Univerzitet u Tuzli
Prirodno-matematički fakultet
Odsjek matematika

Elvis Baraković

Vakuumska rješenja metrički afine gravitacije sa spektralnom analizom Diracovog operatora bez mase

DOKTORSKA DISERACIJA

Tuzla, 2016. godine

Sadržaj

Sažetak

U ovoj disertaciji se bavimo sa kvadratnom metrički afinom gravitacijom i Diracovim operatorom bez mase. Dajemo pregled poznatih rješenja kvadratne metrički afine gravitacije i prezentujemo novo ne Riemannovo rješenje ove teorije. Novo rješenje je prezentovano u formi generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom. Također, predlažemo i fizikalnu interpretaciju novih rješenja poredeći ih sa rješenjima Einstein-Weyl teorije.

Drugi predmet istraživanja ove disertacije jeste spektralna analiza Diracovog operatora bez mase na zatvorenoj 3-dimenzionalnoj mnogostrukosti. Diracov operator bez mase opisuje neutrino bez mase. Dajemo pregled dva primjera gdje spektar ovog operatora može biti izračunat eksplicitno i ispostavlja se da je spektar simetričan oko nule u ova dva primjera, iako u generalnom slučaju nema matematičkog ili fizikalnog razloga za to. Primjenjujući metode perturbacijske teorije na Diracovom operatoru bez mase uspiješno uočavamo spektralnu asimetriju na 3-torusu i izvodimo eksplicitne asimptotske formule za perturbovane svojstvene vrijednosti ± 1.

Summary

In this thesis we deal with quadratic metric-affine gravity and the massless Dirac operator. We review known solutions for quadratic metric-affine gravity and we present new non-Riemannian solution for this theory. The new solution is presented in the form of generalised pp-waves with purely axial torsion. We also propose a physical interpretation of these new solutions by comparing them to solutions of the Einstein-Weyl theory.

Another aim of this thesis is the spectral analysis of the massless Dirac operator on a closed 3-dimensional manifold. The massless Dirac operator describes a massless neutrino. We review two examples where the spectrum of this operator can be evaluated explicitly and it turns out that in these two particular examples the spectrum is symmetric about zero, although there is no mathematical or physical reason for it to be symmetric in the general case. Applying perturbation theory methods to the massless Dirac operator, we successfully observe spectral asymmetry on the 3-torus and derive explicit asymptotic formulae for perturbations of the eigenvalues ± 1.

Poglavlje 1

Uvod

Početke razvoja teorije gravitacije nalazimo još u antičkoj Grčkoj. Tada je kretanje tijela u slobodnom padu posmatrano sa čisto filozofske strane i prošlo je mnogo vremena prije nego se postavio bilo kakav matematički model. Aristotel je predstavio filozofski argument da teža tijela moraju padati brže nego lakša i stoljećima niko nije sumnjao u ovaj argument.

Sumnje u istinitost Aristotelove teorije tokom renesanse postavio je italijanski naučnik Galileo Galilei. Galileo je prvi počeo analizu i eksperimentalnu potvrdu zakona kretanja i te rezultate predstavio u svojim djelima *Dialogo* [37] 1632. godine i *Discorsi* [38] 1638 godine. Iz tih posmatranja Galileo je zaključio da se tijela pod uticajem gravitacionog polja Zemlje kreću na isti način nezavisno od njihovih masa. Ovo je bilo u suprotnosti sa Aristotelovim argumentima.

Najveći doprinos poslije Galilea u istraživanju teorije gravitacije dao je engleski naučnik Isaac Newton. Između ostalog, Newton je zasnivao svoja posmatranja na Keplerovim zakonima kretanja planeta i rezultate je predstavio u svom poznatom radu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [66] 1687. godine. Osnovna premisa njegovog rada jeste da je geometrija trodimenzionalnog prostora euklidska a vrijeme je posmatrano kao odvojeni parametar potreban za opis kretanja. Newtonova teorija gravitacije je tvrdila da je masa tijela izvor gravitacije i da se dva tijela međusobno privlače silom koja je proporcionalna proizvodnu njihovih masa a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti. Ova teorija gravitacije je bila u skladu sa Galileovim principom ekvivalencije ali sam princip nije imao uticaja na konstrukciju Newtonove teorije.

Ipak, kao jedan od fundamentalnih zakona fizike, Newtonova teorija gravitacije je imala nedostatke u vidu vremenske invarijantnosti i zavisila je samo od prostorne udaljenosti. Prema Newtonovoj teoriji gravitacije, jačina gravitacionog polja između dva objekta je proporcionalna inercijalnim masama objekata. Inercijalna masa ima dvojaku ulogu: ona je mjera otpora objekta za promjenu brzine, ali sa druge strane ona igra ulogu gravitacionog naboja. Na isti način kako električni naboj određuje jačinu električne sile između dva naelektrisana tijela, u Newtonovoj teoriji inercijalna masa određuje jačinu gravitacione sile. Drugi problem je bio što je gravitaciona sila opisana kao trenutna sila privlačenja između dva objekta. Posljedično, ako neko pomakne jedan od ova dva objekta, drugi će u istom momentu 'shvatiti' promjenu u gravitacionoj sili bez obzira na njihovu međusobnu udaljenost. Treći problem je bila nedosljednost u predviđanjima Newtonove teorije i eksperimentalnih podataka u precesijama orbite Merkura.

1.1 Generalna relativnost i alternative

Newtonova teorija gravitacije je unaprijeđena od strane Alberta Einsteina sa njegovom *teorijom generalne relativnosti*, vidi [27]. Einstein je promijenio čitav koncept Newtonog razumijevanja prostora te prostor i vrijeme nisu više posmatrani odvojeno. Teorija generalne relativnosti je teorija gravitacije koju je Einstein razvijao između 1907. i 1915. godine koristeći Riemannovu geometriju. Einsteinov kolega iz studentskih dana matematičar Marcel Grossmann kao i Hermann Minkowski pomogli su Einsteinu u formulaciji ove teorije. Novi koncept *prostorvremena* generalne relativnosti je potpuno opisan sa metrikom i metrika ne samo da određuje udaljenost, nego i paralelno pomjeranje, tojest Levi-Civita konekciju. Kao centralni dio svoje teorije, Einstein je predložio jednačine koja povezuje geometriju i materiju

$$\underbrace{Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu}}_{\text{geometrija}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{materija}},$$

pri čemu su $T_{\mu\nu}$ tenzor energije-impulsa koji ovisi o materiji, G je gravitaciona konstanta, c brzina svjetlosti, Ric Ricci krivina (1.18) a $\mathcal{R}$ skalarna krivina (1.19). Ove jednačine su direktna veza između geometrije prostorvremena i materije. Vakuumske Einsteinove jednačine su date sa

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = 0.$$

Generalna relativnost bi se mogla interpretirati kao: *prostorvrijeme govori materiji kako da se kreće a materija prostorvremenu kako da se zakrivi*, vidi [104]. Materija 'zakrivljuje' prostorvrijeme, pa pored promjena u prostornim koordinatama, nešto se dešava i sa vremenskom koordinatom prostorvremenskog kontinuma. Generalna relativnost predviđa da je vrijeme u blizini objekata sa većom masom više 'zakrivljeno', tojest vrijeme sporije teče u blizini objekata sa većom masom nego u blizini onih sa manjom masom. Generalna relativnost je potvrđena sa mnogo eksperimentalnih podataka, kao što su precesije periheliona Merkura, skretanje svjetlosti pri prolazu u blizini Sunca, gravitacioni crveni pomak, vrijeme odgode radarskih signala, rad GPS uređaja, itd. Generalna relativnost je predvidjela postojanje gravitacionih talasa koji su eksperimentalno potvrđeni 2016. godine od strane Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO). Također, generalna relativnost je predvidjela i postojanje crnih rupa kao objekata u prostorvremenskom kontinuumu čija je gravitacija toliko jaka da joj nijedan oblik materije ne može pobjeći, pa čak ni svjetlost koja se kreće najvećom brzinom u prirodi. Moderna kosmološka posmatranja podržavaju postojanje ovakvih objekata. Veoma dobar i detaljan pregled prostorvremena u generalnoj relativnosti uradili su Griffiths i Podolský [48].

Sam Einstein je očekivao mnogo više od svoje teorije. Nije bio u potpunosti zadovoljan jer nije uspio da spoji gravitaciono i elektromagnetno polje u jedan model, vidi [28]. U cilju povezivanja gravitacije i elektromagnetizma, Einstein je razmišljao o alternativnoj teoriji gravitacije poznatoj kao *teleparalelizam*, vidi [97]. Prostorvrijeme teleparalelizma se posmatra kao povezana četverodimenzionalna mnogostrukost snabdjevena sa Lorentzovom metrikom čija krivina nestaje ali torzija ne nestaje. Metrički tenzor je definisan preko komponenti kookvira. Za više rezultata u polju ove alternativne teorije gravitacije vidi [23, 34, 64, 69, 86, 95, 96, 102].

Gravitacija je jedina fizikalna interakcija koja nema konzistentnu kvantnu formulaciju. Mnogi pokušaji kvantizacije gravitacije su do sada bili bezuspješni. Postoje mnoge alternativne teorije gravitacije kao što su *metrički afina gravitacija, gauge simetrija, supergravitacija, Kaluza-Klein teorija* ili *teorija struna* koje nas možda vode ka jedinstvenoj kvantnoj teoriji fundamentalnih interakcija. Raniji uspjesi ovih ideja nas motivišu da ih detaljnije proučavamo i nadamo da će nas dovesti bliže formulaciji kvantne teorije gravitacije. Generalna relativnost je riješila mnoge nedostatke ranijih teorija ali još uvijek imamo mnoga otvorena pitanja koja nas vode do razvoja alternativnih teorija gravitacije. U ovoj disertaciji, mi proučavamo alternativnu teoriju gravitacije poznatu kao *metrički afina gravitacija*.

Metrički afina gravitacija (MAG) je alternativna teorija gravitacije koja je nadogradnja teorije generalne relativnosti. U metrički afinoj gravitaciji napuštamo Riemannovo prostorvrijeme Einsteinove generalne relativnosti i dodajemo *torziju* (1.12) što nas dalje vodi do Riemann-Cartanovog prostorvremena i moguće nemetričnosti (1.16).

U metrički afinoj gravitaciji, prostorvrijeme posmatramo kao povezanu realnu četverodimenzionalnu mnogostrukost snabdjevenu sa Lorentzovom metrikom i afinom konekcijom. Za razliku od generalne relativnosti, u metrički afinoj gravitaciji metrika i konekcija su dinamičke varijable. Prostorvrijeme metrički afine gravitacije se svodi na prostorvrijeme generalne relativnosti pod uslovom da je torzija jednaka nuli i da je konekcija metrički kompatibilna. Metrički afina gravitacija je direktno izvedena iz gauge teorije gravitacije gdje linearna konekcija igra ulogu gauge polja. Nepoznate veličine metrički afine gravitacije su 10 komponenti metričkog tenzora i 64 koeficijenta konekcije. Za dobar i razumljiv pregled ove teorije vidi [13, 50, 51, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 99, 100, 101].

U ovoj disertaciji smo primarno zainteresovani za proučavanje *kvadratne metrički afine gravitacije* (QMAG), vidi Sekciju 1.3. Matematički model ove teorije jeste da je Riemannova mnogostrukost opisana sa principom akcije, koja je funkcional definisan kao integral na četverodimenzionalnoj mnogostrukosti čija je podintegralna funkcija čisto kvadratna forma krivine. Metrika je Lorentzijanskog potpisa i nepoznate veličine su komponente metrike i konekcije. Koristeći varijacioni račun, određujemo stacionarne funkcije, tojest funkcije u kojima je promjena akcije jednaka nuli. Matematičkim jezikom rečeno, posmatramo akciju definisanu sa (1.1) pri čemu je lagranžijan kvadratna forma krivine. Nezavisnom varijacijom akcije (1.1) po metrici i konekciji proizvodimo sistem Euler-Lagrangeovih jednačina (1.2), (1.3). Naš cilj jeste analiza Riemannovih i ne-Riemannovih rješenja sistema (1.2), (1.3), vidi Definiciju 1.3.3.

Veliki broj radova je posvećen analizi Riemannovih i ne-Riemannovih rješenja Euler-Lagrangeovog sistema (1.2), (1.3) u slučaju kvadratnog lagranžijana, vidi [11, 30, 39, 50, 68, 70, 77, 82, 83, 87, 88, 89, 94, 99, 100, 101]. Veoma važan rezultat na ovom polju dao je Vassiliev [101], koji je riješio problem egzistencije i jedinstvenosti Riemannovih rješenja sistema (1.2), (1.3) u najopštijem slučaju kvadratne forme krivine sa 16 R^2 članova. Vassiliev je pokazao da postoje samo tri tipa Riemannovih rješenja sistema (1.2), (1.3), vidi Sekciju 4 i Sekciju 5 u [101], gdje je također prezentovao konstrukciju "torzijskih talasa" kao jednog ne-Riemannovog rješenja sistema (1.2), (1.3). Isto rješenje je nezavisno dobijeno od strane Singha i Griffithsa [89] i Kinga i Vassilieva [53] u Yang-Mills slučaju (1.7). Torzijski talasi prezentovani u [101] mogu se posmatrati kao ne-Riemannov analogon pp-prostora, vidi Definiciju 2.1.1. Pašić i Vassiliev [77] su prezentovali generalizaciju klasičnih pp-talasa na prostorvremena sa torzijom i konstruisali novu klasu ne-Riemannovih rješenja u najopštijem slučaju kvadratne forme. Fizikalnu interpretaciju za tu klasu rješenja smo dali u [74], gdje je predloženo da generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički afini model za neutrino bez mase.

Motivisani rezultatom Singha [87] koji je prezentovao rješenje sistema

(1.2), (1.3) sa čisto aksijalnom torzijom (1.26) za Yang-Mills akciju (1.7), generaliziranjem klasičnih pp-talasa na metrički kompatibilno prostorvrijeme sa čisto aksijalnom torzijom, ranije smo konstruisali novo ne-Riemannovo rješenje prezentovano u radu [75] i dokazali da su nova vakuumska rješenja sistema (1.2), (1.3) za Yang-Millsovu akciju (1.7). U ovoj disertaciji, cilj nam je dokazati da su ova prostorvremena također novo rješenje sistema (1.2), (1.3) za opštiji slučaj kvadratne forme sa 11 R^2 članova (1.4). U budućnosti će nam biti cilj vidjeti da li su ova prostorvremena također rješenje sistema (1.2), (1.3) u slučaju najopštije kvadratne fome sa 16 R^2 članova (1.6). Također, u pogledu konstrukcije novih ne-Riemannovih rješenja kvadratne metrički afine gravitacije od posebnog interesa nam je rad Singha [88], gdje je prezentovano rješenje sistema (1.2), (1.3) za Yang-Millsovu akciju (1.7) sa čisto trag torzijom (1.25). Bilo bi interesantno vidjeti da li je moguće generalizirati klasične pp-talase na metrički kompatibilno prostorvrijeme sa čisto trag torzijom, na sličan način kao što je urađeno u radu [75] i vidjeti da li su rješenja sistema (1.2), (1.3). Veoma je bitno napomenuti činjenicu da Singh [87], [88] nije koristio najopštiju kvadratnu formu sa 16 R^2 članova i prezentovana rješenja se ne mogu dobiti sa ansatzom dvostruke dualnosti, vidi [62].

Analiza pp-talasa ima dugu historiju. PP-talasi u Yang-Millsovom tipu kvadratne metrički afine gravitacije sa netrivijalnom torzijom a sa nenultom nemetričnosti koji ne pripadaju trostrukoj ansatz klasi, vidi [50], su analizirani od strane Obukhova [68], za što je dobio motivaciju od njegovog ranijeg rada [67]. Kvadratna forma posmatrana od strane Obukhova je najopštija sa 16 R^2 članova. Prema Obukhovu, iako je Einsteinova generalna relativnost podržana eksperimentima na makroskopskom nivou, gravitacione interakcije na mikoroskopskom nivou nisu dobro shvaćene. Gauge modeli gravitacije predstavljaju alternativni opis gravitacije na mikro nivou. Proučavanje egzaktnih rješenja metrički afine gravitacije je nužno za razumijevanje razvoja fizikalnih aspekata kao što su kvatizacija, fizika hadrona, proučavanje ranog svemira, itd. Konstrukcija i poređenje talasnih rješenja u različitim modelima mogu objasniti fizikalni sadržaj i veze između mikro i makro gravitacionih teorija.

Interesantna analiza ravnotalasnih frontnih gravitacionih i elektromagnetnih talasa u metrički afinoj gravitaciji sa kosmološkom konstantom u trostrukoj ansatz klasi je urađena od strane Garcie i dr. [39]. Kako autori naglašavaju, za ograničene ireducibilne dijelove torzije i nemetričnosti, postoje sličnosti između Einstein-Maxwellovog sistema i vakuumskih jednačina polja metrički afine gravitacije. U istom radu, autori daju pregled pp-talasa i elektromagnetnih talasa u Einstein-Maxwellovoj teoriji i predstavljaju pp-talase i elektromagnetne talase kao rješenja metrički afine gravitacije sa kosmološkom konstantom u trostrukoj ansatz klasi. Ovi talasi su nosioci krivine, nemetričnosti, torzije i elektromagnetnog polja.

Gravitacioni talasi kao egzaktna rješenja kvadratne metrički afine gravitacije su također analizirani od strane Baykala [11]. Koristeći formalizam nultog kookvira, autor predstavlja novu familiju rješenja u vidu impulsivnih gravitacionih talasa u četiri dimenzije za određeni lagranžijan.

1.2 Gravitaciona polja i polja neutrina bez mase

Ne-Riemannova rješenja metrički afine gravitacije posmatrana u ovoj disertaciji i [72, 73, 74, 75, 76, 77] su predstavljena u vidu generaliziranih pp-talasa sa paralelnom Ricci krivinom. Kao što je naglašeno u [74], klasični pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom su Riemanovi predstavnici klase rješenja metrički afine gravitacije pod nazivom generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom. Torzija i krivina generisana torzijom generaliziranih pp-talasa se mogu posmatrati kao talasi koji putuju brzinom svjetlosti a klasični pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom su samo "gravitacioni otisak" formiran talasom nekog polja materije bez mase. Zbog toga je interesantna njihova usporedba sa rješenjima klasične Einstein-Weylove teorije koja opisuje interakcije između gravitacionih polja i polja neutrina bez mase.

Diracov operator bez mase opisuje neutrino bez mase u kompaktnom prostoru. U ovoj disertaciji se bavimo spektralnom analizom Diracovog operatora bez mase na trodimenzionalnoj mnogostrukosti. Napredan pregled teorije Diracovog operatora uopšteno se moze naći u [60]. Interesantna analiza Diracove jednačine na četverodimenzionalnoj mnogostrukosti bez granice je urađena u [33] gdje autori daju negeometrijsku reprezentaciju Diracove jednačine bez mase. Svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase predstavljaju energetske nivoe neutrina bez mase a mi smo zainteresovani za analizu spektra tog operatora, tojest skupa svih svojstvenih vrijednosti operatora. Prema našim saznanjima, prvo ekplicitno izračunavanje spektra Diracovog operatora bez mase urađeno je od strane Friedricha [35]. U istom radu je pokazana i zavisnost spektra operatora od izbora spin strukture. Spektar Diracovog operatora bez mase na sferi S^n je također ekplicitno izračunat, vidi naprimjer Trautman [93] i Bär [10]. Ispostavlja se da je u ova dva slučaja spektar operatora simetričan oko nule. Ipak, analiza Atiyaha i drugih [3, 4, 5, 6] pokazuje da za opštu orijentisanu Riemanovu trodimenzionalnu mnogostrukost nema fizikalnog opravdanja da spektar bude simetričan. To bi značilo da u ova dva slučaja nema razlike između osobina neutrina bez mase i antineutrina bez mase. Zbog toga je cilj našeg istraživanja da razbijemo spektralnu simetriju Diracovog operatora bez mase na 3-torusu i 3-sferi.

Veoma značajan rezultat u ovom polju postavili su Vassiliev i dr. [24] koji su uspjeli razbiti spektralnu simetriju Diracovog operatora bez mase na 3-torusu posmatrajući svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$. U istom radu autori se koriste perturbacijama Euklidske metrike i izvode asimptotsku formulu za svojstvenu vrijednost nula, tojest svojstvenu vrijednost Diracovog operatora bez mase koja je najmanja po modulu. Autori pokazuju da je moguće izabrati perturbaciju Euklidske metrike da bi se svojstvena vrijednost nula 'pomakla' i dobila spektralna asimetrija. U istom radu autori analiziraju eta invarijantu $\eta_H(0)$, vidi naprimjer [3, 4, 5, 6], samoadjungovanog eliptičnog $m \times m$ matričnog klasičnog pseudodiferencijalnog operatora prvog reda H kao mjeru spektralne asimetrije operatora. U slučaju konačnog broja svojstvenih vrijednosti eta invarijanta je razlika broja pozitivnih i broja negativnih svojstvenih vrijednosti. Također, za perturbovani Diracov operator bez mase izvedena je i granična formula za eta invarijantu.

Koristeći sličan pristup kao u [24], u ovoj disertaciji nas cilj jeste da izvedemo asimptotske formule za sljedeće dvije svojstvene vrijednosti posmatrajući 3-torus u takozvanom aksisimetričnom slučaju, vidi Sekciju 3.5, tojest za svojstvene vrijednosti $\lambda = \pm 1$.

U budućnosti će biti interesantno izvesti asimptotske formule za svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase na 3-sferi i vidjeti da li je i kada moguće dobiti spektralnu asimetriju.

