
Logičke veznike, u zavisnosti od toga na koliko iskaza djeluju, dijelimo na unarne, binarne, ternarne itd. Ovu činjenicu nazivamo *dužina* ili *arnost* veznika. Za nas su od interesa samo neki unarni i binarni veznici.

***DEFINICIJA* 1.1.1**

Negacija je unarni veznik. *Negacija* iskaza $p$, je iskaz '*nije* $p$', koga označavamo sa '$\neg p$'.
Negacija tačnog iskaza je netačan iskaz i obrnuto, negacija netačnog iskaza je tačan iskaz.

***Primjer*** *1.1.* Neka je dat iskaz

$p:$ "Danas učim logiku."

Negacija iskaza $p$ tada je "Nije danas učim logiku.", što ćemo naravno u svakodnevnom govoru izreći "korektnije" sa "Danas ne učim logiku.". $\diamondsuit$

Testovi koji ne ispituju istinitost formule za svaku valuaciju, već se traži samo jedna za koju će formula imati neku osobinu, nazivaju se *ciljani testovi*. Tako, ako želimo ispitati da li je neka formula ispunjiva, tražimo bar jednu valuaciju u kojoj je formula tačna. Ako pak želimo ispitati da li neka formula $B$ logički slijedi iz formule $A$, dovoljno je tražiti valuaciju tih formula u kojima će biti $\mathcal{T}(A) = \top$ i $\mathcal{T}(B) = \bot$. Ako takva valuacija ne postoji, zaključujemo da je $A \Rightarrow B$ tautologija, a ako postoji onda $B$ ne slijedi logički iz formule $A$.

| | | |
|---|---|---|
| $\neg$ | $\neg A$ $\bot$<br>$A$ $\top$ | $\neg A$ $\top$<br>$A$ $\bot$ |
| $\wedge$ | $A \wedge B$ $\bot$<br>$A$ $\bot$     $B$ $\bot$ | $A \wedge B$ $\top$<br>$A$ $\top$<br>$B$ $\top$ |
| $\vee$ | $A \vee B$ $\bot$<br>$A$ $\bot$<br>$B$ $\bot$ | $A \vee B$ $\top$<br>$A$ $\top$     $B$ $\top$ |
| $\Rightarrow$ | $A \Rightarrow B$ $\bot$<br>$A$ $\top$<br>$B$ $\bot$ | $A \Rightarrow B$ $\top$<br>$A$ $\bot$     $B$ $\top$ |
| $\Leftrightarrow$ | $A \Leftrightarrow B$ $\bot$<br>$A$ $\top$     $A$ $\bot$<br>$B$ $\bot$     $B$ $\top$ | $A \Leftrightarrow B$ $\top$<br>$A$ $\top$     $A$ $\bot$<br>$B$ $\top$     $B$ $\bot$ |

**Tabela 1.6:** Pravila grananja glavnog testa

Jedan od primjera ciljanog testa je takozvani *glavni test* (u literaturi se naziva i *glavno stablo* ili *semantički tableux*) čije ćemo principe i pravila sada izložiti.
Za zadatu formulu $F$, polazimo od pitanja da li postoji valuacija u kojoj je formula netačna. Dakle, ispitivanje počinjemo sa redom (zahtjevom):

$$F \ \bot \, .$$

Sada primjenom određenih pravila, s obzirom na trenutno "glavnu" logičku operaciju, razgrađujemo (granamo) datu formulu. Pravila koja koristimo za grananje data su u Tabeli 1.6.

POGLAVLJE 2

# LOGIKA U RAČUNARSKOJ NAUCI



BOOLE[1] je u svom radu *Matematička analiza logike* iz 1847. godine pokušao da formuliše logiku koristeći se matematičkim izrazima. Pravila zaključivanja Boole je zasnovao na različitim zakonitostima o manipulaciji algebarskim izrazima:

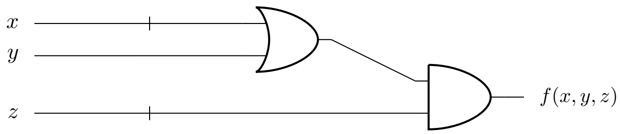
> "Namjera sljedeće rasprave je da ispita fundamentalne zakone operacija uma pomoću kojih se formira i izvodi rezonovanje; dati tim zakonima iskaze u simboličnom jeziku računa, te na ovoj osnovi postaviti logičku nauku i konstruisati njene metode."