1.3 Kvadratna metrički afina gravitacija

U kvadratnoj metrički afinoj gravitaciji prostorvrijeme posmatramo kao povezanu realnu četverodimenzionalnu mnogostrukost M snabdjevenu sa Loretzovom metrikom g i afinom konekcijom Γ. Nepoznate ove teorije su 10 nezavisnih komponenti simetričnog metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$ i 64 koeficijenta konekcije ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$. Akciju definišemo sa

$$S := \int q(R), \tag{1.1}$$

pri čemu je q $O(1,3)$ invarijantna kvadratna forma na krivini R (1.17). Primijetimo da koeficijenti ove kvadratne forme zavise samo o metrici. Nezavisnim varijacija akcije (1.1) po metrici g i konekciji Γ dobijamo sistem Euler-Lagrangeovih jednačina koje simbolički zapisujemo sa

$$\partial S / \partial g = 0, \tag{1.2}$$

$$\partial S / \partial \Gamma = 0. \tag{1.3}$$

Sistem (1.2), (1.3) je sistem od $10 + 64$ parcijalne diferencijalne jednačine sa $10 + 64$ nepoznatih komponenti metričkog tenzora i tenzora konekcije. Mi koristimo čisto kvadratne lagranžijane jer se nadamo da bismo time mogli opisati fenomene čija je karakteristična talasna dužina dovoljno mala a krivina dovoljno velika, vidi [101]. Početke razvoja ove teorije možemo naći u radovima Hermana Weyla [103]. On naglašava da većina prirodnih gravitacionih akcija treba da bude kvadratna po krivini i da uključuje sve moguće invarijantne kvadratne kombinacije krivine. Lagranžijani koji su kvadratni po krivini su posmatrani od strane mnogih autora, vidi naprimjer [9, 26, 52, 57, 58, 78, 90, 99, 100, 101].

Budući da krivina ima 11 ireducibilnih dijelova, vidi Sekciju 1.4.1, kvadratna forma $q(R)$ može biti predstavljena kao

$$q^{(11)}(R) := \sum_{i=1}^{11} c_i (R^{(i)}, R^{(i)})_{YM}, \tag{1.4}$$

pri čemu su c_i realne konstante i $(\cdot, \cdot)_{YM}$ je Yang-Millsov unutrašnji proizvod

$$(R, Q)_{\mathrm{YM}} := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} Q^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}. \tag{1.5}$$

Ovakva reprezentacija kvadratne forme sa 11 članova posmatrana je od strane Vassilieva [99]. Ipak, kako sam Vassiliev naglašava u [101], postoji šesnaest načina kvadriranja ireducibilnih dijelova krivine jer su neki ireducibilni dijelovi izomorfni. Poštujući taj argument, kvadratnu formu $q(R)$ možemo predstaviti kao

$$\begin{aligned} q^{(16)}(R) := {} & b_1 \mathcal{R}^2 + b_1^* \mathcal{R}_*^2 \\ & + \sum_{l,m=1}^{3} b_{6lm} (\mathcal{A}^{(l)}, \mathcal{A}^{(m)}) + \sum_{l,m=1}^{2} b_{9lm} (\mathcal{S}^{(l)}, \mathcal{S}^{(m)}) + \sum_{l,m=1}^{2} b_{9lm}^* (\mathcal{S}_*^{(l)}, \mathcal{S}_*^{(m)}) \\ & + b_{10} (R^{(10)}, R^{(10)})_{\mathrm{YM}} + b_{30} (R^{(30)}, R^{(30)})_{\mathrm{YM}}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

pri čemu su $b_1,\ b_1^*,\ b_{6lm} = b_{6ml},\ b_{9lm} = b_{9ml},\ b_{9lm}^* = b_{9ml}^*,\ b_{10},\ b_{30}$ neke realne konstante.

Kvadratna forma (1.6) ima 16 R^2 članova a skalari $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_*$, i tenzori $\mathcal{A}^{(l)}$, $\mathcal{S}^{(l)}$, $\mathcal{S}_*^{(l)}$, $R^{(10)}$ i $R^{(30)}$ su definisani u Sekciji 1.4.1. Unutrašnji proizvodi u kvadratnoj formi (1.6) su definisani sa (1.5) i

$$(R, Q) := R_{\mu\nu} Q^{\mu\nu}.$$

Primjedba 1.3.1. Akcija (1.1) je konformalno invarijantna, tojest ne mijenja se pri Weylovom reskaliranju metrike $g \to e^{2f} g,\ f : M \to \mathbb{R}$, bez promjene konekcije Γ.

Razvoj ove teorije počinje sa Yang-Millsovom teorijom. Yang-Millsova akcija za afinu konekciju je specijalan slučaj od (1.1) pri čemu je

$$q_{YM}(R) := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Za kvadratnu formu (1.7), takozvana Yang-Millsova jednačina (1.3) prvo je analizirana od strane Yanga [106]. On je specijalizirao jednačinu (1.3) za Levi-Civita konekciju i dobio jednačinu

$$\nabla_{\lambda} Ric_{\kappa\mu} - \nabla_{\kappa} Ric_{\lambda\mu} = 0, \tag{1.8}$$

gdje je Ric Ricci krivina (1.18).

Primjedba 1.3.2. Yang-Millsova akcija se također može dobiti iz (1.4) ako izaberemo $c_1 = \ldots = c_{11} = 1$.

U zavisnosti od tipa konekcije prostorvremena, posmatramo dva tipa rješenja sistema (1.2), (1.3), koje nazivamo *Rimemannova* i *ne-Riemannova* rješenja.

Definicija 1.3.3. Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo Riemannovim ako je konekcija Levi-Civita, tojest $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$, a u suprotnom ne-Riemannovim.

Primjedba 1.3.4. Kada tražimo Riemannova rješenja sistema (1.2), (1.3), mi i dalje variramo akciju (1.1) nezavisno po metrici i po konekciji i tek poslije toga koristimo činjenicu da je konekcija Levi-Civita.

Razlika modela sa kvadratnom formom (1.4) i modela sa kvadratnom formom (1.6) se može vidjeti ako se posmatra specijalizacija jednačine (1.3) sa Levi-Civita konekcijom. Za 11 parametarsku akciju jednačina (1.3) se svodi na jednačinu (1.8), dok za 16 parametarsku akciju (1.6) jednačina (1.3) se svodi na

$$\nabla Ric = 0. \tag{1.9}$$

Jednačine (1.8) i (1.9) se razlikuju i jednačina (1.9) je više restriktivna.

Važna klasa Riemannovih rješenja su takozvani *Einsteinovi prostori.*

Definicija 1.3.5. Einsteinov prostor je Riemannovo prostorvrijeme sa $Ric = \Lambda g$ pri čemu je Ric Ricci kivina (1.18), Λ je neka realna konstanta i g je mtrika prostora.

Analizirajući jednačinu (1.8), Yang je zaključio da Einsteinovi prostori zadovoljavaju jednačinu (1.8). Kasnije je od strane mnogih autora pokazano da Einsteinovi prostori zadovoljavaju sistem (1.2), (1.3) za kvadratnu formu (1.7), vidi naprimjer Yang [106] i Mielke [62]. Zbog toga mi za specijalan slučaj (1.7) teoriju sa jednačinama polja (1.2), (1.3) nazivamo *Yang-Mielkeova teorija gravitacije*. Veliki broj radova je posvećen proučavanju sistema (1.2), (1.3) u specijalnom slučaju (1.7) i historijski razvoj Yang-Mielkove teorije gravitacije se može naći u [31, 32, 71, 79, 90, 92, 91, 105].

Vassiliev [101] je riješio problem egzistencije i jedinstvenosti rješenja sistema (1.2), (1.3) u najopštijem slučaju kvadratne forme sa 16 R^2 članova. U istom radu je pokazano da su Einsteinovi prostori, pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom (vidi Sekciju 2.1) i Riemannova prostorvremena koja imaju skalarnu krivinu nula a lokalno su proizvod Einsteinovih mnogostrukosti, *jedina* Riemannova rješenja sistema (1.2), (1.3) za najopštiju kvadratnu formu (1.6). Stoga, sva nova rješenja koja očekujemo da pronađemo u ovom slučaju su ne-Riemannova.

Posebno smo zainteresovani za analizu klase prostorvremena pod nazivom *pseudoinstantoni*, koji su predstavljeni od strane Vassilieva [99].

Definicija 1.3.6. Prostorvrijeme $\{M, g, \Gamma\}$ nazivamo pseudoinstanton ako je konekcija metrički kompatibilna a krivina ireducibilna i jednostavna.

Metrička kompatibilnost znači da je $\nabla g = 0$, pri čemu ∇ označava kovarijantni izvod (1.15). Ireducibilnost znači da samo jedan od jedanaest ireducibilnih dijelova krivine nije nula a svi ostali su jednaki nuli. Jednostavnost znači da ireducibilni potprostor koji daje nenulti dio krivine nije izomorfan niti jednom drugom ireducibilnom potprostoru. Zbog toga postoje samo tri tipa pseudoinstantona:

- *skalarni pseudoinstanton*, gdje samo skalarna krivina nije identički jednaka nuli;
- *pseudoskalarni pseudoinstanton*, gdje samo pseudoskalarna krivina nije identički jednaka nuli;
- *Weylov pseudoinstanton*,gdje samo Weylova krivina nije identički jednaka nuli.

Pseudoinstantoni su bitna klasa prostorvremena jer predstavljaju rješenja jednačina polja (1.2), (1.3) za najopštiju kvadratnu formu (1.6), što je dokazao Vassiliev [99]. Za konstrukciju jednog ne-Riemannovog pseudoinstantona u prostoru Minkowskog vidi [101].

1.4 Notacija i predznanje

Notacija u ovoj disertaciji prati [53, 73, 74, 75, 76, 77, 99, 101]. Lokalne koordinate označavamo sa x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, i pišemo $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$. Kovarijantni izvod vektorskog polja definišemo kao

$$\nabla_\mu v^\lambda := \partial_\mu v^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} v^\nu, \quad \nabla_\mu v_\lambda := \partial_\mu v_\lambda - \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} v_\nu, \tag{1.10}$$

gdje su $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ koeficijenti konekcije. Christoffelovi simboli su definisani kao

$$\{\Gamma\}^\lambda{}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} := \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \tag{1.11}$$

Sa $\{\nabla\}$ označavamo kovarijantni izvod sa Levi-Civita konekcijom, tojest

$$\{\nabla\}_\mu v^\lambda := \partial_\mu v^\lambda + \{\Gamma\}^\lambda{}_{\mu\nu} v^\nu.$$

Torziju definišemo kao

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} := \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{1.12}$$

i kontorziju kao

$$K^\lambda{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \left(T^\lambda{}_{\mu\nu} + T_\mu{}^\lambda{}_\nu + T_\nu{}^\lambda{}_\mu \right). \tag{1.13}$$

Torziju možemo izraziti preko kontorzije kao

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = K^\lambda{}_{\mu\nu} - K^\lambda{}_{\nu\mu}.$$

Levi-Civita konekcija $\{\Gamma\}$ i puna konekcija Γ su povezane kao

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \{\Gamma\}^\lambda{}_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\mu\nu}. \tag{1.14}$$

Za konekciju Γ kažemo da je *metrički kompatibilna* ako je $\nabla g \equiv 0$, tojest

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\mu\kappa} = 0. \tag{1.15}$$

Nemetričnost Q definišemo kao

$$Q_{\mu\alpha\beta} := \nabla_\mu g_{\alpha\beta}. \tag{1.16}$$

Tenzor krivine je definisan pomoću afine konekcije kao

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\kappa{}_{\mu\eta} \Gamma^\eta{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\eta} \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}, \tag{1.17}$$

Ricci krivina kao

$$Ric_{\lambda\nu} := R^\kappa{}_{\lambda\kappa\nu}, \tag{1.18}$$

skalarna krivina kao

$$\mathcal{R} := Ric^\kappa{}_\kappa \tag{1.19}$$

i bez traga Ricci krivina kao

$$\mathcal{R}ic := Ric - \frac{1}{4}\mathcal{R}g.$$

Weylovu krivinu označavamo sa $\mathcal{W}$. Weylova krivina je ireducibilni dio krivine određen uslovima

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \\ \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= 0, \\ Ric &= 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Primjedba 1.4.1. Torzija i krivina mogu biti zapisane i u *anholonomičnoj* notaciji koja se razlikuje od holonomične notacije korištene u ovoj disertaciji. Torziju definišemo kao

$$T^\alpha := D\vartheta^\alpha = \frac{1}{2} T_{ij}{}^\alpha dx^i \wedge dx^j$$

a krivinu kao

$$R^{\alpha\beta} := d\Gamma^{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha{}_\gamma \wedge \Gamma^{\gamma\beta} = \frac{1}{2} R_{ij}{}^{\alpha\beta} dx^i \wedge dx^j,$$

pri čemu su ϑ^α ortonormalni okvir i $\Gamma_\alpha{}^\beta$ linearna konekcija. Za više o anholonomičnoj notaciji krivine i torzije vidi [13].

Indekse dižemo i spuštamo na standardni način, tojest $g_{\alpha\beta} v^\beta = v_\alpha$, $g^{\alpha\beta} v_\beta = v^\alpha$. Djelovanje Hodgeove zvjezdice na antisimetrični tenzor reda q definišemo kao

$$(*Q)_{\mu_{q+1}\ldots\mu_4} := (q!)^{-1} \sqrt{|\det g|}\, Q^{\mu_1\ldots\mu_q} \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_4}\,, \tag{1.21}$$

pri čemu je ε totalno antisimetrična veličina i $\varepsilon_{0123} := +1$. Kada Hodgeovu zvjezdicu primijenjujemo na krivinu moramo izabrati da li djelujemo na prvi ili drugi par indeksa, pa zbog toga uvodimo dva različita operatora: lijevu Hodgeovu zvjezdicu

$$({}^*R)_{\kappa\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2} \sqrt{|\det g|}\; \varepsilon^{\kappa'\lambda'}{}_{\kappa\lambda}\; R_{\kappa'\lambda'\mu\nu} \tag{1.22}$$

i desnu Hodgeovu zvjezdicu

$$(R^*)_{\kappa\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2} \sqrt{|\det g|}\; R_{\kappa\lambda\mu'\nu'}\; \varepsilon^{\mu'\nu'}{}_{\mu\nu}\,. \tag{1.23}$$

Za skalarnu funkciju $f : M \to R$ kraće pišemo

$$\int f := \int f \sqrt{|\mathrm{det}g|} \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3, \quad \mathrm{det}g := \det(g_{\mu\nu}).$$

1.4.1 Ireducibilni dijelovi torzije i krivine

U ovoj sekciji dajemo detalje o ireducibilnim dijelovima torzije i krivine gdje uglavnom pratimo izlaganje iz [72, 99, 101].

Ireducibilni dijelovi torzije

Pod Lorentzovom grupom, torzija T sa svoje 24 nezavisne komponente, može biti ireducibilno razložena na tri dijela. Prema [51, 99], ireducibilni dijelovi torzije su

$$T^{(1)} = T - T^{(2)} - T^{(3)}, \tag{1.24}$$

$$T^{(2)}{}_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\mu} v_\nu - g_{\lambda\nu} v_\mu, \tag{1.25}$$

$$T^{(3)} = *w, \tag{1.26}$$

gdje su

$$v_\nu = \frac{1}{3} T^\lambda{}_{\lambda\nu}, \quad w_\nu = \frac{1}{6}\sqrt{|\det g|} T^{\kappa\lambda\mu} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}. \tag{1.27}$$

Dijelovi $T^{(1)}, T^{(2)}$ i $T^{(3)}$ se nazivaju *tenzorska torzija* sa 16 nezavisnih komponenti, *trag torzija* sa 4 nezavisne komponetne i *aksijalna torzija* sa 4 nezavisne komponetne.

Djelovanje Hodgeove zvjezdice na torziju definišemo kao

$$(*T)_{\lambda\mu\nu} := \frac{1}{2}\sqrt{|\det g|} T_{\lambda\xi\eta} \varepsilon^{\xi\eta}{}_{\mu\nu}. \tag{1.28}$$

Hodgeova zvjezdica preslikava tenzorsku torziju u tenzorsku torziju, torziju bez traga u aksijalnu torziju i aksijalnu torziju u torziju bez traga:

$$\begin{aligned}(*T)^{(1)} &= *(T^{(1)}),\\ (*T)^{(2)}{}_{\lambda\mu\nu} &= g_{\lambda\mu} w_\nu - g_{\lambda\nu} w_\mu,\\ (*T)^{(3)} &= - * v.\end{aligned} \tag{1.29}$$

Ovakvo razlaganje torzije podrazumijava realnu torziju i Lorentzovu metriku.

Primjedba 1.4.2. Preslikavanje Hodgeovom zvjezdicom koje se pojavljuje na desnoj strani formula (1.26) i (1.29) je standardna Hodgeova zvjezdica (1.21) i razlikuje se od Hodgeove zvjezdice na torzijama (1.28).

Koristeći se formulama (1.12), (1.13) i (1.24)-(1.26), dobijamo ireducibilno razlaganje kontorzije

$$\begin{aligned}K^{(1)} &= K - K^{(2)} - K^{(3)},\\ K^{(2)}{}_{\lambda\mu\nu} &= g_{\lambda\mu} v_\nu - g_{\nu\mu} v_\lambda,\\ K^{(3)} &= \frac{1}{2} * w,\end{aligned}$$

pri čemu su

$$v_\nu = \frac{1}{3}K^\lambda{}_{\lambda\nu}, \quad w_\nu = \frac{1}{3}\sqrt{|\det g|}K^{\kappa\lambda\mu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}.$$

Ireducibilni dijelovi torzije i kontorziju su povezani kao[1]

$$T^{(1)}{}_{\kappa\lambda\mu} = K^{(1)}{}_{\lambda\kappa\mu},\ T^{(2)}{}_{\kappa\lambda\mu} = K^{(2)}{}_{\lambda\kappa\mu},\ T^{(3)}{}_{\kappa\lambda\mu} = 2K^{(3)}{}_{\kappa\lambda\mu}.$$

Ireducibilni dijelovi krivine - prva verzija

U ovoj sekciji prezentujemo jedno razlaganja tenzora krivine generisane opštom afinom konekcijom, gdje pratimo izlaganje iz [99]. Sa $\mathbf{R}$ označavamo 96-dimenzionalni vektorski prostor realnih 4-tenzora $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$. Krivina generisana sa opštom afinom konekcijom ima samo jednu antisimetriju koja zadovoljava uslov

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} = -R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu}. \tag{1.30}$$

Neka je g Lorentzova metrika u svakoj tački $x \in M$ i neka je $O(1,3)$ odgovarajuća Lorentzova grupa. Vektorski prostor $\mathbf{R}$ se razlaže u direktnu sumu jedanaest potprostora koji su invarijantni i ireducibilni pod akcijom $O(1,3)$, vidi [51]. Prema Vassilievu [99], imamo ortogonalnu dekompoziciju $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ \oplus \mathbf{R}^-$ gdje je

$$\mathbf{R}^\pm = \{R \in \mathbf{R} | R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \pm R_{\lambda\kappa\mu\nu}\}$$

i $\dim \mathbf{R}^+ = 60$ i $\dim \mathbf{R}^- = 36$. Potprostori $\mathbf{R}^+$ i $\mathbf{R}^-$ se dalje razlažu na pet i šest ireducibilnih potprstora, respektivno. Vektorski prostor $\mathbf{R}^-$ je vektorski prostor krivina generisanih sa sa metrički kompatibilnim konekcijama i mogu se zapisati kao $\mathbf{R}^- = \bigoplus_{a,b=\pm} \mathbf{R}^-_{ab}$ gdje su

$$\mathbf{R}^-_{ab} = \{R \in \mathbf{R}^- | R^T = aR,\ {}^*R^* = bR\},$$

i pri čemu je preslikavanje $R \to R^T$ definisano sa $(R^T)_{\kappa\lambda\mu\nu} := R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ endomorfizam u $\mathbf{R}^-$. Preslikavanje $R \to R^T$ se naziva *transpozicija* i takozvano double duality preslikavanje $R \to {}^*R^*$ je definisano sa

$${}^*R^* := ({}^*R)^* = {}^*(R^*),$$

pri čemu su $R \to {}^*R$ i $R \to R^*$ lijeva Hodgeova zvjezdica (1.22) i desna Hodgeova zvjezdica (1.23), respektivno.

[1]Primijetiti poredak indeksa.

Primjedba 1.4.3. Potprostori $\mathbf{R}^-_{++}$, $\mathbf{R}^-_{+-}$, $\mathbf{R}^-_{-+}$ i $\mathbf{R}^-_{--}$ su međusobno ortogonalni i njihove dimezije su $\dim \mathbf{R}^-_{++} = \dim \mathbf{R}^-_{-+} = 9$, $\dim \mathbf{R}^-_{+-} = 12$ i $\dim \mathbf{R}^-_{--} = 6$. Potprostori $\mathbf{R}^-_{++}$, $\mathbf{R}^-_{-+}$, $\mathbf{R}^-_{--}$ su ireducibilni i jedini potprostor koji se dalje razlaže je $\mathbf{R}^-_{+-}$ kao

$$\mathbf{R}^-_{+-} = \mathbf{R}_{\text{scalar}} \oplus \mathbf{R}_{\text{Weyl}} \oplus \mathbf{R}_{\text{pseudoscalar}}.$$

Potprostore $\mathbf{R}^-_{++}$, $\mathbf{R}_{\text{scalar}}$, $\mathbf{R}_{\text{Weyl}}$, $\mathbf{R}_{\text{pseudoscalar}}$, $\mathbf{R}^-_{-+}$, $\mathbf{R}^-_{--}$ označavamo sa $\mathbf{R}^{(j)}$, $j = 1, \dots, 6$, respektivno.

Opisano razlaganje pretpostavlja realnu krivinu i Lorentzovu metriku. Eksplicitne formule za šest dijelova krivine generisane sa metrički kompatibilnim konekcijama su

$$R^{(1)} = \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu}\overline{\mathcal{R}ic}_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}\overline{\mathcal{R}ic}_{\kappa\nu} - g_{\kappa\nu}\overline{\mathcal{R}ic}_{\lambda\mu} + g_{\lambda\nu}\overline{\mathcal{R}ic}_{\kappa\mu}), \tag{1.31}$$

$$R^{(2)} = \frac{1}{12}(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu})\mathcal{R}, \tag{1.32}$$

$$R^{(3)} = \bar{R} - R^{(1)} - R^{(2)} - R^{(4)}, \tag{1.33}$$

$$R^{(4)} = -\frac{1}{24}\sqrt{|\det g|}\; \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\breve{\mathcal{R}}, \tag{1.34}$$

$$R^{(5)} = \hat{R} - R^{(6)}, \tag{1.35}$$

$$R^{(6)} = \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu}\widehat{Ric}_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}\widehat{Ric}_{\kappa\nu} - g_{\kappa\nu}\widehat{Ric}_{\lambda\mu} + g_{\lambda\nu}\widehat{Ric}_{\kappa\mu}, \tag{1.36}$$

gdje su

$$\bar{R}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}(R_{\kappa\lambda\mu\nu} - R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\mu\nu\kappa\lambda} - R_{\nu\mu\kappa\lambda}),$$

$$\widehat{R}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}(R_{\kappa\lambda\mu\nu} - R_{\lambda\kappa\mu\nu} - R_{\mu\nu\kappa\lambda} + R_{\nu\mu\kappa\lambda}),$$

$$\overline{Ric}_{\lambda\nu} = \bar{R}^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu}, \quad \mathcal{R} = \overline{Ric}^{\lambda}{}_{\lambda} = R^{\kappa\lambda}{}_{\kappa\lambda}, \quad \overline{\mathcal{R}ic}_{\lambda\nu} = \overline{Ric}_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}g_{\lambda\nu}\mathcal{R},$$

$$\widehat{Ric} = \widehat{R}^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu}, \quad \breve{\mathcal{R}} = \sqrt{|\det g|}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\bar{R}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \sqrt{|\det g|}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}R_{\kappa\lambda\mu\nu}.$$

Primijetimo da u Riemannovom slučaju krivina ima samo tri ireducibilna dijela $R^{(1)}, R^{(2)}$ i $R^{(3)}$.

Ireducibilni dijelovi krivine - druga verzija

Vektorski prostor $\mathbf{R}$ se može razložiti i na drugačiji način, prateći izlaganje iz [72, 101]. Potprostori vektorskog prostora $\mathbf{R}$ su:

- dva potprostora dimenzije 1 koje označavamo sa $\mathbf{R}^{(1)}$ and $\mathbf{R}^{(1)}_*$,

- tri potprostora dimenzije 6 koje označavamo sa $\mathbf{R}^{(6,l)}$, $(l = 1, 2, 3)$,
- četiri potprostora dimenzije 9 koje označavamo sa $\mathbf{R}^{(9,l)}$ and $\mathbf{R}_*^{(9,l)}$, $(l = 1, 2)$,
- jedan potprostor dimenzije 10 kojeg označavamo sa $\mathbf{R}^{(10)}$, and
- jedan potprostor dimenzije 30 kojeg označavamo sa $\mathbf{R}^{(30)}$.

Za dva potprostora kažemo da su izomorfna ako postoji linearna bijekcija između njih koja komutira sa akcijom $O(1, 3)$. Postoje tri grupe izomorfnih potprostora a to su

$$\{\mathbf{R}^{(6,l)}, l = 1, 2, 3\}, \quad \{\mathbf{R}^{(9,l)}, l = 1, 2\}, \quad \{\mathbf{R}_*^{(9,l)}, l = 1, 2\}.$$

Ekplicitne formule za ireducibilne potprostore dimenzije manje od 10 su:

(a) u potprostoru $\mathbf{R}^{(1)}$ ekplicitna formula za krivinu je

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_1(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})\mathcal{R}, \tag{1.37}$$

(b) u potprostoru $\mathbf{R}_*^{(1)}$ eksplicitna formula za krivinu je

$$(R^*)_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_1^*(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu})\mathcal{R}_*, \tag{1.38}$$

(c) u potprostorima $\mathbf{R}^{(6,l)}$, $(l = 1, 2, 3)$ ekplicitna formula za krivinu je

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = {} & a_{6l1}(g_{\kappa\mu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\lambda\mu}) + a_{6l2}(g_{\lambda\mu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\kappa\mu}) \\ & + a_{6l3}g_{\kappa\lambda}\mathcal{A}^{(l)}{}_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.39}$$

(d) u potprostorima $\mathbf{R}^{(9,l)}$, $(l = 1, 2)$ ekplicitna formula za krivinu je

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_{9l1}(g_{\kappa\mu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\lambda\mu}) + a_{9l2}(g_{\lambda\mu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{S}^{(l)}{}_{\kappa\mu}), \tag{1.40}$$

(e) u potprostorima $\mathbf{R}_*^{(9,l)}$, $(l = 1, 2)$ ekplicitna formula za krivinu je

$$(R^*)_{\kappa\lambda\mu\nu} = a_{9l1}^*(g_{\kappa\mu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\lambda\mu}) + a_{9l2}^*(g_{\lambda\mu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\kappa\mu}), \tag{1.41}$$

gdje su $a_1 = a_1^* = 1/12$ i

$$(a_{6lm}) = \begin{pmatrix} 5/12 & -1/12 & -1/6 \\ -1/12 & 5/12 & -1/6 \\ -1/12 & -1/12 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad (a_{9lm}) = (a_{9lm}^*) = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Skalari $\mathcal{R}, \mathcal{R}_*$ i tenzori $\mathcal{A}^{(l)}, \mathcal{S}^{(l)}, \mathcal{S}_*^{(l)}$ koji se pojavljuju u formulama (1.37)-(1.41) su izraženi preko tenzora krivine R preko sljedećih formula:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} := R^{\kappa\lambda}{}_{\kappa\lambda}, \\
&Ric^{(1)}{}_{\mu\nu} := R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}, && Ric^{(2)}{}_{\mu\nu} := R_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu}, \\
&\mathcal{R}ic^{(1)} := Ric^{(1)} - \frac{1}{4}\mathcal{R}g, && \mathcal{R}ic^{(2)} := Ric^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{R}g, \\
&\mathcal{S}^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\mu\nu} + \mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, && \mathcal{A}^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\mu\nu} - \mathcal{R}ic^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, \quad (l = 1, 2) \\
&\mathcal{A}^{(3)}{}_{\mu\nu} := R^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu},
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_* := (R^*)^{\kappa\lambda}{}_{\kappa\lambda}, \\
&Ric_*^{(1)}{}_{\mu\nu} := (R^*)^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}, && Ric_*^{(2)}{}_{\mu\nu} := (R^*)_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu}, \\
&\mathcal{R}ic_*^{(1)} := Ric_*^{(1)} - \frac{1}{4}\mathcal{R}_* g, && \mathcal{R}ic_*^{(2)} := Ric_*^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{R}_* g, \\
&\mathcal{S}_*^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic_*^{(l)}{}_{\mu\nu} + \mathcal{R}ic_*^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, && \mathcal{A}_*^{(l)}{}_{\mu\nu} := \frac{\mathcal{R}ic_*^{(l)}{}_{\mu\nu} - \mathcal{R}ic_*^{(l)}{}_{\nu\mu}}{2}, \quad (l = 1, 2) \\
&\mathcal{A}_*^{(3)}{}_{\mu\nu} := (R^*)^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Primjedba 1.4.4. Primijetimo da su tenzor $Ric^{(1)}{}_{\mu\nu}$ i Ricci tenzor (1.18) ekvivalentni.

Primjedba 1.4.5. Tenzori $\mathcal{A}_*^{(l)}$ se ne pojavljuju u formulama (1.37)-(1.41). Razlog je taj što tenzori $\mathcal{A}^{(l)}$ i $\mathcal{A}_*^{(l)}$ nisu nezavisni i tenzori $\mathcal{A}^{(l)}$ su linearne kombinacije Hodgeovih duala tenzora $\mathcal{A}_*^{(l)}$ i obrnuto, vidi [101]. Zato možemo pisati

$$\mathcal{A}_*^{(1)} = \alpha_1 \ *\mathcal{A}^{(1)} + \alpha_2 \ *\mathcal{A}^{(2)}, \tag{1.42}$$

$$\mathcal{A}_*^{(2)} = \beta_1 \ *\mathcal{A}^{(1)} + \beta_2 \ *\mathcal{A}^{(2)}, \tag{1.43}$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ proizvoljni realni skalari.

Potprostor $\mathbf{R}^{(10)}$ je potprostor krivina R takav da su svi mogući tragovi jednaki nula, tojest

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} = (R^*)^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\nu} = 0, \quad R_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu} = (R^*)_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\kappa\nu} = 0, \quad R^{\kappa}{}_{\kappa\mu\nu} = 0 \tag{1.44}$$

i $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$. Potprostor $\mathbf{R}^{(30)}$ je potprostor krivina R takav da zadovoljava relacije (1.44) i $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}$. Koristeći opisane potprostore, prostor $\mathbf{R}$ ima sljedeće razlaganje:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(1)} \oplus \mathbf{R}_*^{(1)} \oplus_{i=1}^{3} \mathbf{R}^{(6,l)} \oplus_{i=1}^{2} \mathbf{R}^{(9,l)} \oplus_{i=1}^{2} \mathbf{R}_*^{(9,l)} \oplus \mathbf{R}^{(10)} \oplus \mathbf{R}^{(30)}$$

a to znači da proizvoljni element $R \in \mathbf{R}$ jedinstveno može biti zapisan kao

$$R = R^{(1)} + R_*^{(1)} + \sum_{l=1}^{3} R^{(6,l)} + \sum_{l=1}^{2} R^{(9,l)} + \sum_{l=1}^{2} R_*^{(9,l)} + R^{(10)} + R^{(30)},$$

koristeći formule (1.37)-(1.41).

Primjedba 1.4.6. Potprostore $\mathbf{R}^{(1)}$, $\mathbf{R}_*^{(1)}$, $\mathbf{R}^{(10)}$, $\mathbf{R}^{(30)}$ nazivamo jednostavnim jer nisu izomorfni nijednom drugom potprostoru. U skladu sa tim, i ireducibilne dijelove $R^{(1)}$, $R_*^{(1)}$, $R^{(10)}$, $R^{(30)}$ nazivamo jednostavnim.

1.4.2 O Levi-Civita tenzoru

Veoma često korišten tenzor u linearnoj algebri, tenzorskoj analizi i diferencijalnoj geometriji je takozvani *Levi-Civita tenzor.*

Definicija 1.4.7. Levi-Civita tenzor je definisan kao

$$\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} := \sqrt{|\det g|}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}, \tag{1.45}$$

gdje je $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ totalno antisimetrična veličina i $\varepsilon_{0123} = +1$.

Primjedba 1.4.8. U ovoj disertaciji uglavnom koristimu metriku Minkowskog $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$ i pp-metriku (2.1), čije su determinante jednake 1, pa u ta dva slučaja Levi-Civita tenzor (1.45) je totalno antisimetrična veličina $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$.

Lema 1.4.9. *Kovarijantni izvod Levi-Civita tenzora jednak je nuli, tojest*

$$\nabla_\xi \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0. \tag{1.46}$$

Dokaz. Budući da je tenzor $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ po definiciji totalno antisimetričan, dovoljno je izračunati $\nabla_\xi \epsilon_{0123}$. Koristeći definiciju kovarijantnog izvoda (1.10), imamo

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi \epsilon_{0123} &= \partial_\xi \epsilon_{0123} - \Gamma^\eta{}_{\xi 0}\epsilon_{\eta 123} - \Gamma^\eta{}_{\xi 1}\epsilon_{0\eta 23} - \Gamma^\eta{}_{\xi 2}\epsilon_{01\eta 3} - \Gamma^\eta{}_{\xi 3}\epsilon_{012\eta} \\
&= \partial_\xi \epsilon_{0123} - \Gamma^0{}_{\xi 0}\epsilon_{0123} - \Gamma^1{}_{\xi 1}\epsilon_{0123} - \Gamma^2{}_{\xi 2}\epsilon_{0123} - \Gamma^3{}_{\xi 3}\epsilon_{0123} \\
&= \partial_\xi \epsilon_{0123} - \sqrt{|\det g|}\Gamma^\eta{}_{\xi\eta}.
\end{aligned}$$

Parcijalni izvod je

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \epsilon_{0123} &= \partial_\xi(\sqrt{|\det g|})\varepsilon_{0123} + \sqrt{|\det g|}\partial_\xi(\varepsilon_{0123}) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\partial_\xi|\det g| = \sqrt{|\det g|}\{\Gamma\}^\eta{}_{\xi\eta}
\end{aligned}$$

jer je $\{\Gamma\}^{\eta}{}_{\xi\eta} = \dfrac{\partial_\xi |\det g|}{2|\det g|}$. Dakle, koristeći formulu, dobijamo (1.14),

$$\nabla_\xi \epsilon_{0123} = \sqrt{|\det g|}\{\Gamma\}^{\eta}{}_{\xi\eta} - \sqrt{|\det g|}\Gamma^{\eta}{}_{\xi\eta} = -\sqrt{|\det g|}K^{\eta}{}_{\xi\eta}.$$

Tenzor kontorzije K je antisimetričan po prvom i trećem indeksu i budući da imamo kontrakciju po ova dva indeksa, on je jednak nuli, odakle dobijamo (1.46). □

Primjedba 1.4.10. Direktna izračunavanja pokazuju da antisimetrična veličina $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ zadovoljava sljedeće identitete:

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = -4!, \tag{1.47}$$

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon^{\eta\lambda\mu\nu} = -3!\ \delta_\kappa{}^\eta, \tag{1.48}$$

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon^{\eta\xi\mu\nu} = -2!\ (\delta_\kappa{}^\eta\delta_\lambda{}^\xi - \delta_\kappa{}^\xi\delta_\lambda{}^\eta), \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon^{\eta\xi\zeta\nu} = &-(\delta_\kappa{}^\eta\delta_\lambda{}^\xi\delta_\mu{}^\zeta + \delta_\kappa{}^\xi\delta_\lambda{}^\zeta\delta_\mu{}^\eta + \delta_\kappa{}^\zeta\delta_\lambda{}^\eta\delta_\mu{}^\xi \\ &- \delta_\kappa{}^\eta\delta_\lambda{}^\zeta\delta_\mu{}^\xi - \delta_\kappa{}^\xi\delta_\lambda{}^\eta\delta_\mu{}^\zeta - \delta_\kappa{}^\zeta\delta_\lambda{}^\xi\delta_\mu{}^\eta).\end{aligned} \tag{1.50}$$

Levi-Civita tenzor se također pojavljuje u eksplicitnoj formuli (B.3) za dio krivine $R^{(5)}$. Veza između Levi-Civita tenzora (1.45) i Weylove krivine je veoma interesantna. Poznato je da je proizvod Levi-Civita tenzora i Weylove krivine sa četiri kontrakcije jednak nuli, vidi (1.20). Interesantno je vidjeti šta se dešava u nekim drugim slučajevima pri kontrakciji Levi-Civita tenzora i Weylovog tenzora.

Lema 1.4.11. *Levi-Civita tenzor i Weylov tenzor su povezani na sljedeći način:*

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\eta\xi} = 2\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\eta\lambda\xi}, \tag{1.51}$$

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\xi} = 0. \tag{1.52}$$

Dokaz. Koristeći poznati Bianchijev identitet za Weylovu krivinu

$$\mathcal{W}_{\kappa\lambda\eta\xi} + \mathcal{W}_{\kappa\eta\xi\lambda} + \mathcal{W}_{\kappa\xi\lambda\eta} = 0,$$

dobijamo

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}(\mathcal{W}_{\kappa\lambda\eta\xi} + \mathcal{W}_{\kappa\eta\xi\lambda} + \mathcal{W}_{\kappa\xi\lambda\eta}) = 0.$$

Preimenovanjem nekih indeksa, koristeći antisimetriju veličine $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ i koristeći dobro poznate osobine Weylovog tenzora, dobijamo

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\eta\xi} = -\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\eta\xi\lambda} - \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\xi\lambda\eta} = 2\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\eta\lambda\xi},$$

što nam daje (1.51).

Kontrakcijom indeksa μ i η u (1.51) i koristeći osobine antisimetrije Weylovog tenzora dobijamo $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\xi} = 0$, što je upravo (1.52). □

1.4.3 Spinorski formalizam

U ovoj sekciji prezentujemo spinorski formalizam korišten u ovoj disertaciji te koristimo formalizam uveden u [72, 74, 77].

Definicija 1.4.12. 'Metrički spinor' je definisan kao

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon^{ab} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.53}$$

gdje prvi indeks označava broj vrste a drugi indeks broj kolone.

Spinorske indekse dižemo i spuštamo koristeći formule

$$\xi^a = \epsilon^{ab}\xi_b, \qquad \xi_a = \epsilon_{ab}\xi^b, \qquad \eta^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\eta_{\dot{b}}, \qquad \eta_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\eta^{\dot{b}}. \tag{1.54}$$

U ovom izboru spinora 'kontravarijantni' i 'kovarijantni' metrički spinori su podignuta i spuštena verzija jedni drugih, tojest $\epsilon^{ab} = \epsilon^{ac}\epsilon_{cd}\epsilon^{bd}$ i $\epsilon_{ab} = \epsilon_{ac}\epsilon^{cd}\epsilon_{bd}$. Također, spinorski unutrašnji proizvod je invarijantan pod operacijom dizanja i spuštanja indeksa, tojest $(\epsilon_{ac}\xi^c)(\epsilon^{ad}\eta_d) = \xi^a\eta_a$. Ali uzastopno podizanje i spuštanje jednog spinorskog indeksa dovodi do promjene znaka, tojest $\epsilon_{ab}\epsilon^{bc}\xi_c = -\xi_a$.

Definicija 1.4.13. Neka je $\mathfrak{v}$ realni vektorski prostor Hermitskih 2×2 matrica $\sigma_{a\dot{b}}$. Paulijeve matrice ${\sigma^\alpha}_{a\dot{b}}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, su baza u prostoru $\mathfrak{v}$ koje zadovoljavaju ${\sigma^\alpha}_{a\dot{b}}\sigma^{\beta c\dot{b}} + {\sigma^\beta}_{a\dot{b}}\sigma^{\alpha c\dot{b}} = 2g^{\alpha\beta}{\delta_a}^c$ pri čemu je

$$\sigma^{\alpha a\dot{b}} := \epsilon^{ac}{\sigma^\alpha}_{c\dot{d}}\epsilon^{\dot{b}\dot{d}}. \tag{1.55}$$

Primjedba 1.4.14. U svakoj tački mnogostrukosti M Paulijeve matrice su definisane jedinstveno do Lorentzove transformacije.

Definicija 1.4.15. Paulijeve matrice drugog reda su

$$\sigma_{\alpha\beta ac} := \frac{1}{2}\big(\sigma_{\alpha a\dot{b}}\epsilon^{\dot{b}\dot{d}}\sigma_{\beta c\dot{d}} - \sigma_{\beta a\dot{b}}\epsilon^{\dot{b}\dot{d}}\sigma_{\alpha c\dot{d}}\big), \tag{1.56}$$

pri čemu je ϵ metrički spinor (1.53).

Ove matrice su polarizovane, tojest

$$*\sigma = \pm\mathrm{i}\,\sigma, \tag{1.57}$$

i zavise od orijentacije Paulijevih matrica ${\sigma^\alpha}_{a\dot{b}}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Definicija 1.4.16. Kovarijantni izvod spinorskog polja definišemo kao

$$\nabla_\mu \xi^a = \partial_\mu \xi^a + \Gamma^a{}_{\mu b}\xi^b, \qquad \nabla_\mu \xi_a = \partial_\mu \xi_a - \Gamma^b{}_{\mu a}\xi_b,$$

$$\nabla_\mu \eta^{\dot a} = \partial_\mu \eta^{\dot a} + \bar\Gamma^{\dot a}{}_{\mu \dot b}\eta^{\dot b}, \qquad \nabla_\mu \eta_{\dot a} = \partial_\mu \eta_{\dot a} - \bar\Gamma^{\dot b}{}_{\mu \dot a}\eta_{\dot b},$$

gdje je $\bar\Gamma^{\dot a}{}_{\mu\dot b} = \overline{\Gamma^a{}_{\mu b}}$.

Eksplicitne formule za spinorske koeficijente $\Gamma^a{}_{\mu b}$ se mogu izvesti iz sljedeća dva uslova:

$$\nabla_\mu \epsilon^{ab} = 0, \quad \nabla_\mu j^\alpha = \sigma^\alpha{}_{a\dot b}\nabla_\mu \zeta^{a\dot b}, \tag{1.58}$$

gdje je ζ proizvoljni miješano 2-spinorsko polje i $j^\alpha := \sigma^\alpha{}_{a\dot b}\zeta^{a\dot b}$ odgovarajuće vektorsko polje. Uslovi (1.58) daju sistem linearnih algebarskih jednačina po $\operatorname{Re}\Gamma^a{}_{\mu b}$, $\operatorname{Im}\Gamma^a{}_{\mu b}$ čije je jedinstveno rješenje dato sa

$$\Gamma^a{}_{\mu b} = \frac{1}{4}\sigma_\alpha{}^{a\dot c}\left(\partial_\mu \sigma^\alpha{}_{b\dot c} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\sigma^\beta{}_{b\dot c}\right). \tag{1.59}$$

1.5 Predstavljanje Diracovog operatora bez mase

Diracov operator bez mase opisuje neutrino bez mase u kompaktnom prostoru i njegove svojstvene vrijednosti fizikalno se mogu interpretirati kao energetski nivoi te čestice bez mase. Koristeći Diracov operator bez mase, vidi Sekciju 3.2, Diracova jednačina bez mase se može dobiti variranjem akcije (3.12) po spinoru ξ. Kao što smo pokazali u Sekciji 2.4, spinorsko polje koje određuje kompleksificiranu krivinu aksijalnih torzijskih talasa predstavljenih u Sekciji 2.2.2 je egzaktno rješenje Diracove jednačine bez mase, vidi Lemu 2.4.2. Istu situaciju smo imali i u slučaju čisto tenzorskih torzijskih talasa predstavljenih u Sekciji 2.2.1. Time imamo jednu vezu između generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom i polja neutrina bez mase.