Profesor Boole bi vjerovatno bio veoma iznenađen kad bi znao do kojih je intelektualnih i praktičnih visina dospjelo njegovo rezonovanje. Naprimjer, zašto bi matematička logika uopće bila bitna za računarsku nauku? Odgovor na to

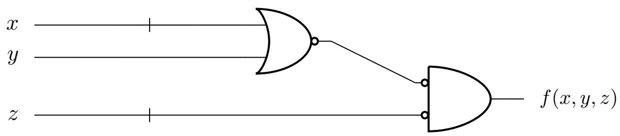
[1] George Boole (1815 - 1864), engleski matematičar i filozof

pitanje nije očit, pogotovo većini laika, no svaki ekspert iz oblasti računarskih nauka vrlo dobro poznaje logičke strukture, bez kojih moderno računarstvo jednostavno ne bi bilo moguće. Do prije stotinjak godina, sav račun koji je naučnicima svih profila bio potreban se radio ručno i u glavama istih, što je s vremenom postalo nevjerovatno komplikovano. Danas međutim, sa izumom elektronskog računara, logika je našla novi dom - u računarskoj nauci.
Većina knjiga i radova o matematičkoj logici uključuje precizne analize karakterstika deduktivnog zaključivanja, te uvode neke posebne simbole u onome što nazivaju "formalnim jezicima", ali logika nije samo manipulacija simbolima. Logika nas uči općim konceptima i metodama koji su korisni nezavisno od formalnih jezika. Možemo konstruirati dokaze koristeći se bosanskim, ili bilo kojim drugim jezikom, kao i formalnim jezikom, tako da se koncepti i metode koje naučimo mogu koristiti u različitim kontekstima. Čak smo u mogućnosti dokazivati teoreme o formalnim jezicima - ovo je posebno bitno u računarskoj nauci, lingvistici i većini grana matematike.
Ideja koja je dovela do koncepta računara uopće, Turingova mašina izumljena je tokom istraživačkog rada iz matematičke logike - na toj temi su sad zasnovani brojni Hollywoodski filmovi, jer je taj rad uveliko doveo i do završetka II svjetskog rata. Računarski programi su napisani u posebnim, simboličnim jezicima, kao što su Fortran, C, C++, JAVA, Lisp, Prolog, itd. Ovi jezici sadrže obilježja logičkog simbolizma, dok su recimo Lisp i Prolog izvedeni iz formalnih logičkih jezika. Kroz takve veze, proučavanje logike može pomoći u kreiranju i dizajniranju računarskih programa. Računaru se mora reći šta da radi i to na vrlo precizan i formalan način. Primjena ovakve precizne deskripcije je SQL (Standard Query Language), progamski jezik koji se koristi za upravljanje bazama podataka. Iako je sintaksa ovog jezika drugačija, on je u biti ekvivalentan logici prvog reda.
Druge matematičke strukture, kao što su recimo rekurzivne definicije i indukcija, ekstenzivno se koriste u programiranju, dok se teorija skupova koristi u dizajniranju modernih baza podataka. Ali naravno da računarska nauka nije samo programiranje, već takođe uključuje logičku i matematičku analizu programa. Pomoću takvih analiza, možemo dokazati ispravnost procedura i procjeniti broj koraka koji je potreban kako bi se izvršio specificirani program. Moderna logika se koristi u te svrhe i inkorporirana je u programe koji pomažu da se konstruišu dokazi takvih rezultata. Logika naravno igra i veliku ulogu u dizajniranju i kreiranju novih programskih jezika, te je neophodna za rad u umjetnoj inteligenciji i kognitivnim naukama. Logika se koristi u inžinjerstvu za dizajniranje električnih i drugih vrsta kola. Rani digitalni računar, ENIAC, bio je implementiran tako da se koristi decimalnim ciframa i sistemom. Ali vrlo brzo se shvatilo da prelaskom na drugi sistem, konkretno *binarni* brojevni sistem, zasnovan na Booleovoj algebri, stvari postaju mnogo jednostavnije i brže. Stotine milijardi dolara godišnje troši se za potrebe ove industrije.
Sam Boole je želio da otkrije "zakone uma", ali ubjedljivo je najveći uticaj njego-