Primjedba 1.5.1. U ovoj disertaciji, kada posmatramo rješenja Diracove jednačine bez mase, radimo u standardnim gravitacionim postavkama četvero–dimenzionalnog prostora za razliku od trodimenzionalnog prostora kada radimo spektralnu analizu Diracovog operatora bez mase.

Neka je M trodimenzionalna povezana kompaktna orijentisana mnogostrukost snabdjevena sa Riemannovom metrikom g. Diracov operator bez mase, vidi Definiciju 3.2.1, je matrični operator

$$W = -i\sigma^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta\left(\frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{{\beta \atop \alpha\gamma}\right\}\sigma^\gamma\right)\right).$$

Prema našim saznanjima, svojstvene vrijednosti Diracovog operatora su eksplicitno izračunate u slučaju jediničnog torusa $\mathbb{T}^3$ snabdjeven sa Euclidovom metrikom i jedinične sfere $\mathbb{S}^3$ snabdjevene sa standardnom metrikom koja je restrikcija Euclidske metrike sa $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{S}^3$. Ispostavlja se da je u ova dva slučaja spektar Diracovog operatora bez mase simetričan. S druge strane, prema [3, 4, 5, 6], za opštu orijentisanu Riemannovu trodimenzionalnu mnogustrukost (M, g) nema fizikalnog razloga da spektar Diracovog operatora bez mase bude simetričan. Spektralna simetrija bi značila da u ova dva primjera neutrino bez mase i antineutrino bez mase imaju iste osobine. Zbog toga smo zainteresovani u detaljniju spektralnu analizu Diracovog operatora bez mase i kreiranje spektralne asimetrije.

Primarno posmatramo jedinični torus $\mathbb{T}^3$ snabdjeven sa Euclidskom metrikom. U tom slučaju, spektar Diracovog operatora bez mase je ovakav: nula je svojstvena vrijednost mnogostrukosti dva i za svaki $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ svojstvene vrijednosti su $\pm\|m\|$. Naš cilj jeste da razbijemo ovu spektralnu simetriju koristeći perturbacije Euclidske metrike, vidi Sekciju 3.4 i da izvedemo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti $\lambda = \pm 1$ po stepenima malog perturbacijskog parametra ϵ. Za svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$ Diracovog operatora bez mase asimptotska formula je dobijena u [24]. U istom radu autori određuju uslove pod kojim je moguće dobiti spektralnu asimetriju u tom slučaju. Također, autori daju dva eksplicitna primjera perturbacija Euclidske metrike za koje svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase na polugustinama (3.20) mogu biti eksplicitno izračunate. Jedan primjer je kvadratne zavisnosti a drugi kvartične zavisnosti o parametru ϵ.

Slično pristupu u [24], u ovoj disertaciji izvodimo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti ± 1 u aksisimetričnom slučaju, vidi Primjedbu 3.5.2. Pokazujemo da spektralnu simetriju nije moguće razbiti na linearnom članu, vidi Primjedbu 3.5.9 i određujemo perturbacije Euclidske metrike za koje je moguće dobiti spektralnu asimetriju, vidi Primjedbu 3.5.11.

Naš cilj u bliskoj budućnosti jeste da kreiramo spektralnu asimetriju u slučaju jedinične sfere $\mathbb{S}^3$ snabdjevene sa standardnom metrikom koja je restrikcija Euclidske metrike sa $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{S}^3$.

1.6 Glavni rezultati disertacije

U ovoj sekciji kratko prezentujemo glavne rezultate ove disertacije. U cilju konstrukcije novog ne-Riemannovog rješenja kvadratne metrički afine gravitacije, posmatramo generalizacije klasičnih pp-talasa na metrički kompatibilna prostorvremena čija konekcija nije Levi-Civita. Cijelo Poglavlje 2 je posvećeno generaliziranjima pp-talasa dodavanjem torzije. Naša nova generalizacija pp-talasa je predstavljena u Sekciji 2.2.2, gdje prezentujemo prostorvrijeme čija je torzija čisto aksijalna i gdje navodimo njegove osnovne osobine. Koristimo poseban izbor lokalnih koordinata gdje pp-metrika može biti zapisana kao

$$ds^2 = 2\,dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x^1, x^2, x^3)\,(dx^3)^2$$

u lokalnim koordinatama (x^0, x^1, x^2, x^3). Zatim definišemo generalizirani pp-talas sa čisto aksijalnom torzijom kao metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i torzijom

$$T := *A,$$

pri čemu je A realno vektorsko polje definisano sa $A = k(\varphi)\,l$, gdje je $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ proizvoljna realna funkcija i l je paralelni vektor svjetlosnog tipa $l^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Torzija definisana na takav način je čisto aksijalna, vidi Lemu 2.2.9, te u našim lokalnim koordinatama može biti zapisana kao

$$T_{\kappa\mu\nu} = k(x^3) l^\alpha \varepsilon_{\alpha\kappa\mu\nu}.$$

Eksplicitna formula za krivinu u našim lokalnim koordinatama je

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}(l \wedge \partial)_{\alpha\beta}\,(l \wedge \partial)_{\gamma\delta} f + \sum_{i,j=1}^{2} r_{ij} (l \wedge m_i)_{\alpha\beta} (l \wedge m_j)_{\gamma\delta},$$

gdje su $r_{11} = r_{22} = \frac{1}{4}(k(x^3))^2$, $r_{12} = -r_{21} = \pm\frac{1}{2}k'(x^3)$, $m^\mu = (0, 1, \mp\mathrm{i}, 0)$, $m_1 = \mathrm{Re}(m)$ i $m_2 = \mathrm{Im}(m)$.

Jedan od glavnih rezultata ove disertacije je sljedeća

Teorema 1.6.1. *Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom su rješenja sistema* (1.2), (1.3) *u slučaju* (1.7).

Da bi dokazali da generalizirani pp-talasi jesu rješenja sistema (1.2), (1.3) u slučaju (1.7), prvo eksplicitno zapisujemo ove jednačine u formi (2.47) i (2.48), koje su već dobro poznate, vidi naprimjer [53]. Zatim, koristeći (2.8), specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5), kao i formule za krivinu (2.40), (2.41), torziju (2.35) i krivinu generisanu torzijom (2.43) direktnim uvrštavanjem dokazujemo da su jednačine (2.47) i (2.48) zadovoljene.

Drugi glavni rezultat je sljedeća

Teorema 1.6.2. *Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom su rješenja sistema* (1.2), (1.3) *u slučaju* (1.4).

Da bi dokazali Teoremu 1.6.2, jednačine polja (1.2), (1.3) zapisujemo eksplicitno pod određenim pretpostavkama, vidi Sekciju 2.3.1. Zatim dokazujemo da su jednačine polja zadovoljene direktnom zamjenom eksplicitnih formula za ireducibilne dijelove torzije i krivine generaliziranih pp-talasa, vidi Sekciju 2.3.4.

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom Ricci krivinom imaju svoju fizikalnu interpretaciju, kao što je pokazano u Sekciji 2.4. Spinorsko polje ξ, koje potpuno određuje kompleksificiranu krivinu generaliziranih pp-talasa, zadovoljava Diracovu jednačinu bez mase. Aksijalna torzija je ireducibilni dio torzije koji se obično koristi za modelovanje neutrina bez mase, vidi [20], ili elektrona, vidi [16], putem Cosserat elastičnosti. U Sekciji 2.4 poredimo generalizirane pp-talase sa čisto aksijalnom torzijom kao nova vakuumska rješenja kvadratne metrički afine gravitacije sa rješenjima Einstein-Weylove teorije. Zaključujemo da su generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom veoma slični rješenju pp-tipa Einstein-Weylovog modela i predlažemo da generalizirani pp-talasi za čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički afini model za neutrino bez mase.

Dalje, u Poglavlju 3, zainteresovani smo za više matematički pristup i analizu Diracovog operatora bez mase na trodimenzionalnoj mnogostrukosti. Kao što smo naglasili u Sekciji 1.5, fizikalno interpretirano, Diracov operator bez mase opisuje neutrino bez mase. Posmatramo jedinični torus $\mathbb{T}^3$ snabdjeven sa Euclidskom metrikom gdje je spektar izračunat eksplicitno. Ispostavlja se da je u tom slučaju spektar simetričan oko nule. Naša zabrinutost oko spektralne simetrije leži u tome da za opštu orijentisanu Riemannovu trodimenzionalnu mnogostrukost (M, g) nema fizikalnog razloga da spektar Diracovog operatora bez mase bude simetričan. Zato je naš cilj da kreiramo spektralnu asimetriju. Za kreiranje spektralne asimetrije možemo izabrati jedan od dva načina: da posmatramo trodimenzionalne mnogostrukosti za ravnom metrikom ali netrivijalnom topologijom kao u [81] ili trivijalnom topologijom sa perturbovanom metrikom kao u [24]. Mi smo se odlučili za drugi način.

Naš treći glavni rezultat je sljedeća

Teorema 1.6.3. *Pod određenim perturbacijama Euclidske metrike, možemo dobiti spektralnu asimetriju Diracovog operatora bez mase (u aksisimetričnom slučaju) na jediničnom* 3*-torusu.*

U dokazivanju Teoreme 1.6.3, posmatramo perturbacije Euclidske metrike

$$g_{\alpha\beta}(x;\epsilon) = \delta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}(x) + \frac{\epsilon^2}{4} k_{\alpha\beta}(x) + O(\epsilon^3),$$

pri čemu je ϵ mali pozitivni parametar. Koristeći perturbacijsku teoriju za Diracov operator bez mase, vidi Sekciju 3.4, eksplicitno izvodimo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti $\lambda = \pm 1$ Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.57). Asimptotske formule preko elemenata perturbacijskih matrica $h_{\alpha\beta}$ i $k_{\alpha\beta}$ su date u Teoremi 3.5.7. Analizirajući ove asimptotske formule, vidimo da je pod određenim perturbacijama Euclidske metrike moguće dobiti spektralnu asimetriju Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju, vidi Primjedbu 3.5.9 i Primjedbu 3.5.11.

1.7 Struktura disertacije

Ova disertacija ima sljedeću strukturu:

- U Poglavlju 2 se bavimo sa novim rješenjima kvadratne metrički afine gravitacije i ovo poglavlje je podijeljeno u nekoliko sekcija. U Sekciji 2.1 prezentujemo klasične pp-talase i navodimo njihove osnovne osobine. U Sekciji 2.2 se bavimo sa generalizacijama klasičnih pp-talasa proširujući klasične pp-talase na metrički kompatiblna prostorvremena sa torzijom. Predstavljamo generalizirane pp-talse sa čisto tenzorskom torzijom i generalizirane pp-talase sa čisto aksijalnom torzijom te navodimo njihove osnovne osobine. U Sekciji 2.3 koristimo generalizirane pp-talase sa čisto aksijalnom torzijom opisane u Sekciji 2.2 kako bi prezentovali novo rješenje kvadratne metrički afine gravitacije. U Sekciji 2.4 opisujemo matematičko i fizikalno značenje novih rješenja. Poredimo nova rješenja kvadratne metrički afine gravitacije sa rješenjima pp-tipa Einstein-Weylove teorije koja opisuje interakcije između gravitacionih polja i polja neutrina bez mase.

- U Poglavlju 3 se bavimo sa spektralnom analizom Diracovog operatora bez mase na trodimenzionalnoj mnogostrukosti. U Sekciji 3.1 dajemo pregled opštih osobina eliptičnog samoadjungovanog diferencijalnog operatora prvog reda. U Sekciji 3.2 prezentujemo Diracov operator bez mase sa njegovim osnovnim osobinama. U Sekciji 3.3 se bavimo sa spektrom Diracovog operatora bez mase sa posebnim osvrtom na proučavanje spektralne funkcije i funkcije brojanja Diracovog operatora bez mase. U Sekciji 3.4 razvijamo perturbacijsku teoriju za Diracov operator bez mase korištenu u ovoj disertaciji. U Sekciji 3.5 se bavimo sa spektralnom asimetrijom Diracovog operatora bez mase što je i glavni predmet izučavanja u Poglavlju 3. U ovoj sekciji prezentujemo naše nove rezultate dobijene u vezi spektralne asimetrije Diracovog operatora bez mase.

- U dodacima dajemo pomoćne matematičke činjenice i izračunavanja koja su korištena za dobijanje razultata ove disertacije. U Dodataku A detaljno izvodimo Einsteinove jednačine i Yang-Millsove jednačine. U Dodatku B dajemo izvođenje Bianchijevog identiteta za krivinu koji je korišten za dobijanje eksplicitnog oblika jednačina polja datih u Sekciji 2.3. U Dodatku C dajemo eksplicitne varijacije po metrici određenih kvdratnih formi krivine koji se korištene za dobijanje eksplicitnog oblika jednačina polja. Konačno, Dodatak D sadrži detaljan račun za koeficijente u asimptotskoj ekspanziji svojstvenih vrijednosti ± 1 Diracovog operatora bez mase.

Poglavlje 2

Nova rješenja kvadratne metrički afine gravitacije

2.1 Klasični pp-talasi

PP-talasi su veoma bitna familija egzaktnih rješenja Einsteinovih jednačina polja i veoma poznata prostorvremena u generalnoj relativnosti. Brinkmann [14] ih je predstavio još 1923. godine , a poslije toga ponovo su otkriveni od strane nekoliko autora. Peres [80] je interpretitrao metrike pp-talasa kao metrike koje predstavljaju gravitacione talase. Kao što naglašava Baykal [12], metrike pp-talasa mogu se posmatrati kao opis dalekog polja izolovanog astrofizičkog izvora zračenja gravitacionih talasa. Griffiths [47] i Kramer i dr. [55] su dali objašnjenje za skraćenicu 'pp' kao 'ravnotalasnih frontalnih gravitacionih talasa sa paralelnim zracima'. Nedavno je otkriveno od strane Vassilieva [101] da su pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom rješenja sistema (1.2), (1.3). Za više informacija o pp-talasima i rješenjima pp-tipa metrički afine gravitacije vidi [1, 8, 13, 14, 39, 47, 55, 67, 68, 73, 77, 80, 100, 101]. U ovom poglavlju klasični pp-talasi su korišteni za konstrukciju novih rješenja kvadratne metrički afine gravitacije te uglavnom pratimo izlaganje iz [74, 75].

Definicija 2.1.1. *PP-talas* je Riemannovo prostorvrijeme čija metrika može lokalno biti zapisana kao

$$ds^2 = 2\,dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x^1, x^2, x^3)\,(dx^3)^2 \tag{2.1}$$

u nekim lokalnim koordinatama (x^0, x^1, x^2, x^3).

Prednost Definicije 2.1.1 je da daje eksplicitnu formulu za metriku pp-talasa ali nedostatak je to što je vezana za određeni koordinatni sistem. Također, postoji i definicija pp-talasa koja se ne veže za koordinatni sistem.

Definicija 2.1.2. *PP-talas* je Riemannovo prosotrvrijeme koje daje nenestajuće paralelno polje spinora.

Primjedba 2.1.3. Termin *paralelno* znači da je kovarijantni izvod polja spinora jednak nuli, vidi Definiciju 1.4.16.

Poznato je, vidi [2, 15], da su Definicija 2.1.1 i Definicija 2.1.2 ekvivalentne. Nenestajuće polje spinora koje se pojavljuje u Definiciji 2.1.2 pp-talasa ćemo označavati sa

$$\chi = \chi^a, \tag{2.2}$$

i pretpostaviti ćemo da je ovo polje spinora *fiksno*. Definišimo vektor l kao

$$l^\alpha := \sigma^\alpha{}_{a\dot{b}}\, \chi^a \bar{\chi}^{\dot{b}} \tag{2.3}$$

pri čemu su σ^α Paulijeve matrice, vidi Definiciju 1.4.13 i Sekciju 1.4.3. Jasno, l je nenestajuće paralelno realno nulto vektorsko polje. Koristeći vektor l možemo definisati realnu skalarnu funkciju

$$\varphi : M \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int l \ \cdot dx\,. \tag{2.4}$$

Ova funkcija se naziva *faza*.

Definicija 2.1.4. Za kompleksno vektorsko polje v kažemo da je transverzalno ako je $l_\alpha v^\alpha = 0$.

Definicija 2.1.5. Za kompleksno vektorsko polje v kažemo da je ravni talas ako je $v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta = 0$ za proizvoljno transverzalno vektorsko polje v.

Primjedba 2.1.6. Očigledno, l je transverzalni i ravni talas.

Izbor lokalnih koordinata u kojima pp-metrika ima oblik (2.1) nije jedinstven. Naš izbor lokalnih koordinata je takav u kojima su

$$\chi^a = (1, 0), \qquad l^\mu = (1, 0, 0, 0), \qquad m^\mu = (0, 1, \mp \mathrm{i}, 0). \tag{2.5}$$

Sa izborom (2.5), faza (2.4) je eksplicitno data sa $\varphi(x) = x^3 + \text{const}$. Koristeći Paulijeve matrice drugog reda (1.56) i polje spinora (2.2) možemo definisati kompleksnu 2-formu

$$F_{\alpha\beta} := \sigma_{\alpha\beta ab}\, \chi^a \chi^b. \tag{2.6}$$

Također, (2.6) možemo zapisati kao vanjski proizvod

$$F = l \wedge m, \tag{2.7}$$

pri čemu je m kompleksno vektorsko polje koje zadovoljava

$$m_\alpha m^\alpha = l_\alpha m^\alpha = l_\alpha \overline{m}^\alpha = 0,\ m_\alpha \bar{m}^\alpha = -2. \tag{2.8}$$

Ako označimo sa $m_1 = \mathrm{Re}(m)$ i $m_2 = \mathrm{Im}(m)$, tada iz (2.8) imamo sljedeće relacije

$$l_\alpha l^\alpha = m_{1\alpha} {m_2}^\alpha = l_\alpha {m_1}^\alpha = l_\alpha {m_2}^\alpha = 0,\ m_{1\alpha} {m_1}^\alpha = m_{2\alpha} {m_2}^\alpha = -1. \tag{2.9}$$

Primjedba 2.1.7. Očigledno, F je nenestajuća paralelna kompleksna 2-forma. Primijenjujući Hodgeovu zvjezdicu (1.21) u (2.7) dobijamo $*F = \pm \mathrm{i} F$. Također $\det F = 0$ za izbor (2.5).

Za metriku (2.1), dobijamo ekplicitnu formulu za krivinu klasičnih pp-talasa

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}(l \wedge \partial)_{\alpha\beta}\,(l \wedge \partial)_{\gamma\delta} f, \tag{2.10}$$

pri čemu je $(l \wedge \partial)_{\alpha\beta} := l_\alpha \partial_\beta - \partial_\alpha l_\beta$. Krivina R je linearna po f. Formula (2.10) može biti zapisana u invarijantnoj formi

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \nabla) \otimes (l \wedge \nabla) f, \tag{2.11}$$

pri čemu je $l \wedge \nabla := l \otimes \nabla - \nabla \otimes l$. Krivina pp-talasa ima samo dva ireducibilna dijela, vidi Sekciju 1.4.1, a to su (simetrična) Ricci krivina bez traga i Weylova krivina. Ricci krivina (1.18) je proporcionalna $l \otimes l$ dok je Weylova krivina linearna kombinacija $\mathrm{Re}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge m))$ i $\mathrm{Im}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge m))$. U specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5), Ricci krivinu i Weylovu krivinu možemo izraziti kao

$$Ric_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22})\, l_\mu l_\nu, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{j,k=1}^{2} w_{jk} (l \wedge m_j) \otimes (l \wedge m_k), \tag{2.13}$$

pri čemu je $f_{\alpha\beta} := \partial_\alpha \partial_\beta f$ i w_{jk} su realni skalari dati sa

$$w_{11} = \frac{1}{4}(-f_{11} + f_{22}),\ w_{12} = \pm\frac{1}{2} f_{12},\ w_{22} = -w_{11},\ w_{21} = w_{12}.$$

Cotton tenzor, vidi [40], klasičnih pp-talasa je dat sa

$$C_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda Ric_{\mu\nu} - \nabla_\mu Ric_{\lambda\nu}. \tag{2.14}$$

U teoriji konformalnih prostora među glavnim objektima izučavanja su Weylov tenzor i Cotton tenzor, vidi [40]. Poznato je da u konformalno ravnim prostorima Weylov tenzor nestaje i posljedično Cotton tenzor također nestaje. Cotton tenzor je konformalo invarijantan samo u tri dimenzije.

Primijetimo da ako je Ricci krivina paralelna tada Cotton tenzor (2.14) nestaje.

2.1.1 Paulijeve matrice za pp-talase

Paulije matrice za pp-metriku (2.1.1) biramo kao

$$\sigma^0{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -f \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma^2{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & \mp\mathrm{i} \\ \pm\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3{}_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Dva izbora Paulijevih matrica razlikuju se po orijentaciji. Kada se radi o klasičnim pp-talasima izbor orijentacije Paulijevih matrica nije bitan, ali za generalizirane pp-talase, zbog pojednostavljenja u računu, zgodno je izabrati orijentaciju Paulijevih matrica da bude usklađena sa znakom u (2.19).

Primjedba 2.1.8. U slučaju $f = 0$, matrice (2.15) ne postaju standardne Paulijeve matrice u prostoru Minkowskog, budući da metriku zapisujemo u obliku (2.1). To je stvar praktičnosti u izračunavanjima.

Paulijeve matrice drugog reda $\sigma^{\alpha\beta}{}_{ab}$ (1.56) za pp-metriku (2.1) su također antisimetrične po tenzorskim indeksima te zbog toga dajemo samo nezavisne nenulte komponente. Eksplicitne formule za Paulijeve matrice drugog reda za pp-metriku (2.1) su

$$\sigma^{01}{}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}, \quad \sigma^{02}{}_{ab} = \begin{pmatrix} \mp\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \pm\mathrm{i}f \end{pmatrix}, \quad \sigma^{03}{}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma^{12}{}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \mp\mathrm{i} \\ \mp\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{13}{}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{23}{}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm2\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

2.2 Generaliziranje pp-talasa

Kao što smo prethodno naglasili, klasični pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom su rješenja sistema (1.2), (1.3). Budući da su klasični pp-talasi Riemannovo prostorvrijeme sa torzijom nula, mi koristimo ova prostorvemena da bi konstruisali nova rješenja kvadatne metrički afine gravitacije sa torzijom. U ovoj sekciji predstavljamo generalizacije klasičnih pp-talasa na prostorvremena čija konekcija nije nužno Levi-Civita, ali na veoma određeni način: mi i dalje koristimo pp-metriku (2.1) i uvodimo eksplicitno datu torziju. Predstavljamo dva tipa takvih prostorvremena: *generalizirane pp-talase sa čisto tenzorskom torzijom* i *generalizirane pp-talase sa čisto aksijalnom torzijom*. Prvi su ranije predstavljeni i analizirani u [72, 74, 77], dok su drugi predstavljeni i u određenoj mjeri analizirani u [75].

2.2.1 Generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom

Ovakva generalizacija klasičnih pp-talasa urađena je od strane Pašića i Vassilieva [77]. U istom radu je pokazano da su generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom rješenja sistema (1.2), (1.3) u najopštijem slučaju kada kvadratna forma ima 16 R^2 članova (1.6). Fizikalna interpretacija tih novih rješenja je data od strane Pašića i Barakovića [74]. Ovdje dajemo pregled tih rezultata.

Definicija 2.2.1. *Generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom* je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom (2.1) i torzijom

$$T := \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A \otimes dA), \tag{2.17}$$

pri čemu je A vektorsko polje oblika

$$A = h(\varphi)\, m \,+\, k(\varphi)\, l, \tag{2.18}$$

koje je ravnotalasno rješenje polarizovane Mawellove jednačine

$$*dA = \pm \mathrm{i}\, dA. \tag{2.19}$$

Vektorska polja l i m koja se pojavljuju u (2.18) su definisana u Sekciji 2.1, $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ su proizvoljne funkcije i φ je faza (2.4).

Primjedba 2.2.2. Sa $\{\nabla\}$ označavamo kovarijantni izvod sa Levi-Civita konekcijom kojeg treba razlikovati od punog kovarijantnog izvoda ∇ koji sadrži torziju.

Ova prostorvremena imaju eksplicitne formule za krivinu i torziju. Ova osobina nije trivijalna činjenica. Krivina generaliziranih pp-talasa je

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f + \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left((h^2)''\,(l \wedge m) \otimes (l \wedge m)\right). \tag{2.20}$$

Primjedba 2.2.3. Krivina generisana Levi-Civita konekcijom i krivina generisana torzijom se jednostavno dodaju (uporediti formule (2.11) i (2.20)).

Torzija generaliziranih pp-talasa je

$$T = \mathrm{Re}\left((a\; l + b\; m) \otimes (l \wedge m)\right), \tag{2.21}$$

pri čemu su

$$a := \frac{1}{2}h'(\varphi)\; k(\varphi), \quad b := \frac{1}{2}h'(\varphi)\; h(\varphi). \tag{2.22}$$

Torzija može biti i eksplicitnije zapisati u obliku

$$T = \sum_{j,k=1}^{2} t_{jk}\, m_j \otimes (l \wedge m_k) + \sum_{j=1}^{2} t_j\, l \otimes (l \wedge m_j), \tag{2.23}$$

pri čemu su

$$t_{11} = -t_{22} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(b),\ t_{12} = t_{21} = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(b),\ t_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(a),\ t_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(a),$$

i pri čemu su a i b funkcije (2.22).

Primjedba 2.2.4. Torzija (2.17) generaliziranih pp-talasa je čisto tenzorska. Za dokaz vidi Lemu 2 u [74].

Spinorsko polje (2.2) predstavljeno u Sekciji 2.1 zadovoljava $\{\nabla\}\chi = 0$. Kao što je pokazano u [74], za generalizirane pp-talase sa čisto tenzorskom torzijom vrijedi $\nabla\chi = 0$. To znači da generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i pripadajući klasični pp-talas daju isto nenestajuće paralelno polje spinora. Također, generalizirani pp-talasi i pripadajući klasični pp-talasi daju isto nenestajuće paralelno realno nulto vektorsko polje l i istu nenestajuću paralelnu kompleksnu 2-formu (2.6), (2.7).

Osnovne osobine generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom su:

(a) Drugi izraz u eksplicitnoj formuli za krivinu (2.20) generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom je čisto Weylova krivina

(b) Generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom imaju iste ireducibilne dijelove krivine kao klasični pp-talasi, a to su Ricci krivina bez traga i Weylova krivina. Koristeći specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5), ovi dijelovi krivine se mogu izraziti kao

$$Ric_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22})\, l_\mu l_\nu, \tag{2.24}$$

$$\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \sum_{j,k=1}^{2} w_{jk}(l \wedge m_j) \otimes (l \wedge m_k), \tag{2.25}$$

pri čemu su w_{jk} realni skalari dati sa

$$w_{11} = \frac{1}{4}[-f_{11} + f_{22} + \mathrm{Re}((h^2)'')], \qquad w_{22} = -w_{11},$$
$$w_{12} = \pm\frac{1}{2}f_{12} - \frac{1}{4}\mathrm{Im}((h^2)''), \qquad w_{21} = w_{12}.$$

Formule (2.24) i (2.25) su veoma slične formulama (2.12) i (2.13). Jedina razlika je u koeficijentima w_{ij}.

(c) Ricci krivina (2.24) generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom je u potpunosti određena sa pp-metrikom (2.1).

(d) Krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom (2.20) ima uobičajene simetrije u Riemannovom slučaju, a to su

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \tag{2.26}$$

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0, \tag{2.27}$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \tag{2.28}$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}. \tag{2.29}$$

Naravno, (2.29) je tačno za bilo koju krivinu, dok je (2.28) posljedica metričke kompatibilnosti. Također, (2.28) slijedi iz (2.26) i (2.29).

(e) Drugi izraz vektorskog polja A (2.18) ne utiče na krivinu (2.20) te utiče samo na torziju (2.17).

(f) Ricci krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom (2.24) je paralelna ako i samo ako je

$$f_{11} + f_{22} = C, \tag{2.30}$$

pri čemu je C proizvoljna konstanta.

(g) Ricci krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom (2.24) je nula ako i samo ako je

$$f_{11} + f_{22} = 0 \tag{2.31}$$

a Weylova krivina je nula ako i samo ako je

$$f_{11} - f_{22} = \mathrm{Re}\left((h^2)''\right), \qquad f_{12} = \pm\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left((h^2)''\right). \tag{2.32}$$

Ovdje koristimo specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5).

(h) Krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom (2.20) je nula ako i samo ako su zadovoljena oba uslova (2.31) i (2.32).

2.2.2 Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom

U ovoj sekciji predstavljamo generalizaciju klasičnih pp-talasa na prostorvrijeme čija je torzija čisto aksijalna. Ovakva generalizacija klasičnih pp-talasa je uvedena od strane Pašića i Barakovića [75]. U istom radu je pokazano da su ova prostorvremena rješenja sistema (1.2), (1.3) za Yang-Millsovu akciju (1.7). U ovom poglavlju mi ćemo pokazati da su generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom rješenja sistema (1.2), (1.3) za kvadratnu formu sa 11 R^2 članova (1.4).

Definicija 2.2.5. Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i torzijom

$$T := *A \tag{2.33}$$

pri čemu je A realno vektorsko polje definisano sa $A = k(\varphi)\, l$, gdje je $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ proizvoljna realna funkcija faze (2.4) za vektor l (2.5).

Primjedba 2.2.6. U našim specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5), torziju (2.33) možemo zapisati kao

$$T_{\kappa\mu\nu} = k(x^3) l^\alpha \varepsilon_{\alpha\kappa\mu\nu}, \tag{2.34}$$

pri čemu je $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ totalno antisimetrična veličina i $\varepsilon_{0123} = +1$.

Primjedba 2.2.7. Realno vektorsko polje A je ravnotalasno rješenje polarizovane Mawellove jednačine $*dA = \pm \mathrm{i}\, dA$. Ovo ne iznenađuje jer u našim specijalnim lokalnim koordinata vektorsko polje A je gradijent skalarne funkcije.

Primjedba 2.2.8. Predloženo je da se aksijalna komponenta torzije može interpretirati kao Hodgeov dual elektromagnetnog vektorskog potencijala, vidi [53, 98].

Lema 2.2.9. *Torzija (2.33) generaliziranih pp-talasa je čisto aksijalna.*

Dokaz. U specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5), koristeći (1.27) i (2.34), imamo

$$w_\nu = \frac{1}{6}\sqrt{|\det g|} T^{\kappa\lambda\mu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{6} k(x^3) l_\alpha \varepsilon^{\alpha\kappa\lambda\mu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}.$$

Dalje, koristeći (1.48), dobijamo

$$\begin{aligned}(T^{(3)})_{\alpha\beta\gamma} = (*w)_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{6} k(x^3) l_\alpha \varepsilon^{\alpha\kappa\lambda\mu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu}{}^{\eta}\varepsilon_{\eta\alpha\beta\gamma} \\ &= -\frac{1}{6} k(x^3) l_\xi (-3!) g^{\xi\eta}\varepsilon_{\eta\alpha\beta\gamma} = k(x^3) l^\xi \varepsilon_{\xi\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

□

Lema 2.2.10. *Koristeći specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5), torziju možemo izraziti kao*

$$T = \mp\frac{\mathrm{i}}{2}k(x^3)\ l \wedge m \wedge \overline{m}, \tag{2.35}$$

pri čemu je znak $\mp$ *izabran tako da odgovara znaku u (2.5).*

Dokaz. Koristeći specijalne loalne koordinate (2.1), (2.5) dokazati ćemo da vrijedi

$$l_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = \mp\frac{\mathrm{i}}{2}(l \wedge m \wedge \overline{m})^{\alpha\beta\gamma}. \tag{2.36}$$

Po definiciji imamo

$$\begin{aligned}(l \wedge m \wedge \overline{m})^{\alpha\beta\gamma} &= l^\alpha m^\beta \overline{m}^\gamma + l^\beta m^\gamma \overline{m}^\alpha + l^\gamma m^\alpha \overline{m}^\beta \\ &\quad - l^\alpha m^\gamma \overline{m}^\beta - l^\beta m^\alpha \overline{m}^\gamma - l^\gamma m^\beta \overline{m}^\alpha.\end{aligned} \tag{2.37}$$

Koristeći specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5), zaključujemo da ako je bilo koji indeks α, β ili γ jednak 3, tada je vanjski proizvod (2.37) jednak nuli a veličina $l_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = l_3 \varepsilon^{3\alpha\beta\gamma}$ je također nula jer je ε totalno antisimetrično. Dakle, (2.36) vrijedi.

Neka su $\alpha, \beta, \gamma \neq 3$. Po definiciji, tenzori $(l \wedge m \wedge \overline{m})^{\alpha\beta\gamma}$ i $l_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$ su totalno antisimetrični, pa jedini nenulti izrazi u obje veličine se pojavljuju kada su α, β, γ permutacije od $0, 1, 2$. Zbog toga je dovoljno izračunati jedan nezavinsni nenulti izraz, tojest

$$(l \wedge m \wedge \overline{m})^{012} = l^0 m^1 \overline{m}^2 - l^0 m^2 \overline{m}^1 = \pm 2\mathrm{i}.$$

Sada imamo da je $\mp\frac{\mathrm{i}}{2}(l \wedge m \wedge \overline{m})^{012} = 1$ i $l_\mu \varepsilon^{\mu 012} = l_3 \varepsilon_{3012} = 1$. Ostali slučajevi se pokazuju analogno. Dakle, vrijedi (2.36). Kombinujući formule (2.34) i (2.36), dobijamo (2.35). □

Očigledno, iz jednačine (2.35) zaključujemo da kontorziju možemo izraziti kao

$$K = \mp\frac{\mathrm{i}}{4}k(x^3)\ l \wedge m \wedge \overline{m}. \tag{2.38}$$

Također, budući da je

$$l \wedge m \wedge \overline{m} = l \wedge (m_1 + im_2) \wedge (m_1 - im_2) = -2\mathrm{i}\,(l \wedge m_1 \wedge m_2),$$

pri čemu su $m_1 = \mathrm{Re}(m)$ i $m_2 = \mathrm{Im}(m)$, dobijamo ekvivalentnu formulu za torziju

$$T = \mp k(x^3)\ l \wedge m_1 \wedge m_2 \tag{2.39}$$

u specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5).

Primjedba 2.2.11. Naša torzija u potpunosti odgovara aksijalnoj torziji predstavljenoj od strane Singha [87, 88] stavljajući $m = -\frac{1}{2}k(x^3)$ u formulu (16) u [87] ili stavljajući $n = 0, m = -\frac{1}{2}k(x^3)$ u formulu (20) u [88].

Lema 2.2.12. *Konekcija generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom je metrički kompatibilna.*

Dokaz. Budući da je

$$\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2}T^{\kappa}{}_{\mu\nu},$$

dobijamo

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \{\nabla\}_\mu g_{\alpha\beta} - K^{\eta}{}_{\mu\alpha} g_{\eta\beta} - K^{\eta}{}_{\mu\beta} g_{\alpha\eta}$$

i $\{\nabla\}_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ jer su klasični pp-talasi metrički kompatibilni. Ipak, kako je naša torzija čisto aksijalna, dobijamo da je

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = -K_{\beta\mu\alpha} - K_{\alpha\mu\beta} = K_{\alpha\mu\beta} - K_{\alpha\mu\beta} = 0,$$

tojest imamo metričku kompatibilnost. □

Primjedba 2.2.13. Primijetimo da polje spinora (2.2) više nije paralelno kod generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom, kao što je bio slučaj kod generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom. Štaviše, koristeći lokalne koordinate (2.1), (2.5), kovarijantni izvod polja spinora je $\nabla\chi = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Izvanredna osobina ovih prostorvremena jeste da imamo eksplicitnu formulu za krivinu

$$\begin{aligned} R = & -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f + \frac{1}{4}(k(x^3))^2 \operatorname{Re}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})\right) \\ & \mp \frac{1}{2}k'(x^3) \operatorname{Im}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})\right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ovu formulu možemo ekvivalento zapisati kao

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}(l \wedge \partial)_{\alpha\beta}\,(l \wedge \partial)_{\gamma\delta} f + \sum_{i,j=1}^{2} r_{ij} (l \wedge m_i)_{\alpha\beta} (l \wedge m_j)_{\gamma\delta}, \tag{2.41}$$

pri čemu su $r_{11} = r_{22} = \dfrac{1}{4}(k(x^3))^2$, $r_{12} = -r_{21} = \pm\dfrac{1}{2}k'(x^3)$, i $m_1 = \operatorname{Re}(m)$, $m_2 = \operatorname{Im}(m)$. Nije trivijalna činjenica da krivina generisana torzijom, tojest

$$R_T{}^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu K^{\kappa}{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu K^{\kappa}{}_{\mu\lambda} + K^{\kappa}{}_{\mu\eta} K^{\eta}{}_{\nu\lambda} - K^{\kappa}{}_{\nu\eta} K^{\eta}{}_{\mu\lambda}, \tag{2.42}$$

koja je jednaka

$$
\begin{aligned}
R_T = &\frac{1}{4}(k(x^3))^2 \operatorname{Re}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})\right) \\
&\mp \frac{1}{2}k'(x^3) \operatorname{Im}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})\right)
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

i Riemannova krivina (2.11) se jednostavno dodaju proizvodeći formulu (2.40).

Primjedba 2.2.14. Primijetimo da gornja osobina krivine generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom je veoma slična osobini koju posjeduju generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom.

Znamo da Riemannov dio krivine ima dva ireducibilna dijela, a to su Ricci krivina bez traga i Weylova krivina. Ispostavlja se da torzija generiše Ricci krivinu i vrijedi

$$
Ric_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(f_{11} + f_{22} - (k(x^3))^2\right) l_\mu l_\nu \tag{2.44}
$$

i

$$
Ric_{*\mu\nu} = -k'(x^3) l_\mu l_\nu. \tag{2.45}
$$

Skalarna krivina je tada očigledno nula prema osobinama vektora l. Krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom (2.40) ima samo tri dijela a to su $R^{(1)}$ (1.31), $R^{(3)}$ (1.33) i $R^{(5)}$ (1.35). Ireducibilni dio $R^{(1)}$ dijelom proizilazi iz klasičnih pp-talasa a dijelom iz krivine generisane torzijom. Ireducibilni dio $R^{(3)}$ u potpunosti proizilazi iz klasičnih pp-talasa a ireducibilni dio $R^{(5)}$ iz krivine generisane torzijom (2.43). U specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5), eksplicitna formula za ireducibilni dio $R^{(1)}$ je

$$
\begin{aligned}
{R^{(1)}}_{\kappa\lambda\mu\nu} = &\frac{1}{4}\left(f_{11} + f_{22}\right)\left(g_{\kappa\mu} l_\lambda l_\nu - g_{\lambda\mu} l_\kappa l_\nu + g_{\lambda\nu} l_\kappa l_\mu - g_{\kappa\nu} l_\lambda l_\mu\right) \\
&+ \frac{1}{4}k^2 \operatorname{Re}\left((l \wedge m)_{\kappa\lambda} (l \wedge \overline{m})_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

a eksplicitna formula za Weylovu krivinu $R^{(3)}$ je ranije data formula (2.13). Eksplicitna formula za ireducibilni dio $R^{(5)}$ je

$$
{R^{(5)}}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \pm\frac{1}{2}\, k'(x^3)({\varepsilon^\eta}_{\kappa\mu\nu} l_\lambda l_\eta - {\varepsilon^\eta}_{\lambda\mu\nu} l_\kappa l_\eta). \tag{2.46}
$$

Za detaljno izvođenje formule (2.46) vidi Dodatak B.1.

Analiza formule (2.40) za krivinu generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom otkriva sljedeće osobine:

(a) Krivina generisana Levi-Civita konekcijom (2.11) i krivina generisana torzijom (2.43) se jednostavno dodaju i proizvode formulu (2.40).

(b) Krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom posjeduje osobine

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= 0, \\
R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \\
R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -R_{\kappa\lambda\nu\mu},
\end{aligned}$$

ali više nemamo simetriju $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ kao što je bio slučaj kod generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom.

(c) Za proizvoljnu aksijalnu torziju, Weylova krivina koja proizilazi od krivine generisane torzijom (2.43) je nula.

(d) Ricci krivina je paralelna ako je $f_{11} + f_{22} = (k(x^3))^2 + C$, u kojem slučaju je $Ric = \Lambda\ l \otimes l$, za neku konstantu Λ.

(e) Ricci krivina (2.44) je nula ako je Poissonova jednačina $f_{11} + f_{22} = (k(x^3))^2$ zadovoljena.

2.3 Nova rješenja kvadratne metrički afine gravitacije

U ovoj sekciji ćemo dokazati da su generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom prezentovani u Sekciji 2.2.2 rješenja sistema (1.2), (1.3) za Yang-Millsovu akciju (1.7) i u slučaju kvadratne forme (1.4) sa 11 R^2 članova.

Prvo ćemo dokazati da su generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom rješenja sistema (1.2), (1.3) za Yang-Millsovu akciju (1.7). Glavni rezultat je sljedeća

Teorema 2.3.1. *Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom* $\{Ric\}$ *krivinom su rješenja sistema* (1.2), (1.3) *u specijalnom slučaju* (1.7).

Primjedba 2.3.2. Sa $\{Ric\}$ označavamo Ricci krivinu generisanu samo Levi-Civita konekcijom. Uslov $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$ implicira $f_{11} + f_{22} = C$. Primijetimo da rezultat također vrijedi ako se pretpostavi i da je puna Ricci krivina Ric paralelna.

Primjedba 2.3.3. U specijalnom slučaju (1.7), jednačinu (1.3) nazivamo *Yang-Millsova jednačina za afinu konekciju*, tojest

$$\partial_\nu R^{\mu\nu} + [\Gamma_\nu, R^{\mu\nu}] = 0, \tag{2.47}$$

pri čemu je $[\Gamma_\nu, R^{\mu\nu}]^\kappa{}_\lambda = \Gamma^\kappa{}_{\nu\eta} R^\eta{}_\lambda{}^{\mu\nu} - \Gamma^\eta{}_{\nu\lambda} R^\kappa{}_\eta{}^{\mu\nu}$. Jednačinu (1.2) u specijalnom slučaju (1.7) nazivamo *komplementarna Yang-Millsova jednačina*, tojest

$$H - \frac{1}{4}(\mathrm{tr}\ H)g = 0, \tag{2.48}$$

pri čemu je $H = H_\nu{}^\rho := R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} R^\lambda{}_\kappa{}^{\mu\rho}$. Jednačinu (2.48) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$R^\kappa{}_{\lambda\nu}{}^\alpha R^\lambda{}_\kappa{}^{\nu\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} R^\lambda{}_\kappa{}^{\mu\nu} = 0.$$

Za detaljno izvođenje jednačina (2.47) i (2.48) vidi Dodatak A.2.