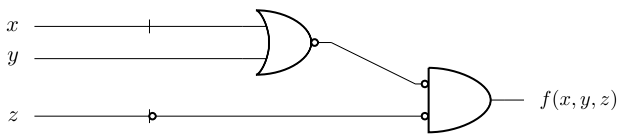
***Primjer** 2.17.* Posmatrajmo funkciju $f(x, y, z) = (\overline{x} + y) \cdot \overline{z}$. Funkcija ima tri promjenljive, odnosno tri inputa u dijagramu (K1). U dijagram upišemo po jedan AND-element i OR-element (K2). Nacrtamo u dijagramu vertikalne crtice tamo gdje se NOT-elementi pojavljuju u funkciji (K3):



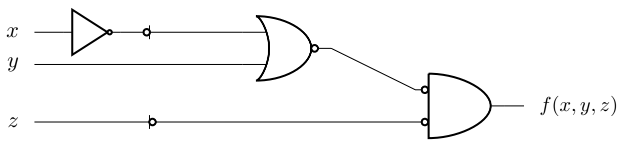

Gornja slika još uvijek ne predstavlja sintezu funkcije. Pretpostavimo da želimo iskoristiti NOR-elemente za implementaciju. Ovo se djelimično postiže tako što dodamo par mjehurića između elemenata (K4). Međutim, mjehurić na donjem inputu AND-elementa je bez svog para:




Sada stavimo odgovarajući mjehurić na vertikalnu crtu kako bismo uparili mjehuriće (K5). Ovaj mjehurić na crti ustvari ne radi ništa, on je samo za potrebe notacije. Mjehurić na donjem inputu desnog elementa već radi potrebnu inverziju.




Kako trebamo i mjehurić za input $x$, a ne možemo dodati odgovarajući par tom mjehuriću na OR-element bez mijenjanja značenja funkcije, dodajemo invertor na $x$-input (K6).




Analizom možemo lako vidjeti da je ova logička mreža sinteza funkcije $(\overline{x} \downarrow y) \downarrow z$, koja je identična originalnoj funkciji, iako je implementacija potpuno drugačijeg iskaza, odnosno

$$(\overline{x} \downarrow y) \downarrow z = \overline{(x \cdot \overline{y})} \cdot \overline{z} = (\overline{x} + y) \cdot \overline{z}.$$

Ova implementacija međutim zahtjeva samo deset MOSFETova, što je za čak šest tranzistora manje od originalne implementacije. $\diamondsuit$

Poglavlje 3

# Logika predikata



IZRAŽAVATI sve nam poznate stvari u nekoj teoriji, ili konkretno u matematici, ne možemo samo pomoću iskaznih formula, odnosno logike iskaza. Naprimjer, jednostavna formula

$$x^2 + y^2 > 5 ,$$

nije iskaz, to jest nije iskazna formula u iskaznoj logici. Kao iskaz u iskaznoj logici ne možemo iskazati ni prostu tvrdnju

"Svaki konačan skup realnih brojeva ima maksimalan element."

Često se susrećemo i sa primjerima logičke argumentacije koji su potpuno ispravni, ali ih ne možemo izraziti iskaznom logikom. Naprimjer, iz rečenica "Sve planete imaju atmosferu." i "Mars je planeta.", trebali bi zaključiti rečenicu "Mars ima atmosferu.". Da bismo to bili u stanju moramo imati način da identifikujemo entitete kao što je Mars, zajedno sa njihovim karakteristikama i međusobnim vezama. Za zapisivanje takvih rečenica očito nisu dovoljni samo iskazna slova i operacijski simboli iskazne logike. Iskazna logika se bavi rečenicama kao cjelinama i ne zalazi u njihovu unutrašnju strukturu, to jest ne razlikuje njihove pojedine elemente.