Dokaz *Teoreme 2.3.1.* Budući da znamo, vidi naprimjer [74, 77, 100, 74, 77, 100] da su klasični pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom rješenja sistema (1.2), (1.3) u speijalnom slučaju (1.7), dovoljno je dokazati rezultat za dio krivine generisan torzijom (2.43). U dokazivanju da generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom jesu rješenja jednačina (2.47) i (2.48), koristiti ćemo se jednakostima (2.8), specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5), kao i formulama za krivinu (2.40), (2.41), torziju (2.35) i krivinu generisanu torzijom (2.43). Da bi dokazali da je jednačina (2.47) zadovoljena, dovoljno je dokazati

$$\partial_\nu R_T{}^{\mu\nu} + [K_\nu, R_T{}^{\mu\nu}] = 0,$$

budući da je krivina zbir Riemannove krivine (2.11) i krivine generisane torzijom (2.43), konekcija je suma Christoffelovih simbola i kontorzije i budući da su klasični pp-talasi rješenja Yang-Millsovih jednačina. Dalje, kako je $F = l \wedge m$, u specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5), antisimetrični tenzor F (2.6) ima samo dvije nenulte nezavisne komponente, a to su

$$F^{01} = 1, \quad F^{02} = \mp \mathrm{i}.$$

Kako je u specijalnim lokalnim koordinatama funkcija $k(\varphi)$ funkcija od x^3, koristeći formulu za krivinu (2.43) direktno dobijamo da je $\partial_\nu R_T{}^{\mu\nu} = 0$. Koristeći eksplicitnu formulu za torziju (2.35), i činjenicu da je torzija čisto aksijalna, što implicira $T = 2K$, eksplicitnu formulu za krivinu generisanu torzijom (2.43) i specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5), dobijamo da je jedini nenulti izraz $\Gamma^\kappa{}_{\nu\eta} R^\eta{}_\lambda{}^{\mu\nu}$ za $\kappa = 0, \lambda = 3, \mu = 0$, tojest $-\frac{1}{2} k \cdot k'$. Jedini nenulti izraz u $\Gamma^\eta{}_{\nu\lambda} R^\kappa{}_\eta{}^{\mu\nu}$ je također kada je $\kappa = 0, \lambda = 3, \mu = 0$, tojest

$-\frac{1}{2}k \cdot k'$, pa se ovi izrazi oduzmu. Dakle, jednačina (2.47) je zadovoljena. Provjera da su svi izrazi u jednačini (2.48) nula je veoma jednostavna direktnom zamjenom formula za krivinu (2.40), (2.41), te koristeći specijalne lokalne koordinate (2.1), (2.5) i jednakosti (2.8). □

Sada ćemo dokazati da su generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom rješenja sistema (1.2), (1.3) za kvadratnu formu (1.4). Glavni rezultat ovog poglavlja je sljedeća

Teorema 2.3.4. *Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom su rješenja sistema* (1.2), (1.3) *u slučaju* (1.4).

Primjedba 2.3.5. Uslov da je Ricci krivina paralelna se može zamijeniti sa uslovom $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$, vidi Primjedbu 2.3.13.

Da bismo dokazali Teoremu 2.3.4 prvo ćemo zapisati jednačine polja (1.2), (1.3) u eksplicitinom obliku.

2.3.1 Eksplicitna reprezentacija jednačina polja

U ovoj sekciji zapisujemo sistem jednačina (1.2), (1.3) u ekplicitnom obliku za kvadratnu formu (1.4) pod sljedećim pretpostavkama:

(i) naše prostorvrijeme je metrički kompatibilno;

(ii) torzija je čisto aksijalna;

(iii) Ricci krivina (1.18) je simetrična;

(iv) skalarna krivina $\mathcal{R}$ i pseudoskalarna krivina $\mathcal{R}_*$ su nula.

Primjedba 2.3.6. Primijetimo da pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom zadovoljavaju gornje pretpostavke $(i) - (iv)$.

Primjedba 2.3.7. Gornje pretpostavke $(i) - (iv)$ su primijenjene tek *poslije* izvršenih varijacija.

Primjedba 2.3.8. U opštem slučaju, krivina ima antisimetriju $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ a antisimetija $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ je posljedica metričke kompatibilnosti. U izvođenju ekplicitnog oblika sistema jednačina (1.2), (1.3), *nećemo* korisitmo osobinu $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, budući da krivina generaliziranih pp-talasa sa aksijalnom torzijom ne zadovoljava ovu osobinu.

Primjedba 2.3.9. Primijetimo da simetrija Ric krivine implicira simetriju Ric_* krivine. Zaista, pod pretpostavkom da je Ric krivina simetrična tenzori $A^{(l)}$ iz Sekcije 1.4.1 su svi jednaki nula. Jednakosti (1.42), (1.43) impliciraju da su tenzori $\mathcal{A}_*^{(i)}$ također jednaki nula, što implicira da je Ric_* krivina simetrična.

Glavni rezultat ove sekcije je sljedeća

Teorema 2.3.10. *Pod gornjim pretpostavkama $(i)-(iv)$ jednačine polja (1.2), (1.3) u specijalnom slučaju (1.4), se mogu zapisati kao*

$$
\begin{aligned}
0 &= 2d_1 W^{\kappa\beta\alpha\nu} Ric_{\kappa\nu} + d_2 \epsilon^{\eta\nu\alpha\beta} Ric_{\kappa\nu} Ric_*{}^{\kappa}{}_{\eta} - d_3 \epsilon^{\kappa\lambda\xi\alpha} W_{\kappa\lambda\mu}{}^{\beta} Ric_*{}^{\mu}{}_{\xi}, \qquad (2.49)\\
0 &= d_1 \left\{ \nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} + T_{\mu\eta\lambda} Ric_\kappa{}^\eta + T_{\mu\kappa\eta} Ric_\lambda{}^\eta \right\}\\
&\quad - d_4 \left\{ (g_{\kappa\mu} \mathcal{W}^{\xi\zeta}{}_{\lambda\eta} - g_{\lambda\mu} \mathcal{W}^{\xi\zeta}{}_{\kappa\eta}) T^\eta{}_{\xi\zeta} + (g_{\kappa\mu} \epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\lambda} - g_{\lambda\mu} \epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\kappa}) T^\eta{}_{\xi\zeta} Ric_*{}^\xi{}_\vartheta \right\}\\
&\quad + c_5 \left\{ \epsilon^{\eta\xi}{}_{\kappa\mu} \nabla_\xi Ric_{*\lambda\eta} - \epsilon^{\eta\xi}{}_{\lambda\mu} \nabla_\xi Ric_{*\kappa\eta} + \tfrac{1}{2} (\epsilon_\kappa{}^{\eta\xi\zeta} Ric_{*\lambda\eta} - \epsilon_\lambda{}^{\eta\xi\zeta} Ric_{*\kappa\eta}) T_{\mu\zeta\xi} \right\}\\
&\quad - c_3 \left\{ 2T^\eta{}_{\lambda\xi} \mathcal{W}^\xi{}_{\mu\kappa\eta} + 2T^\eta{}_{\xi\kappa} \mathcal{W}^\xi{}_{\mu\lambda\eta} + T_{\mu\xi\eta} \mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\xi} + \epsilon^\vartheta{}_{\mu\eta\lambda} T^\eta{}_{\xi\kappa} Ric_*{}^\xi{}_\vartheta \right.\\
&\qquad - \epsilon^\vartheta{}_{\mu\kappa\eta} T^\eta{}_{\xi\lambda} Ric_*{}^\xi{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\eta\kappa} T^\eta{}_{\xi\lambda} Ric_{*\mu\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\eta\lambda} T^\eta{}_{\xi\kappa} Ric_{*\mu\vartheta}\\
&\qquad \left. + \epsilon^\vartheta{}_{\mu\lambda\kappa} \nabla_\xi Ric_*{}^\xi{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\lambda\kappa} \nabla_\xi Ric_{*\mu\vartheta} \right\}, \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

pri čemu su c_1, c_3, c_5 koeficijenti kvadratne forme (1.4) i $d_1 = c_1 + c_3$, $d_2 = c_1 - c_5$, $d_3 = c_3 + c_5$, $d_4 = \frac{1}{2}(c_1 - c_3)$.

Primjedba 2.3.11. Budući da je akcija (1.1) konformalno invarijantna, sistem (2.49), (2.50) je ustvari sistem od $9 + 64$ jednačina, tojest jednačina (2.49) ima 9 nezavisnih komponenti a ne 10.

Primijetimo da su jednačine (2.49), (2.50) dobijene varijacijom akcije (1.1) za kvadratnu formu (2.52) nezavisno po metrici i po konekciji te bez bilo kakvih pretpostavki za krivinu i torziju. Tek *nakon* što smo završili varijacije koristimo pretpostavke $(i)-(iv)$ i eksplicitne formule za dijelove krivine da bismo dobili jednačine (2.49), (2.50).

Primjedba 2.3.12. Pretpostavka (i) implicira da je $R^{(6)}$ dio krivine (1.36) nula a pretpostavka (iv) implicira da su $R^{(2)}$ dio krivine (1.32) i $R^{(4)}$ dio krivine (1.34) jednaki nula. Zato, pod gornjim pretpotavkama, krivina (1.17) ima samo *tri* nenulta ireducibilna dijela a to su $R^{(1)}$, $R^{(3)}$ i $R^{(5)}$ dijelovi krivine. Zbog toga krivinu možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu} Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu} Ric_{\kappa\nu} + g_{\lambda\nu} Ric_{\kappa\mu} - g_{\kappa\nu} Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu}\\
&\quad + \frac{1}{2}(-\epsilon^\eta{}_{\lambda\mu\nu} Ric_{*\kappa\eta} + \epsilon^\eta{}_{\kappa\mu\nu} Ric_{*\lambda\eta}). \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Sada ćemo dokazati Teoremu 2.3.10. Budući da krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom (2.40) ima samo tri ireducibilna dijela $R^{(1)}$ (1.31), $R^{(3)}$ (1.33) i $R^{(5)}$ (1.35), posmatramo kvadratnu formu (1.4) zapisanu kao

$$
q(R) = c_1(R^{(1)}, R^{(1)}) + c_3(R^{(3)}, R^{(3)}) + c_5(R^{(5)}, R^{(5)}) + \ldots \qquad (2.52)
$$

pri čemu su c_1, c_3 i c_5 proizvoljne realne konstante i gdje sa ... označavamo članove kvadratne forme koji ne utiču na varijaciju δS kada variramo koristeći gornje pretpostavke (i)-(iv).

2.3.2 Varijacija po metrici

Koristeći formulu (1.31) za $R^{(1)}$ dio krivine i formulu za Yang-Millsov unutrašnji proizvod (1.5), dobijamo

$$(R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} = R^{(1)\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{(1)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = -2\overline{Ric}_{\lambda\nu}\overline{Ric}^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{R}^2.$$

Budući da je varijacija po metrici skalarne krivine jednaka nula, dobijamo

$$\begin{aligned}(R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} &= -2\overline{Ric}_{\lambda\nu}\overline{Ric}^{\lambda\nu} \\ &= -\frac{1}{2}Ric_{\lambda\nu}Ric^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}Ric^{(2)}{}_{\lambda\nu}Ric^{(2)\lambda\nu} + Ric_{\lambda\nu}Ric^{(2)\lambda\nu}.\end{aligned}$$

Koristeći rezultate iz Dodatka C, dobijamo

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} \\ &\quad = \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(2Ric^{\alpha}{}_{\nu}Ric^{\beta\nu} - 2R^{\kappa\beta\alpha\nu}Ric_{\kappa\nu} - Ric_{\lambda\nu}Ric^{\lambda\nu}g^{\alpha\beta}\right). \qquad (2.53)\end{aligned}$$

Zamjenjujući eksplicitnu formulu za krivinu

$$\begin{aligned}R^{\kappa\lambda\mu\nu} &= R^{(1)\kappa\lambda\mu\nu} + R^{(3)\kappa\lambda\mu\nu} + R^{(5)\kappa\lambda\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left(g^{\kappa\mu}Ric^{\lambda\nu} - g^{\lambda\mu}Ric^{\kappa\nu} - g^{\kappa\nu}Ric^{\lambda\mu} + g^{\lambda\nu}Ric^{\kappa\mu}\right) \\ &\quad + W^{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\eta\kappa\mu\nu}Ric_*{}^{\lambda}{}_{\eta} - \epsilon^{\eta\lambda\mu\nu}Ric_*{}^{\kappa}{}_{\eta}\right) \qquad (2.54)\end{aligned}$$

u (2.53) dobijamo

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} \\ &\quad = \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-2W^{\kappa\beta\alpha\nu}Ric_{\kappa\nu} + \epsilon^{\eta\beta\alpha\nu}Ric_*{}^{\kappa}{}_{\eta}Ric_{\kappa\nu}\right). \qquad (2.55)\end{aligned}$$

Budući da je $R^{(6)}$ dio krivine jednak nula, na osnovu formule (1.35), dio $R^{(5)}$ krivine je

$$R^{(5)}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(R_{\kappa\lambda\mu\nu} - R_{\lambda\kappa\mu\nu} - R_{\mu\nu\kappa\lambda} + R_{\nu\mu\kappa\lambda}\right).$$

Zato je

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(5)},R^{(5)})_{YM} = \\
&\quad = \frac{1}{16}\frac{\delta}{\delta g}\int \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R_{\kappa}{}^{\lambda\mu\nu} - R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\mu\nu\lambda}{}_{\kappa} + R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu}R^{\nu\mu\lambda}{}_{\kappa}\right) \\
&\quad - \frac{1}{16}\frac{\delta}{\delta g}\int \left(R_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - R_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu\nu}R_{\kappa}{}^{\lambda\mu\nu} - R_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu\nu}R^{\mu\nu\lambda}{}_{\kappa} + R_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{\mu\nu}R^{\nu\mu\lambda}{}_{\kappa}\right) \\
&\quad - \frac{1}{16}\frac{\delta}{\delta g}\int \left(R_{\mu\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R_{\kappa}{}^{\lambda\mu\nu} - R_{\mu\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R^{\mu\nu\lambda}{}_{\kappa} + R_{\mu\nu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R^{\nu\mu\lambda}{}_{\kappa}\right) \\
&\quad + \frac{1}{16}\frac{\delta}{\delta g}\int \left(R_{\nu\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - R_{\nu\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R_{\kappa}{}^{\lambda\mu\nu} - R_{\nu\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R^{\mu\nu\lambda}{}_{\kappa} + R_{\nu\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}R^{\nu\mu\lambda}{}_{\kappa}\right).
\end{aligned}
$$

Koristeći Propoziciju A.1.1 i računajući ovih šesnaest varijacija odvojeno, nakon dugog ali jednostavnog računa dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(5)},R^{(5)})_{YM} \\
&\quad = \int (\delta g_{\alpha\beta})\left(R_{\kappa\lambda\mu}{}^{\alpha}\left(R^{\mu\beta\lambda\kappa} - R^{\lambda\kappa\mu\beta}\right) + \frac{1}{4}R_{\lambda\kappa\mu\nu}\left(R^{\kappa\lambda\mu\nu} - R^{\mu\nu\kappa\lambda}\right)g^{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}
$$

Koristeći eksplicitnu formulu za krivinu (2.54) i rezultate iz Primjedbe 1.4.10 i Leme 1.4.11, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(5)},R^{(5)})_{YM} \\
&\quad = \int (\delta g_{\alpha\beta})\left(\epsilon^{\xi\beta\lambda\alpha}Ric_{\lambda\mu}Ric_{*}{}^{\mu}{}_{\xi} + \epsilon^{\kappa\mu\xi\beta}W_{\kappa\mu\lambda}{}^{\alpha}Ric_{*}{}^{\lambda}{}_{\xi}\right). \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Budući da je $R^{(3)} = R - R^{(1)} - R^{(5)}$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(3)},R^{(3)})_{YM} \\
&\quad = \frac{\delta}{\delta g}\int (R,R)_{YM} - \frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(5)},R^{(5)})_{YM} - \frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(1)},R^{(1)})_{YM}.
\end{aligned}
$$

Rezultat varijacije $\dfrac{\delta}{\delta g}\displaystyle\int (R,R)_{YM}$ je dat u Dodatku A. Kombinujući formule (2.54), (2.55), (2.56), (A.4) i koristeći rezultate iz Primjedbe 1.4.10 i Leme 1.4.11, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int (R^{(3)},R^{(3)})_{YM} \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta})(-2W^{\kappa\beta\alpha\nu}Ric_{\kappa\nu} + \epsilon^{\eta\kappa\alpha\nu}Ric_{*}{}^{\beta}{}_{\eta}Ric_{\kappa\nu} + \epsilon^{\kappa\mu\eta\alpha}W_{\kappa\mu\lambda}{}^{\beta}Ric_{*}{}^{\lambda}{}_{\eta}). \quad (2.57)
\end{aligned}
$$

Kombinujući formule (2.52), (2.55), (2.56), (2.57) i Bianchijev identitet za ${}^*\mathcal{W}$ dobijamo eksplicitnu reprezentaciju (2.49) jednačine polja (1.2).

2.3.3 Varijacija po konekciji

Varijacije $\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int (R^{(j)}, R^{(j)})_{YM}$ su već izračunate [99] i pokazano je da vrijedi

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int (R^{(j)}, R^{(j)})_{YM} = 4\int \left((\delta_{YM}R^{(j)})^{\mu}(\delta\Gamma)_{\mu}\right), \tag{2.58}$$

pri čemu je

$$(\delta_{\mathrm{YM}}R)^{\mu} := \frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\,(\partial_{\nu} + [\Gamma_{\nu}\,,\,\cdot\,])\left(\sqrt{|\det g|}\,R^{\mu\nu}\right)$$

Yang-Millsova divergencija. Prema (2.58) i koristeći identitet

$$\{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu} = \frac{\partial_{\nu}|\det g|}{2|\det g|}, \tag{2.59}$$

dobijamo

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} = 4\int (\delta_{YM}R^{(1)})^{\mu}(\delta\Gamma)_{\mu} =$$
$$= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})\left(\partial_{\nu}R^{(1)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu}R^{(1)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{(1)\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}R^{(1)\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\right).$$

Koristeći definiciju kovarijantnog izvoda (1.10), identitet (1.14) i činjenicu da je torzija čisto aksijalna, dobijamo

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} = 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})\left(\nabla_{\nu}R^{(1)}{}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - \Gamma_{\mu\nu\eta}R^{(1)}{}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu}\right).$$

Koristeći metričku kompatibilnost, formulu (1.31) i činjenicu da je torzija čisto aksijalna, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int (R^{(1)}, R^{(1)})_{YM} = 2\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})(&\nabla_{\lambda}Ric_{\kappa\mu} - \nabla_{\kappa}Ric_{\lambda\mu} + g_{\kappa\mu}\nabla_{\xi}Ric_{\lambda}{}^{\xi} \\ &- g_{\mu\lambda}\nabla_{\xi}Ric_{\kappa}{}^{\xi} + 2Ric_{\kappa}{}^{\eta}K_{\mu\eta\lambda} + 2Ric_{\lambda}{}^{\eta}K_{\mu\kappa\eta}).\end{aligned} \tag{2.60}$$

Koristeći (2.58), (2.59) i činjenicu da je torzija čisto aksijalna, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int (R^{(3)}, R^{(3)})_{YM} &= 4\int (\delta_{YM}R^{(3)})^{\mu}(\delta\Gamma)_{\mu} \\ &= 4\int (\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})\left(\partial_{\nu}R^{(3)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu}R^{(3)\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{(3)\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}R^{(3)\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\right) \\ &= 4\int (\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})\left(\nabla_{\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu} - K_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu}\right).\end{aligned} \tag{2.61}$$

Koristeći (2.58), (2.59) i činjenicu da je torzija čisto aksijalna, dobijamo

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int(R^{(5)},R^{(5)})_{YM}=4\int(\delta_{YM}R^{(5)})^{\mu}(\delta\Gamma)_{\mu}=$$
$$=4\int(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda})\left(\partial_{\nu}R^{(5)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}+\{\Gamma\}^{\xi}{}_{\xi\nu}R^{(5)}{}^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}+\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{(5)}{}^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}-\Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}R^{(5)}{}^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\right)$$
$$=4\int(\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})\left(\nabla_{\nu}R^{(5)}{}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}-\Gamma_{\mu\nu\eta}R^{(5)}{}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu}\right).$$

Koristeći eksplicitnu formulu (B.3) za $R^{(5)}$ dio krivine i Lemu 1.4.9, dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\Gamma}\int(R^{(5)},R^{(5)})_{YM}=2\int(\delta\Gamma^{\lambda\mu\kappa})\,&(-\epsilon^{\eta}{}_{\lambda\mu}{}^{\nu}\nabla_{\nu}Ric_{*\kappa\eta}+\epsilon^{\eta}{}_{\kappa\mu}{}^{\nu}\nabla_{\nu}Ric_{*\lambda\eta}\\&+\epsilon^{\eta}{}_{\lambda}{}^{\xi\nu}K_{\mu\nu\xi}Ric_{*\kappa\eta}-\epsilon^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\xi\nu}K_{\mu\nu\xi}Ric_{*\lambda\eta}\big).\end{aligned}\tag{2.62}$$

Kombinujući formule (2.52), (2.60), (2.61) i (2.62) dobijamo da je druga jednačina polja (1.3) eksplicitno data sa

$$\begin{aligned}0=\;&c_1(\nabla_{\lambda}Ric_{\kappa\mu}-\nabla_{\kappa}Ric_{\lambda\mu}+g_{\kappa\mu}\nabla_{\xi}Ric_{\lambda}{}^{\xi}-g_{\mu\lambda}\nabla_{\xi}Ric_{\kappa}{}^{\xi})\\&+2c_1(K_{\mu\eta\lambda}Ric_{\kappa}{}^{\eta}+K_{\mu\kappa\eta}Ric_{\lambda}{}^{\eta})+2c_3\left(\nabla_{\nu}\mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu}{}^{\nu}-K_{\mu\nu\eta}\mathcal{W}_{\kappa\lambda}{}^{\eta\nu}\right)\\&+c_5\left(-\epsilon^{\eta}{}_{\lambda\mu}{}^{\nu}\nabla_{\nu}Ric_{*\kappa\eta}+\epsilon^{\eta}{}_{\kappa\mu}{}^{\nu}\nabla_{\nu}Ric_{*\lambda\eta}\right)\\&+c_5\left(+\epsilon^{\eta}{}_{\lambda}{}^{\xi\nu}K_{\mu\nu\xi}Ric_{*\kappa\eta}-\epsilon^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\xi\nu}K_{\mu\nu\xi}Ric_{*\lambda\eta}\right),\end{aligned}\tag{2.63}$$

pri čemu su c_1, c_3, c_5 koeficijenti kvadratne forme (1.4).