Logički zapisi kojima se preciznije mogu iskazivati razna matematička tvrđenja, predmetom su našeg daljeg izučavanja.

Matematičke izraze i formule gradimo od raznoraznih elemenata. Zato najprije treba opisati osnovne elemente matematičkih izraza i formula. Uobičajeno, među osnovnim elementima su konstante, promjenljive i operacijski znakovi.

Konstante mogu biti neki konkretni simboli kao što su brojevi 0 ili 1, ili simboli $\top$ i $\bot$, i sl.

Promjenljive su zajedničko ime za objekte iste vrste. Označavamo ih malim ili velikim slovima raznih alfabeta ($x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots, p, q \ldots$ ili $X, Y, \ldots, A, B, \ldots$), a često i sa indeksima ($p_1, q_2, A_i$).

Operacijske znakove često nazivamo i funkcijski simboli. Jednostavnosti radi, operacije iste vrste na različitim skupovima označavat ćemo istim funkcijskim simbolom (naprimjer, sa "$\cdot$" označavamo množenje i na skupu $\mathbb{N}$ i na skupu $\mathbb{R}$), pri čemu vodimo računa da se određenim funkcijskim znakom uvijek označavaju operacije iste dužine (arnosti). Ovo znači da svakom funkcijskom znaku unaprijed zadajemo njegovu dužinu i zahtijevamo da se u daljem tim simbolom označavaju samo operacije te dužine. Naprimjer, znak "+" se uobičajeno koristi za označavanje binarnih operacija sabiranja (operacija dužine 2), to jest "+" koristimo kao binarni funkcijski znak.

Koristeći konstante, promjenljive i operacijske znakove i poštujući neka unaprijed zadana pravila, formiramo izraze koje nazivamo *termi*. Naprimjer, izrazi

$$x^2 + y^2 - 5 * x * y \quad ; \quad a * 1 + b \circ c$$

su termi. U rečenici "Jahorina je viša od Bjelašnice.", Jahorina i Bjelašnica su termi. Naziv "term" bi se mogao prevesti kao "izraz". Međutim, zbog širine korištenog pojma nećemo ga tako shvaćati. Pojam "term" je standardan termin logike.

Termi su formalni izrazi koji nemaju nikakvo konkretno značenje sve dok im ne damo neku konkretnu interpretaciju. Tako u rečenici "Jahorina je viša od Bjelašnice.", Jahorina i Bjelašnica ne moraju obavezno biti imena planina, naprimjer mogu biti i nazivi hotela.

Zadavanje konkretne interpretacije činimo tako što posmatramo neki konkretan skup $A$ sa konkretnim operacijama na njemu. U gornjim primjerima možemo posmatrati skup cijelih brojeva i na njemu definisane operacije sabiranja, oduzimanja i množenja. Pri tome znakove konstanti interpretiramo kao fiksne simbole skupa $A$ (u gore posmatranom primjeru, 5 i 1 su konstante koje interpretiramo kao brojeve 5 i 1). Promjenljive interpretiramo kao proizvoljne elemente skupa $A$ ($x, y, a, b$ i $c$). Operacijske znakove interpretiramo kao konkretne operacije definisane na $A$, tačno određene dužine. Tako bi "+" moglo biti sabiranje (binarna), U predikatskoj logici se držimo i dalje pravila izostavljanja zagrada koje smo uveli u iskaznoj logici. Pri tome, slično kao kod iskazne logike, dogovaramo se o prioritetu logičkih veznika i kvantifikatora. Taj dogovor predstavljen je tabelom 3.1. Tako ćemo umjesto

$$(((\exists x_1)\neg R_1^2(x_1, x_2)) \Rightarrow R_1^1(x_2)) \ ,$$

prema dogovoru o prioritetu, pisati jednostavnije

$$(\exists x_1)\neg R_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow R_1^1(x_2) \ .$$

| | |
|---|---|
| *prioritet* 1 | $\forall \ \exists \ \neg$ |
| *prioritet* 2 | $\wedge \ \vee$ |
| *prioritet* 3 | $\Rightarrow \ \Leftrightarrow$ |

**Tabela 3.1:** Prioritet logičkih veznika i kvantifikatora

Isto tako, u konkretnim matematičkim teorijama funkcijske znakove koristimo bez indeksa, naprimjer $f, g, h$ i slično, a relacijske znakove obilježavamo uobičajeno malim slovima grčkog alfabeta. U formuli

$$\neg(\forall x)(\exists y)(\rho(x, y) \Rightarrow \rho(f(x, y), g(y))) \ ,$$

$\rho$ je relacijski znak dužine 2, a $f$ i $g$ su funkcijski znakovi, prvi dužine 2, a drugi dužine 1.
U formuli

$$(\forall x)(\forall y)(x \leq y \wedge y \neq x + 1) \ ,$$

"$\leq$" je relacijski simbol, "$+$" je funkcijski simbol, a umjesto $\neg(y = x + 1)$ zapisano je takođe standardno $y \neq x + 1$. Ovo su sve uobičajene oznake u strukturama brojeva.

***DEFINICIJA* 3.3.3: Vezana i slobodna promjenljiva**

Pojavljivanje promjenljive $x$ u nekoj formuli je vezano ako i samo ako se $x$ javlja u oblasti djelovanja nekog kvantifikatora. Tada kažemo da je promjenljiva vezana.
Promjenljiva $x$ je slobodna u formuli ako i samo ako nije vezana.

***Primjer*** *3.10.* U formuli

$$(\forall x)\phi(x) \Rightarrow ((\exists y)\rho(x, y) \vee \theta(y)) \ ,$$

POGLAVLJE 4

# O MATEMATIČKIM TEORIJAMA



IZGRADNJA matematičkih disciplina zasniva se na nekim zajedničkim polaznim principima. Ti principi vode porijeklo još iz doba Euklidovih *Elemenata*, napisanim oko 300. godine prije nove ere. Još u to vrijeme geometrija kao disciplina je bila izložena kao aksiomatska teorija.
Prilikom izgradnje neke *aksiomatske teorije* najprije radimo sljedeće:

- Jedan broj pojmova (termina) teorije proglašavamo za osnovne pojmove ili primitivne pojmove - pojmove koji se ne definišu.
- Jedan broj tvrđenja teorije proglašavamo za *aksiome* - tvrđenja koja se ne dokazuju.
- Navodimo *pravila logičkog zaključivanja* - pravila koja smijemo koristiti pri dokazivanju tvrđenja u toj teoriji.

Zašto u aksiomatskoj teoriji postoje pojmovi koji se ne definišu i tvrđenja koja se ne dokazuju?
Definisanje nekog novog pojma znači objašnjenje njegovog značenja pomoću nekih drugih pojmova. Međutim, i značenje tih drugih pojmova je određeno definicijama u kojima se pojavljuju opet neki pojmovi. Pri tome ne smijemo doći u situaciju da je, neposredno ili posredno, u definiciju bilo kog od tih pojmova uključen i sam pojam koga definišemo. Drugačije rečeno, mora se izbjeći kružno kretanje u definiciji (*circulus viciosus*). Ako želimo da izbjegnemo circulus viciosus, dolazimo do takozvanog *beskonačnog regresa* - beskonačne hijerarhije

sve novih i novih pojmova. Naprimjer, skup je kolekcija elemenata, kolekcija je familija elemenata, familija je sveukupnost elemenata, itd.

Ovaj beskonačni regres se može izbjeći samo ako se dogovorimo da neke od pojmova u datoj teoriji ne definišemo, to jest proglašavamo ih za *osnovne* ili *primitivne pojmove*.

Sličnu situaciju imamo i kod dokaza. Tvrđenja dokazujemo polazeći od nekih drugih tvrđenja, pa se "vrćenje u krug" i beskonačni regres u dokazima mogu izbjeći samo tako što neka tvrđenja date teorije nećemo dokazivati - proglašavamo ih za aksiome, tvrđenja koja se ne dokazuju.

O značenju polaznih (osnovnih ili primitivnih) pojmova obično postoji jasna intuitivna predstava. Mogli bi reći i da se osnovni pojmovi ne navode eksplicitno, ali su implicitno uvedeni sistemom aksioma.

Što se tiče aksioma, često se može sresti mišljenje da su aksiome očigledne istine, što je poprilično netačno. Naprimjer, jedna od aksioma Euklidove geometrije je i takozvani Euklidov V postulat koji glasi:
*Ako su dati prava i tačka van te prave, onda postoji tačno jedna prava koja prolazi kroz tu tačku i paralelna je datoj pravoj (nema zajedničkih tačaka sa tom pravom).*

Ova tvrdnja je sve do 19. vijeka smatrana za očiglednu istinu, za zakon koji važi u realnom svijetu. Međutim, u prvoj polovini 19. vijeka pojavile su se geometrije u kojima je V postulat zamijenjen drugačijim aksiomama.
*Geometrija Lobačevskog* mijenja V postulat sa:
*Ako su data prava i tačka van te prave, onda u njima određenoj ravni postoje najmanje dvije prave koje prolaze kroz tu tačku i ne sijeku datu pravu.*
Naknadno se pokazuje da takvih pravih ima beskonačno mnogo.

*Riemmanova sferna geometrija* uvodi aksiom:
*Ako su dati prava i tačka van nje, onda ne postoji niti jedna prava koja prolazi kroz tu tačku i paralelna je sa datom pravom.*
Drugim riječima, u ovoj geometriji se svake dvije prave sijeku.

Pokazalo se da su ove geometrije logički jednako ispravne kao i Euklidova, a kasnije su pronađene i važne primjene ovih geometrija u drugim naukama.

Nove pojmove uvodimo definicijama, polazeći od osnovnih pojmova i već definisanih pojmova. Teoriju razvijamo tvrđenjima, odnosno *teoremama*, koja se na osnovu pravila zaključivanja dokazuju iz aksioma i iz već dokazanih teorema. U dokazivanju se ne koriste iskustva niti ubjeđenja, ma koje vrste, već isključivo logička pravila. To znači da je navedeni metod razvijanja teorije deduktivan: novi pojmovi i tvrđenja izvode se, dedukuju, iz već usvojenih, a na osnovu logičkih zakona. Uvođenje i upotreba navedenih pojmova i postupaka u matematici proučavaju se u okviru matematičke logike. Tome su posvećena prethodna izlaganja, a u narednom što slijedi ćemo dati pojašnjenja i objašnjenja pojedinih pojmova.

## 4.4 Dokazi

Izvođenje (dedukcija) novog tvrđenja je njegov *dokaz* i u smislu tog izvođenja, tvrđenje slijedi iz aksioma. U izvođenju se mogu koristiti i već dokazana tvrđenja, ali je njih, zajedno sa aksiomama, u jednom dokazu uvijek samo konačno mnogo.
Zaključivanje se zasniva na zakonima logičkog mišljenja i raznim logičkim i matematičkim pravilima izvođenja. Formalizovani oblici tih formi zaključivanja jesu tautologije i valjane formule. Navedimo sada neke načine dokazivanja.

**Direktni dokaz** Najčešći način dokazivanja je direktni dokaz. Treba dokazati implikaciju $p \Rightarrow q$. Pretpostavimo tačnost iskaza $p$, a zatim nekim "elementarnim" transformacijama pokažemo istinitost iskaza $q$.

***Primjer*** *4.7.* Dokažimo tvrđenje: Ako su u trouglu dvije stranice podudarne onda naspram njih leže podudarni uglovi.
Dokaz: Neka je dat trougao $\triangle ABC$ kod koga je (pretpostavka) $\overline{AC} \simeq \overline{BC}$. Spustimo iz vrha $C$ visinu na stranicu $\overline{AB}$ i označimo njeno podnožje sa $D$. Tada trouglovi $\triangle ADC$ i $\triangle BCD$ imaju jednu zajedničku stranicu $\overline{CD}$, stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su podudarne, a uglovi $\angle ADC$ i $\angle BDC$ su pravi, dakle podudarni. Na osnovu pravila SSU vrijedi $\triangle ADC \simeq \triangle BDC$. To znači da su im odgovarajući uglovi podudarni, a time i $\angle DAC \simeq \angle DBC$, što je i trebalo dokazati. $\diamondsuit$

***Primjer*** *4.8.* Dokazati tvrdnju:
Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi,

$$\text{ako je } n \equiv 3 \ (mod\ 4) \text{ onda je } n^2 \equiv 1 \ (mod\ 4).$$

Dokaz: Neka je $n$ prirodan broj takav da je $n \equiv 3 \ (mod\ 4)$, to jest $n = 4k + 3$, za neko $k \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} n^2 &= (4k+3)^2 \\ &= 16k^2 + 24k + 9 \\ &= 16k^2 + 24k + 8 + 1 \\ &= 4(4k^2 + 6k + 2) + 1 \\ &= 4k' + 1 \ \text{ za neko } k' \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Dakle vrijedi, $n^2 \equiv 1 \ (mod\ 4)$. $\diamondsuit$

Poglavlje 5

# O formalnim teorijama



Kao što smo rekli u dijelu o matematičkim teorijama, matematičke discipline se mogu posmatrati i potpuno formalno, to jest sintaksički. U takvom pristupu smisao pojmova i istinitost tvrđenja nemaju direktan uticaj na razvoj same teorije. Umjesto toga daju se precizna pravila za formiranje izraza i formula, kao i precizna pravila dokazivanja. Jedino o čemu vodimo računa je da li se ta pravila dosljedno poštuju. Dokaz teoreme u ovom pristupu je konačan niz formula koje se izvode po unaprijed definisanim pravilima.

Da bi neku matematičku disciplinu (naprimjer teorija brojeva, teorija grupa, Euklidska geometrija i slično) izgradili kao *formalnu teoriju*, neophodno je da istim formalizmom budu izgrađene i teorije koje joj prethode. Kako smo to spomenuli ranije, to moraju biti u svakom slučaju iskazna i predikatska logika, a u većini slučajeva i teorija skupova. U tom smislu razvijeni su *iskazni račun* i *predikatski račun* kao formalne teorije sa sopstvenim aksiomama i pravilima izvođenja. Ostale matematičke discipline se izgrađuju kao formalne teorije unutar predikatskog računa, uz eventualan dodatak novih primitivnih pojmova i novih aksioma.

U izlaganju formalnih teorija postoji jasna razlika između *meta-jezika*, kojim se govori o teoriji, i *objekt-jezika*, koji predstavlja jezik formula same teorije. Formalnu teoriju uobičajeno izgrađujemo tako da bar intuitivno ona odgovara nekoj matematičkoj disciplini. Za tu matematičku disciplinu onda kažemo da je *glavna interpretacija* izgrađivane formalne teorije.

## 5.1 Formalne teorije

**DEFINICIJA 5.1.1**

Formalna teorija $\mathcal{T}$ se definiše kao uređena četvorka

$$\mathcal{T} = (X, \mathcal{F}, \mathcal{A}, P) \ ,$$

gdje je

- $X$ prebrojiv skup, koga nazivamo *skup polaznih simbola* ili *alfabet* formalne teorije $\mathcal{T}$.
- $\mathcal{F}$ podskup skupa svih riječi nad alfabetom $X$, koga nazivamo *skup formula* formalne teorije $\mathcal{T}$.
- $\mathcal{A}$ podskup skupa formula $\mathcal{F}$, koga nazivamo *skup aksioma* formalne teorije $\mathcal{T}$.
- $P$ konačan skup relacija (različitih dužina) na skupu formula, koga nazivamo *skup pravila izvođenja* formalne teorije $\mathcal{T}$.

Neka je $R \in P$ neko pravilo izvođenja, to jest relacija na $\mathcal{F}$ dužine $n$ i neka su $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$ i $F$ formule iz $\mathcal{F}$. Ako je

$$(F_1, F_2, ..., F_{n-1}, F) \in R \ ,$$

tada kažemo da je formula $F$ *direktna posljedica* formula $F_1, F_2, ..., F_{n-1}$, po pravilu izvođenja $R$, a to uobičajeno zapisujemo sa

$$R : \frac{F_1, F_2, ..., F_{n-1}}{F} \ .$$

**DEFINICIJA 5.1.2**

Za konačan niz formula $F_1, F_2, ..., F_n$ kažemo da je *izvođenje, dedukcija* ili *dokaz* u teoriji $\mathcal{T}$, ako za svaku od tih formula važi:

- $F_i$ ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) je aksiom teorije $\mathcal{T}$ ili
- $F_i$ ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) se dobija od nekih prethodnih formula u tom nizu, prema nekom od pravila izvođenja u teoriji $\mathcal{T}$.

***TEOREM* 5.2.8**

Iskazni račun $\mathcal{L}$ je odlučiva teorija.

## 5.3 Predikatska logika kao formalna teorija

Da bi se pojedine oblasti matematike zasnovale strogo aksiomatski, nije dovoljno formalizovati samo iskaznu logiku, nego se to mora učiniti i sa logikom predikatskog računa. Tako dolazimo do formalne teorije koju nazivamo *predikatski* ili *kvantifikatorski račun*, u oznaci $\mathcal{P}$. Predikatski račun definišemo na sljedeći način.

***DEFINICIJA* 5.3.1**

- Alfabet teorije $\mathcal{P}$ čine isti polazni simboli kojim se definišu predikatske formule (predikatski račun), osim što se koriste samo dva logička veznika $\neg$ i $\Longrightarrow$, kao i kvantifikator $\forall$.
- Za formule teorije $\mathcal{P}$ koristimo formalnu induktivnu definiciju takvih formula, kao što smo to učinili u iskaznom računu, ali bez veznika $\wedge$, $\vee$ i $\Longleftrightarrow$ kao i bez kvantifikatora $\exists$. Veznike $\wedge$, $\vee$ i $\Longleftrightarrow$ možemo uvesti na isti način kao u iskaznom računu, dok kvantifikator $\exists$ uvodimo sa

  $$(\exists x) \text{ je zamjena za } \neg(\forall x)\neg\ .$$

  Svaka formula teorije $\mathcal{P}$ je jedna predikatska formula i obrnuto.
- Aksiome teorije $\mathcal{P}$ su:

  Ax 1: $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$,

  Ax 2: $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$,

  Ax 3: $(\neg A \Longrightarrow \neg B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$,

  Ax 4: $(\forall x)(A \Longrightarrow B(x)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow (\forall x)B(x))$, pod uslovom da $x$ nije slobodna promjenljiva u formuli $A$,

  Ax 5: $(\forall x)A(x) \Longrightarrow A(t)$, ako je term $t$ nezavisan od varijable $x$ u formuli $A(x)$.

# Bibliografija


[1] D. Barker-Plummer, J. Barwise, J. Etchemendy: *Language, Proof, and Logic*, Center for the Study of Language and Inf; 2nd Edition edition, Stanford, USA, 2011.

[2] S. Bilaniuk: *A Problem Course in Mathematical Logic*, Trent University, Peterborough Ontario, Canada, 2003.

[3] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas: *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.

[4] Đ. Kurepa : *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[5] K. Levitz, H. Levitz: *Logic and Boolean Algebra*, Barron's Educational Series, inc. New York 1979.

[6] D. Parezanović: *Računarski sistemi i elektronska obrada podataka*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[7] G. Petrović: *Logika*, Školska Knjiga, Zagreb, 1964

[8] S. G. Simpson: *Mathematical Logic*, The Pensilvania State University, 2005.

[9] Z. Šikić: *Novija filozofija matematike*, Nolit, Beograd, 1987.

[10] M. Vuković: *Matematička logika 1*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2006.

[11] S. Wills, L. Wills: *Designing Computer Systems*, MIT, 2011.