Dalje, koristeći Bianchijev identitet (B.5), možemo eksplicitno izraziti ∇Ric i $\nabla\mathcal{W}$ sa jednom kontrakcijom, vidi Dodatak B za detaljan račun, da bi dobili

$$\nabla_{\xi}Ric^{\xi}{}_{\lambda}=-K^{\eta}{}_{\xi\zeta}\mathcal{W}^{\xi\zeta}{}_{\lambda\eta}-\epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\lambda}K^{\eta}{}_{\xi\zeta}Ric_{*}{}^{\xi}{}_{\vartheta}\tag{2.64}$$

i

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}=&-\frac{1}{2}\big(\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu}-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}+2Ric^{\mu}{}_{\xi}K_{\nu\mu\lambda}+2Ric^{\mu}{}_{\nu}K_{\mu\xi\lambda}\\&+\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\nu\xi}\nabla_{\mu}Ric_{*\lambda\vartheta}-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\nu\xi}\nabla_{\mu}Ric_{*}{}^{\mu}{}_{\vartheta}\big)\\&-K^{\eta}{}_{\mu\xi}(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\eta\nu}Ric_{*}{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_{*\lambda\vartheta})-K^{\eta}{}_{\mu\nu}(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\xi\eta}Ric_{*}{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\xi\eta}Ric_{*\lambda\vartheta})\\&+\frac{1}{2}K^{\eta}{}_{\mu\zeta}\left(g_{\lambda\xi}\epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\nu}Ric_{*}{}^{\mu}{}_{\vartheta}-g_{\lambda\nu}\epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\xi}Ric_{*}{}^{\mu}{}_{\vartheta}\right)\\&+\frac{1}{2}K^{\eta}{}_{\mu\zeta}(g_{\lambda\xi}\mathcal{W}^{\mu\zeta}{}_{\nu\eta}-g_{\lambda\nu}\mathcal{W}^{\mu\zeta}{}_{\xi\eta})-2K^{\eta}{}_{\nu\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}-2K^{\eta}{}_{\mu\xi}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Zamjenom (2.64) i (2.65) u (2.63), isključujemo izraze ∇Ric i $\nabla\mathcal{W}$ iz (2.63) odakle dobijamo eksplicitnu reprezentaciju (2.50) jednačine polja (1.3).

Ovim smo završili dokaz Teoreme 2.3.10.

2.3.4 Rješenja jednačina polja tipa pp-talasa

U ovoj sekciji nam je cilj dokazati Teoremu 2.3.4, tojest da su *generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom rješenja sistema* (1.2)*,* (1.3) *u slučaju* (1.4)*.*

Dokaz *Teoreme 2.3.4.* Ovu teoremu ćemo dokazati direktnom zamjenom eksplicitnih formula za torziju (2.34), (2.39), Weylovu krivinu (2.13), Ricci krivinu (2.44) i Ric_* krivinu (2.45) u eksplicitno napisane jednačine polja (2.49), (2.50). Također, koristit ćemo jednakosti (2.8), (2.9) da bi pojednostavili račun.

Izrazi $\mathcal{W} \times Ric$, $\mathcal{W} \times Ric_*$ i $Ric \times Ric_*$ sa jednom kontrakcijom su nula jer su vektori l, m_1 i m_2 ortogonalni, vidi (2.9). Zbog toga je jednačina (2.49) zadovoljena.

Posmatrajmo sada jednačinu (2.50). Prvo ćemo posmatrati izraze $T \times \mathcal{W}$ sa dvije kontrakcije. Koristeći (2.9), (2.13) i (2.39), imamo

$$\begin{aligned} T^{\eta}{}_{\lambda\xi}\mathcal{W}^{\xi}{}_{\mu\kappa\eta} &= \mp k(x^3)(l \wedge m_1 \wedge m_2)^{\eta}{}_{\lambda\xi} \sum_{j,k=1}^{2} w_{jk}(l \wedge m_j)^{\xi}{}_{\mu}(l \wedge m_k)_{\kappa\eta} \\ &= \mp k(x^3)(-w_{12} l_\lambda l_\mu l_\kappa + w_{21} l_\lambda l_\mu l_\kappa) = 0, \end{aligned}$$

jer je $w_{12} = w_{21}$. Posljedično, izrazi $T \times \mathcal{W}$ sa tri kontrakcije su također nula.

Izrazi $T \times Ric$ sa jednom kontrakcijom su jednaki nuli jer

$$\begin{aligned} T_{\mu\eta\lambda} Ric_{\kappa}{}^{\eta} &= \frac{1}{2}\left(f_{11} + f_{22} - (k(x^3))^2\right) k(x^3)\, l^{\xi}\, \epsilon_{\xi\mu\eta\lambda}\, l_\kappa l^{\eta} \\ &= \frac{1}{2}\left(f_{11} + f_{22} - (k(x^3))^2\right) k(x^3)\, l^{\xi} l^{\eta}\, \epsilon_{\xi\eta\mu\lambda}\, l_\kappa = 0 \end{aligned}$$

kao proizvod simetričnog tenzora $l^{\xi} l^{\eta}$ i antisimetričnog Levi-Civita tenzora.

Slično, izrazi $T \times Ric_*$ sa jednom kontrakcijom su jednaki nula jer dobijamo proizvod simetričnog i antisimetričnog tenzora.

Posmatrajmo sada izraze $\epsilon \times T \times Ric_*$ sa dvije kontrakcije između ϵ i T i jednom kontrakcijom između ϵ i Ric_*. Koristeći formule (1.49), (2.34) i (2.45), dobijamo

$$\epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\eta\lambda} T^{\eta}{}_{\xi\kappa} Ric_{*\mu\vartheta} = 2k(x^3)k'(x^3) l_\kappa l_\lambda l_\mu.$$

Zato je

$$\epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\eta\lambda} T^{\eta}{}_{\xi\kappa} Ric_{*\mu\vartheta} - \epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\eta\kappa} T^{\eta}{}_{\xi\lambda} Ric_{*\mu\vartheta} = 0.$$

Posmatrajmo sada izraze $\epsilon \times \nabla Ric_*$. Budući da je $\Gamma^{\eta}{}_{\xi\mu} Ric_{*\eta\vartheta} = 0$, imamo

$$\nabla_\xi Ric_{*\mu\vartheta} = \partial_\xi Ric_{*\mu\vartheta} - \Gamma^{\eta}{}_{\xi\mu} Ric_{*\eta\vartheta} - \Gamma^{\eta}{}_{\xi\vartheta} Ric_{*\mu\eta} = -k''(x^3) l_\xi l_\mu l_\vartheta.$$

Jasno $\nabla_\xi {Ric_*}^\xi{}_\eta = -k''(x^3) l_\xi l^\xi l_\eta = 0$. Jedini nenulti izraz u $\nabla_\xi Ric_{*\mu\vartheta}$ je ustvari $\nabla_3 Ric_{*33} = -k''(x^3)$ i posljedično imamo da je izraz $\epsilon \times \nabla Ric_*$ sa dvije kontrakcije između ϵ and ∇Ric_* jednak nula, jer je

$$\epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\lambda\kappa} \nabla_\xi Ric_{*\mu\vartheta} = \epsilon^{33}{}_{\lambda\kappa} \nabla_3 Ric_{*33} = 0.$$

Jednačina (2.50) se sada svodi na provjeru da li je

$$\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu} = 0. \tag{2.66}$$

Pretpostavljajući da je Ricci krivina paralelna, jasno je da je jednačina (2.66) zadovoljena. Ipak, vidimo da se paralelnost Ricci krivine ne mora da zahtijeva i može se zahtijevati da Cotton tenzor generaliziranih pp-talasa nestaje.

Ovim smo dokazali Teoremu 2.3.4. □

Primjedba 2.3.13. Cotton tenzor $\nabla_\lambda Ric_{\kappa\mu} - \nabla_\kappa Ric_{\lambda\mu}$ generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom nestaje ako i samo ako $f_{11} + f_{22} = \text{const}$. Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$, tojest da je Ricci krivina klasičnih pp-talasa paralelna.

2.4 Diracov operator bez mase u teorijama gravitacije

U ovoj sekciji objašnjavamo matematički i fizikalni značaj prostorvremena koji su posmatrani u Sekciji 2.2.2 i pokušavamo da damo njihovu fizikalnu interpretaciju slično kao što je urađeno u [74]. Kao što smo naglasili u [74], klasični pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom nemaju svoju očiglednu fizikalnu interpretaciju i zbog toga se ne mogu posmatrati odvojeno. Naša analiza generaliziranih pp-talasa sa paralelnom Ricci krivinom pokazuje su klasični pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom samo dio jedne šire klase rješenja. Analiziranjem formule za krivinu generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom, primijećujemo da u specijalnim lokalnim koordinatama (2.1), (2.5) krivina je suma krivine pripadajućeg klasičnog pp-talasa

$$-\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f \tag{2.67}$$

i krivine

$$\frac{1}{4}(k(\varphi))^2 \operatorname{Re}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \bar{m})\right) \mp \frac{1}{2} k'(\varphi) \operatorname{Im}\left((l \wedge m) \otimes (l \wedge \bar{m})\right) \tag{2.68}$$

generisane sa aksijalnim torzijskim talasom koji se kreće nad pp-prostorom. Ova izvanredna osobina nije trivijalna činjenica. Slično, osobina da se krivine samo sabiraju je bila prisutna i u slučaju generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom, vidi [74]. Fizikalna interpretacija generaliziranih pp-talasa sa čisto tenzorskom torzijom predstavljenih u Sekciji 2.2.1 je data u [74] gdje je predloženo da generalizirani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički afini model na neutrino bez mase. Zbog toga, da bismo dali fizikalnu interpretaciju generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom, poredimo ova prostorvremena sa rješenjima Einstein-Weylove teorije. Einstein-Weylova teorija je klasični model koji opisuje interakcije između gravitacionih polja i polja neutrina bez mase.

Primjedba 2.4.1. Slično kao što je bio slučaj u [74], naša torzija i krivina generisana torzijom se mogu interpretirati kao talasi koji putuju brzinom svjetlosti. Pripadajući klasični pp-talas sa paralelnom Ricci krivinom se može posmatrati kao gravitacioni otisak kreiran talasom neke čestice bez mase. Kao što je naglašeno u [74], takva situacija se događa u Einstein-Weylovoj teoriji.

U skladu sa kvantnom mehanikom, mi ćemo krivinu (2.68) kompleksificirati. Kompleksificirana krivina se može zapisati kao

$$\mathfrak{R}_A := r\,(l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m}), \tag{2.69}$$

pri čemu je

$$r := \frac{1}{4}(k(\varphi))^2 \pm \frac{\mathrm{i}}{2}k'(\varphi) \tag{2.70}$$

kompleksna funkcija. Funkcija r je funkcija faze (2.4) a krivina (2.68) je realni dio kompleksificirane krivine (2.69). Krivina $\mathfrak{R}_A$ je polarizovana, tojest

$$^*\mathfrak{R}_A = -\mathfrak{R}_A^* = \pm\mathrm{i}\,\mathfrak{R}_A,$$

pri čemu znak $\pm$ ovisi o znaku u (2.5). Također, kompleksificiranu krivinu možemo zapisati kao

$$\mathfrak{R}_{A\,\alpha\beta\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\beta ab}\,\omega^{abcd}\,\overline{\sigma}_{\gamma\delta cd} \tag{2.71}$$

pri čemu je ω neki simetrični 4-spinor i $\sigma_{\alpha\beta}$ Paulijeve matrice drugog reda (2.16), i pri čemu $\overline{\sigma}$ označava njihovu kompleksnu konjugaciju. Kompleksno konjugovane matrice $\overline{\sigma}$ su tačno isti skup matrica (2.16) samo sa suprotnim znakom izabranim da odgovara znaku u (2.5).

Rješavajući (2.71) po ω daje

$$\omega = \xi \otimes \xi \otimes \xi \otimes \xi, \tag{2.72}$$

pri čemu je

$$\xi^a := r^{1/4}\chi^a. \tag{2.73}$$

Primijetimo da spinor χ^a koji se pojavljuje u formuli (2.73) je paralelno polje spinora pripadajućeg klasičnog pp-talasa (2.5) a kompleksna funkcija r je data sa (2.70).

Iz formula (2.72) zaključujemo da je 4-spinor ω četvrti tenzorski stepen od 1-spinora ξ. Zato, krivina $\mathfrak{R}_A$ je u potpunosti određena sa 1-spinorskim poljem ξ.

Interesantno, ovim možemo uspostaviti vezu između generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom i polja neutrina bez mase. Polje neutrina bez mase je metrički kompatibilno prostorvrijeme (sa ili bez torzije) opisano akcijom

$$S_{\text{neutrino}} := 2\mathrm{i}\int\Big(\xi^a\,\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\,(\nabla_\mu\bar{\xi}^{\dot{b}})\;-\;(\nabla_\mu\xi^a)\,\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\,\bar{\xi}^{\dot{b}}\Big), \tag{2.74}$$

vidi formulu (11) u [44]. Varijacijom akcije (2.74) po spinoru ξ, držeći torziju i metriku fiksnom, dobijamo *Diracovu jednačinu bez mase*

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\nabla_\mu\xi^a - \frac{1}{2}T^\eta{}_{\eta\mu}\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\xi^a = 0, \tag{2.75}$$

koju ekvivalentno možemo pisati kao

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\{\nabla\}_\mu\xi^a \pm \frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\alpha\beta\gamma}\sigma^\delta{}_{a\dot{b}}\xi^a = 0, \tag{2.76}$$

pri čemu je $\{\nabla\}$ kvarijantni izvod po Levi-Civita konekciji, vidi Dodatak B u [74]. Također, koristeći Diracov operator bez mase, vidi Sekciju 3.2, Diracovu jednačinu bez mase možemo dobiti varijacijom akcije (3.12) po spinoru ξ. Diracov operator bez mase opisuje neutrino bez mase u kompaktnom prostoru i njegove svojstvene vrijednosti se mogu fizikalno interpretirati kao energetski nivoi te čestice bez mase. Interesantna osobina je iskazana sljedećom lemom.

Lema 2.4.2. *Polje spinora (2.73) zadovoljava Diracovu jednačinu bez mase.*

Dokaz. Budući da klasični pp-talasi daju paralelno polje spinora χ tada je

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\{\nabla\}_\mu\xi^a = (r^{1/4})'\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}l_\mu\chi^a = 0$$

za Paulijeve matrice (2.15) i specijalne lokalne koordinate (2.5). Također, prema (1.48), (2.34) koristeći Paulijeve matrice (2.15), dobijamo

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}T^{\alpha\beta\gamma}\sigma^\delta{}_{a\dot{b}}\xi^a = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}l_\mu k(\varphi)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\sigma^\delta{}_{a\dot{b}}\xi^a = 6k(\varphi)l_\mu\sigma^\mu{}_{a\dot{b}}\xi^a = 0,$$

tojest Diracova jednačina bez mase (2.76) je zadovoljena. □

U cilju davanja fizikalne interpretacije naših generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijim, dalje dajemo rješenja tipa pp-talasa Einstein-Weylove teorije i poredimo ih sa rješenjima tipa pp-talasa našeg konformalno invarijantnog metrički afinog modela gravitacije.

2.4.1 Usporedba metrički afinog rješenja i Einstein-Weylovog rješenja tipa pp-talasa

U Einstein-Weylovoj teoriji akciju posmatramo kao

$$S_{EW} := 2\mathrm{i} \int \left(\xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\{\nabla\}_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \; - \; (\{\nabla\}_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \right) + K \int \mathcal{R}, \tag{2.77}$$

pri čemu je $K = \frac{c^4}{16\pi G}$ univerzalna konstanta gdje su c brzina svjetlosti i G gravitaciona konstanta, vidi [63]. U Einstein-Weylovoj teoriji se pretpostavlja da je konekcija Levi-Civita, te dobijamo Einstein-Weylove jednačine polja varijacijom akcije (2.77) po metrici i spinoru, tojest

$$\frac{\delta S_{EW}}{\delta g} = 0, \tag{2.78}$$

$$\frac{\delta S_{EW}}{\delta \xi} = 0. \tag{2.79}$$

Rezultat varijacije prvog izraza u akciji (2.77) po metrici je tenzor impulsa energije Weylove akcije (2.74). Za detaljno izvođenje formule za tenzor impulsa energije vidi Dodatak B u [74]. Eksplicitna reprezentacija Einstein-Weylovih jednačina polja (2.78), (2.79) je data sa

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{i}}{2} \Big[\sigma^\nu{}_{a\dot{b}} \left(\bar{\xi}^{\dot{b}} \{\nabla\}^\mu \xi^a - \xi^a \{\nabla\}^\mu \bar{\xi}^{\dot{b}} \right) + \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \left(\bar{\xi}^{\dot{b}} \{\nabla\}^\nu \xi^a - \xi^a \{\nabla\}^\nu \bar{\xi}^{\dot{b}} \right) \Big] \\ + \mathrm{i} \left(\xi^a \, \sigma^\eta{}_{a\dot{b}} \, (\{\nabla\}_\eta \bar{\xi}^{\dot{b}}) g^{\mu\nu} - (\{\nabla\}_\eta \xi^a) \, \sigma^\eta{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} g^{\mu\nu} \right) \\ - K Ric^{\mu\nu} + \frac{K}{2} \mathcal{R} g^{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \{\nabla\}_\mu \, \xi^a = 0. \tag{2.81}$$

Proučavanje Einstein-Weylovih jednačina polja ima dugu historiju, vidi naprimjer [7, 21, 22, 42, 43, 45, 46, 56]. Pregled poznatih rješenja Einstein-Weylove teorije je dat u [72, 74]. Nelinearni sistem jednačina (2.80), (2.81) ima rješenje u obliku pp-talasa, kao što je naglašeno u [72, 74].

Sada želimo da predstavimo klasu eksplicitnih rješenja sistema (2.80), (2.81) pri čemu je metrika g u obliku pp-metrike (2.1) a spinor ξ je dat sa (2.73). Spinor (2.73) zadovoljava Diracovu jednačinu bez mase (2.81), vidi Lemu 2.4.2. Zbog toga i činjenice da je skalarna krivina nula u postavkama pp-prostora, jednačina (2.80) sada postaje

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\nu}{}_{a\dot{b}}\left(\bar{\xi}^{\dot{b}}\{\nabla\}^{\mu}\xi^{a}-\xi^{a}\{\nabla\}^{\mu}\bar{\xi}^{\dot{b}}\right)+\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\left(\bar{\xi}^{\dot{b}}\{\nabla\}^{\nu}\xi^{a}-\xi^{a}\{\nabla\}^{\nu}\bar{\xi}^{\dot{b}}\right)-K Ric^{\mu\nu}=0.$$

Zamjenom formula (2.44), (2.73) u gornju jednačinu, dobijamo

$$\mathrm{i}(\sigma^{\nu}{}_{a\dot{b}}l^{\mu}+\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}l^{\nu})\Big((r^{1/4})'\,\overline{r^{1/4}}-r^{1/4}\,(\overline{r^{1/4}})'\Big)\,\chi^{a}\bar{\chi}^{\dot{b}}=Kl^{\mu}l^{\nu}\big(f_{11}+f_{22}-k(x^{3})^{2}\big)\,.$$

Uslov koji rješenje tipa pp-talasa mora da zadovoljava da bi bilo rješenje Eisntein-Weylove teorije jeste

$$f_{11}+f_{22}=k(\varphi)^{2}+\frac{2\mathrm{i}}{K}\Big((r^{1/4})'\,\overline{r^{1/4}}-r^{1/4}\,(\overline{r^{1/4}})'\Big)\,, \tag{2.82}$$

jer je $\sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}}\chi^{a}\bar{\chi}^{\dot{b}}=l^{\mu}$. Budući da je funkcija $k(\varphi)$ proizvoljna realna funkcija tada se kompleksna funkcija $r(\varphi)$ može izabrati proizvoljno i ona jedinstveno određuje desnu stranu u (2.82).

Primjedba 2.4.3. Kao što je navedeno u [74], osnovna razlika između ova dva modela je da u metrički afinom modelu generalizirani pp-talasi kao rješenja imaju paralelnu Ricci krivinu, za razliku od Einstein-Weylovog modela gdje rješenje tipa pp-talasa ne mora nužno imati paralelnu Ricci krivinu.

Poređenje ova dva tipa rješenja postaje jasnije u slučaju monohromatskih rješenja. Slično kao što je urađeno u [74], ako izaberemo funkciju $k(x^3)$ takvu da je funkcija (2.70) jednaka

$$r=c^{4}e^{4\mathrm{i}(ax^{3}+b)},$$

pri čemu su $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, tada spinor ξ iz (2.73) je eksplicitno dat sa

$$\xi=c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{\mathrm{i}(ax^{3}+b)}. \tag{2.83}$$

Vektorsko polje A iz Definicije 2.2.5 je $A=k(x^3)l$ pri čemu je funkcija $k(x^3)$ rješenje diferencijalne jednačine

$$\frac{1}{4}(k(x^{3}))^{2}\pm\frac{\mathrm{i}}{2}k'(x^{3})=c^{4}e^{4\mathrm{i}(ax^{3}+b)}$$

gdje $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Za polje spinora (2.83), uslov (2.82) glasi

$$f_{11} + f_{22} = (k(x^3))^2 - \frac{4ac^2}{K}.$$

Odavdje zaključujemo da u metrički afinom slučaju Laplacian funkcije f može biti bilo koja konstanta, dok u Einstein-Weylovom slučaju se zahtijeva da bude određena konstanta, što je posljedica konformalne invarijantnosti metrički afinog modela i prisustva gravitacione konstante u Einstein-Weylovom modelu.

Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom su veoma slični pp-talasnom tipu rješenja Einstein-Weylovog modela. Prema ovome, slično kao u [74] predlažemo da *generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom sa paraellnom Ricci krivinom predstavljaju metrički afini model sa neutrino bez mase.*

Poglavlje 3

Spektralna analiza Diracovog operatora bez mase na trodimenzionalnoj mnogostrukosti

Kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i čisto tenzorskom torzijom sa paralelnom Ricci krivinom koji su posmatrani u ovoj disertaciji imaju svoju određenu fizikalnu interpretaciju. Spinor ξ koji u potpunosti određuje kompleksificirane krivine ovih prostorvremena, zadovoljava Diracovu jednačinu bez mase. Aksijalna torzija posmatrana u prethodnim sekcijama je ireducibilni dio torzije koji se obično koristi za modelovanje neutrina bez mase, vidi [20], ili elektrona, vidi [16], putem Cosserat elastičnosti. Sada smo zainteresovani za više matematički pristup analizi Diracove jednačine bez mase i Diracovog operatora bez mase u 3 dimenzije.

U ovom poglavlju posmatramo Diracov operator bez mase na trodimenzionalnoj mnogostrukosti koji opisuje neutrino bez mase u trodimenzionalnom kompaktnom prostoru. Svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase se interpretiraju kao energetski nivoi te čestice bez mase. Svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase se mogu eksplicitno izračunati kada posmatramao jedinični torus $\mathbb{T}^3$ snabdjeven sa Euclidskom metrikom i jediničnu sferu $\mathbb{S}^3$ snabdjevenu sa standardnom metrikom koja je restrikcija Euclidske metrike sa $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{S}^3$. U ova dva slučaja se ispostavlja da je spektar Diracovog operatora bez mase simetričan.

Ipak, prema [3, 4, 5, 6], za opštu orijentisanu Riemannovu trodimenzionalnu mnogostrukost (M, g) nema fizikalnog razloga da spektar Diracovog operatora bez mase bude simetričan. Fizikalno interpretirano, ta simetrija bi značila da u ova dva primjera, neutrino bez mase i antineutrino bez mase imaju iste osobine.

Naš cilj jeste da pokažemo da je moguće razbiti spektralnu simetriju Diracovog operatora bez mase na $3-$torusu koristeći se perturbacijama Euclidske metrike. Opravdanje za tako nešto nalazimo u numeričkoj analizi spektra Diracovog operatora bez mase. Koristimo Galerkinovu metodu, vidi naprimjer [49], da bi eksplicitno izračunali spektar za različite perturbacije Euclidske metrike. Za perturbovanu Euclidsku metriku za neki mali pozitivni parametar ϵ, izvodimo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase, koje također ovise o parametru ϵ. Analiziramo pod kakvim perturbacijama Euclidske metrike je moguće dobiti spektralnu asimetriju.

U spektralnoj analizi Diracovog operatora bez mase koristićemo neke poznate rezultate za samoadjungovani eliptični diferencijalni operator prvog reda, vidi [18, 19, 25].

3.1 Neke osobine samoadjungovanog eliptičnog diferencijalnog operator prvog reda

Jedna od analiza spektra nekog operatora jeste da posmatramo raspodjelu svojstvenih vrijednosti tog operatora. Zbog toga smo zainteresovani za analizu *spektralne funkcije*, vidi Definiciju 3.1.5, i *funkcije brojanja*, vidi Definiciju 3.1.6, Diracovog operatora bez mase. Diracov operator bez mase je samoadjungovani diferencijalni operator prvog reda te ima diskretan spektar čije se svojstvene vrijednosti akumuliraju oko $+\infty$ i $-\infty$, dok su svojstvene funkcije operatora beskonačno glatke, vidi [19, 24, 25].

Neka je M povezana i kompaktna trodimenzionalna mnogostrukost bez granice i neka su $x = (x^1, x^2, x^3)$ lokalne koordinate na mnogostrukosti M. Posmatrajmo diferencijalni operator prvog reda A koji je samoadjungovan i koji djeluje na dvokolomne polugustine sa kompleksnim vrijednostima na mnogostrukosti M.

Principalni simbol i *subprincipalni simbol* diferencijalnog operatora prvog reda A, koje ćemo koristiti u ovoj disertaciji, su definisani kako slijedi, vidi [85].

Definicija 3.1.1. Principalni simbol diferencijalnog operatora prvog reda A je matrica dobijena ostavljajući u A samo vodeće izvode prvog reda i zamjenom svakog $\partial/\partial x^\alpha$ sa $i\xi_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, pri čemu je $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ promjenljiva dualna promjenljivoj x i koja se u fizikalnoj literaturi odnosi na *momentum*. Principalni simbol operatora A označavamo sa $A_1(x, \xi)$.

Kao što je pokazano u [19], postojanje principalnog simbola $A_1(x,\xi)$ implicira da je mnogostrukost M paralelizibilna i principalni simbol daje metriku i teleparalelnu konekciju $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x)$. To nam omugućava da rezultate naše spektrale analize izrazimo geometrijskim jezikom i da definišemo tenzor torzije (1.12).

Definicija 3.1.2. Subprincipalni simbol diferencijalnog operatora prvog reda A je definisan kao

$$A_{\mathrm{sub}} := A_0 + \frac{\mathrm{i}}{2}(A_1)_{x^\alpha \xi_\alpha}, \tag{3.1}$$

pri čemu su $A_1(x,\xi)$ i $A_0(x)$ komponente punog simbola $A(x,\xi) = A_1(x,\xi) + A_0(x)$ diferencijalnog operatora prvog reda i pri čemu donji indeks označava stepen homogenosti.

Primjedba 3.1.3. Mi pretpostavljamo da je principalni simbol $A_1(x,\xi)$ bez traga za sve $(x,\xi) \in T^*M$ i da je $\det A_1(x,\xi) \neq 0$, $\forall\ (x,\xi) \in T'M$ pri čemu je $T'M := T^*M \backslash \{\xi = 0\}$. Principalni simbol operatora A je 2×2 Hermitska matrica na kotangentnom omotaču T^*M i linearan je po ξ.

Primjedba 3.1.4. Poznato je, vidi [18, 19], da je pod gornjim pretpostavkama spektar operatora A diskretan i svojstvene vrijednosti se akumuliraju oko $\pm\infty$.

Označimo sa λ_k svojstvene vrijednosti operatora A i sa $v_k(x)$ odgovarajuće svojstvene vektore. Svojstvene vrijednosti λ_k su numerisane po rastućem redoslijedu koristeći $k = 1, 2, \ldots$ za pozitivne svojstvene vrijednosti i $k = 0, -1, -2, \ldots$ za nepozitivne svojstvene vrijednosti.

U svrhu dalje analize spektra operatora, zainteresovani smo za analizu dvije funkcije a to su spektralna funkcija i funkcija brojanja, koje su definisane na sljedeći način, vidi [19, 85].

Definicija 3.1.5. Spektralna funkcija je realna gustoća definisana kao

$$e(\lambda, x, x) := \sum_{0<\lambda_k<\lambda} \| \, v_k(x) \, \|^2, \tag{3.2}$$

pri čemu je $\| \, v_k(x) \, \|^2 := [v_k(x)]^* \, v_k(x)$ kvadrat Euclidove norme svojstvene funkcije v_k izračunate u tački $x \in M$ i λ je pozitivni parametar (spektralni parametar).

Definicija 3.1.6. Funkcija brojanja je funkcija

$$N(\lambda) := \sum_{0<\lambda_k<\lambda} 1 = \int_M e(\lambda, x, x) dx, \tag{3.3}$$

pri čemu je $e(\lambda, x, x)$ spektralna funkcija (3.2).

Funkcija brojanja $N(\lambda)$ je ustvari broj svojstvenih vrijednosti između 0 i λ. Mi smo također zainteresovani za asimptotske formule spektralne funkcije (3.2) i funkcije brojanja (3.3), tojest zainteresovani smo za formule tipa

$$e(\lambda, x, x) = a(x)\lambda^3 + b(x)\lambda^2 + o(\lambda^2), \tag{3.4}$$

$$N(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + o(\lambda^2) \tag{3.5}$$

kad $\lambda \to +\infty$, pri čemu su realne konstante a, b i realne gustoće $a(x)$, $b(x)$ povezane kao

$$a = \int_M a(x)dx, \tag{3.6}$$

$$b = \int_M b(x)dx. \tag{3.7}$$

Asimptotske formule (3.4) i (3.5) diferencijalnog operatora prvog reda su eksplicitno izvedene i date sa sljedećom teoremom.

Teorema 3.1.7. *Koeficijenti u dvočlanoj asimptotskoj formuli (3.4) su dati sa*

$$a(x) = \frac{1}{6\pi^2}\sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)},$$

$$b(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left((3c * T^{\mathrm{ax}} - 2\mathrm{tr}A_{\mathrm{sub}})\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\right)(x),$$

pri čemu je

$$T^{\mathrm{ax}}_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{3}\left(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha}\right)$$

aksijalna torzija, c je topološki naboj definisan kao

$$c := -\frac{i}{2}\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\ \mathrm{tr}((A_1)_{\xi_1}(A_1)_{\xi_2}(A_1)_{\xi_3}),$$

koji uzima samo dvije vrijednosti, $+1$ ili -1 i pri čemu je $*$ Hodgeova zvjezdica (1.21).

Za dokaz Teoreme 3.1.7 vidi naprimjer [19].

3.2 Diracov operator bez mase

U ovoj sekciji predstavljamo Diracov operator bez mase na trodimenzionalnoj mnogostrukosti sa njegovim osnovnim osobinama, slično kao što je urađeno u [19, 24]. Za više detalja o djelovanju Diracovog operatora na mnogostrukosti proizvoljne dimenzije vidi naprimjer [36, 41].

Neka je M trodimenzionalna povezana, kompaktna i orijentisana mnogostrukost snabdjevena sa Riemannovom metrikom $g_{\alpha\beta}$, gdje su $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ tenzorski indeksi. Prema [54], trodimenzionalna orijentisana mnogostrukost je paralelizibilna i posljedično postoje glatka vektorska polja $e_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ koja su linearno nezavisna u svakoj tački x mnogostrukosti M.

Tri linearno nezavisna vektorska polja $e_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ čine *okvir.* Možemo pretpostaviti da su ova vektorska polja ortonormalna, a ako nisu, ortonormalnost uvijek možemo dobiti korištenjem Gramm-Schmidtovog postupka. Koordinatne komponente vektora $e_j(x)$ su ${e_j}^\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$, gdje tzv. anholonomični ili okvirni indeks, označen sa latiničnim slovom j, broji vektorsko polje a tzv. holonomični ili tenzorski indeks, označen grčkim slovom α, broji njegove komponente.

Kookvir je definisan kao tri kovektorska polja $e^k(x)$, $k = 1, 2, 3$, a koordinatne komponente vektora $e^k(x)$ su ${e^k}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3$, pri čemu je

$$
{e^k}_\beta := \delta^{kj} g_{\beta\gamma} {e_j}^\gamma.
$$

Okvir je potpuno određen sa kookvirom, i obrnuto, relacijom ${e_j}^\alpha {e^k}_\alpha = {\delta_j}^k$.

Definicija 3.2.1. Diracov operator bez mase je matrični operator

$$
W := -\mathrm{i}\sigma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left(\frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ {\beta \atop \alpha\gamma} \right\} \sigma^\gamma \right) \right), \tag{3.8}
$$

gdje se sumiranje vrši po indeksima $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$.

Primjedba 3.2.2. Diracov operator bez mase označavamo sa slovom "W" jer se u teorijskoj fizici češće odnosi na *Weylov operator.*

Primjedba 3.2.3. Diracov operator bez mase se može posmatrati kao kvadratni korijen Laplaciana.

Koeficijenti $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ koji se pojavljuju u Definiciji 3.2.1 su Christoffelovi simboli (1.11). Matrice σ su Paulijeve matrice definisane kao

$$
\sigma^\alpha(x) := s^j {e_j}^\alpha(x), \tag{3.9}
$$

gdje se sumiranje vrši po ponovljenom okvirnom indeksu $j = 1, 2, 3$, indeks $\alpha = 1, 2, 3$ je slobodni tenzorski indeks a matrice s^j i s_j, $j = 1, 2, 3$ su definisane sa

$$
s^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = s_1, \; s^2 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = s_2, \; s^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = s_3. \tag{3.10}
$$

Diracov operator bez mase (3.8) djeluje na dvokolomni vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T \tag{3.11}$$

skalarnih funkcija sa kompleksnim vrijednostima (Weylov spinor). Spinor (3.11) se transformira na tačno određeni način pod transformacijama ortonormalnog okvira $e_j(x)$. Mi okvir biramo apriori pa komponente spinora možemo posmatrati kao skalare.

Indekse dižemo i spuštamo na standardni način koristeći metrički tenzor.

Koristeći Diracov operator bez mase (3.8) možemo konstruisati *Diracovu akciju bez mase*-varijacioni funkcional koji odgovara operatoru (3.8) kojeg smo posmatrali u Sekciji 2.4.

Definicija 3.2.4. Diracova akcija bez mase je definisana kao

$$S(\xi) := \int_M \mathrm{Re}(\xi^* W \xi) \sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\, dx, \tag{3.12}$$

pri čemu je W Diracov operator bez mase (3.8) a zvjezdica označava Hermitsku konjugaciju.

Orijentacija (pozitivna ili negativna) Diracovog operatora bez mase (3.8) je u potpunosti određena znakom okvira. Okvir ima pozitivnu orijentaciju ako je $\det e_j > 0$ a negativnu orijentaciju ako je $\det e_j < 0$. Primijetimo da transformacija $W \mapsto -W$ mijenja orijentaciju Diracovog operatora bez mase.

Fizikalno interpretirano, operator (3.8) opisuje neutrino bez mase u trodimenzionalnom kompaktnom prostoru M i energetski nivoi te čestice su određeni sa svojstvenim vrijednostima tog operatora. Dalje navodimo osnovne osobine Diracovog operatora bez mase (3.8), vidi [17, 29] za njihove dokaze:

- Diracov operator bez mase je invarijantan pod promjenom lokalnih koordinata.

- Diracov operator bez mase je eliptični operator.

- Diracov operator bez mase je formalno samoadjungovan sa unutrašnjim proizvodom

  $$\langle v, w \rangle := \int_M w^* v \sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\, dx \tag{3.13}$$

  dvokolomnih glatkih skalarnih funkcija $v, w : M \to \mathbb{C}^2$.

- U teorijskoj fizici posebno je interesantno antilinearno preslikavanje *charge konjugacije* koje je definisano kao

$$v \mapsto C(v) := \epsilon \overline{v}, \tag{3.14}$$

pri čemu je

$$\epsilon := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Antilinearni operator charge konjugacije (3.14) preslikava element prostor $L^2(M;\mathbb{C}^2)$ u element prostora $L^2(M;\mathbb{C}^2)$ kao i element prostora $H^1(M;\mathbb{C}^2)$ u element prostora $H^1(M;\mathbb{C}^2)$.

Primjedba 3.2.5. Interesantna osobina je da Diracov operator bez mase W komutira sa operatorom charge konjugacije, tojest

$$C(Wv) = W(C(v)). \tag{3.15}$$

- Neka je $R : M \to SU(2)$ proizvoljna glatka specijalna unitarna matrična funkcija. Uvedimo nove Paulijeve matrice

$$\widetilde{\sigma}^\alpha := R\sigma^\alpha R^* \tag{3.16}$$

i novi operator $\widetilde{W}$ koji je dobijen zamjenom matrica σ sa $\widetilde{\sigma}$ u (3.8). Tada su operatori W i $\widetilde{W}$ povezani na isti način kao Paulijeve matrice σ i $\widetilde{\sigma}$, tojest

$$\widetilde{W} := RWR^*.$$

Ako postoji glatka matrična funkcija $R : M \to SU(2)$ takva da su odgovarajuće Paulijeve matrice σ^α i $\widetilde{\sigma}^\alpha$ povezane u skladu sa (3.16), tada kažemo da su operatori W i $\widetilde{W}$ *ekvivalentni*.

Operator charge konjugacije posjeduje također dodatne interesantne osobine iskazane sljedećom lemom.

Lema 3.2.6. *Iz formula* (3.13) *i* (3.14) *slijede sljedeći identiteti:*

$$C(C(v)) = -v, \tag{3.17}$$

$$\langle v, C(v)\rangle = 0, \tag{3.18}$$

$$\langle C(v), C(w)\rangle = \langle w, v\rangle. \tag{3.19}$$

Dokaz. Neka su $v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T$ i $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}^T$ proizvoljni vektori skalarnih funkcija i

$$C(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{v_2} \\ \overline{v_1} \end{pmatrix}.$$

Tada

$$C(C(v)) = C\begin{pmatrix} -\overline{v_2} \\ \overline{v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = -v.$$

Također

$$\begin{aligned}\langle v, C(v)\rangle &= \int_M (C(v))^* v\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\ dx = \int_M \begin{pmatrix} -v_2 & v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\ dx \\ &= \int_M (-v_1 v_2 + v_1 v_2)\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\ dx = 0,\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\langle C(v), C(w)\rangle - \langle w, v\rangle &= \int_M (C(w))^* C(v)\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\ dx - \int_M (v)^* w\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}\ dx \\ &= \int_M (w_2\overline{v_2} + w_1\overline{v_1} - \overline{v_1}w_1 - \overline{v_2}w_2)dx = 0.\end{aligned}$$

Zbog toga je $\langle C(v), C(w)\rangle = \langle w, v\rangle$. □

Kao što je navedeno u [19], opravdanje za uvođenje polugustine $\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}$ u formulu (3.13) za unutrašnji proizvod leži u činjenici da Diracov operator bez mase (3.8) je operator koji djeluje na dvokolomni vektor skalarnih funkcija, tojest dvokolomni vektor veličina koje se ne mijenjaju pod promjenom lokalnih koordinata. Gustina i polugustina su definisane na sljedeći način, vidi [85].

Definicija 3.2.7. Za μ kažemo da je *gustina* ako vrijedi $\mu(x) = J(x)\widetilde{\mu}(\widetilde{x}(x))$ a *polugustina* ako vrijedi $\mu(x) = J^{1/2}(x)\widetilde{\mu}(\widetilde{x}(x))$ pri čemu je $\widetilde{\mu}$ reprezentacija od μ u koordinatama $\widetilde{x}$ i $J(x) = |\det \partial\widetilde{x}/\partial x|$.

Operator od posebnog nam interesa je *Diracov operator bez mase na polugustinama*:

Definicija 3.2.8. Diracov operator bez mase na polugustinama je operator

$$W_{1/2} := (\det g_{\kappa\lambda})^{1/4} W (\det g_{\mu\nu})^{-1/4} \tag{3.20}$$

koji preslikava polugustine u polugustine.

Primjedba 3.2.9. Diracov operator bez mase na polugustinama (3.20) je ekvivalentan Diracovom operatoru bez mase (3.8).

Domen operatora $W_{1/2}$ je prostor $H^1(M; \mathbb{C}^2)$, koji je Sobolevljev prostor dvokolomnih vektora polugustina koje su kvadratno integrabilne zajedno sa njihovim prvim izvodima.

3.3 Spektar Diracovog operatora bez mase

Sada smo zainteresovani da primijenimo rezultate iz Sekcije 3.1 za diferencijalni operator prvog reda na spektralnu analizu Diracovog operatora bez mase (3.8).

U tom cilju, možemo provjeriti koje uslove mora da zadovoljava diferencijalni operator A prvog reda da bi bio Diracov operator bez mase na polugustinama. Ti uslovi su iskazani sljedećom teoremom.

Teorema 3.3.1. *Operator A je Diracov operator bez mase na polugustinama ako i samo ako su u svakoj tački mnogostrukosti M ispunjena sljedeća dva uslova:*

- *subprincipalni simboll* (3.1) *operatora je proporcionalan identičnoj matrici;*
- *drugi asimptotski koeficijent spektralne funkcije $b(x)$ je nula.*

Za dokaz Teoreme 3.3.1, vidi [19].

Eksplicitna formula za principalni simbol Diracovog operatora bez mase na polugustinama (3.20) je

$$A_1(x,\xi) = \begin{pmatrix} {e_3}^\alpha & {e_1}^\alpha - i{e_2}^\alpha \\ {e_1}^\alpha + i{e_2}^\alpha & -{e_3}^\alpha \end{pmatrix} \xi_\alpha \tag{3.21}$$

a eksplicitna formula za subprincipalni simbol je

$$A_{\text{sub}}(x) = \frac{3}{4}(*T^{\text{ax}}(x))I, \tag{3.22}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} *T^{\text{ax}}(x) = \frac{\delta_{lk}}{3}\sqrt{\det g^{\alpha\beta}}\, \big[& {e^k}_1\, \partial {e^l}_3/\partial x^2 + {e^k}_2 \partial {e^l}_1/\partial x^3 + {e^k}_3 \partial {e^l}_2/\partial x^1 \\ & - {e^k}_1 \partial {e^l}_2/\partial x^3 - {e^k}_2 \partial {e^l}_3/\partial x^1 - {e^k}_3 \partial {e^l}_1/\partial x^2 \big] \end{aligned} \tag{3.23}$$

eksplicitna formula Hodgeovog duala aksijalnog dijela torzije, vidi Sekciju 8 u [19].

Diracov operator bez mase na polugustinama (3.20) je samoadjungovani eliptični diferencijalni operator prvog reda koji djeluje na dvokolomni vektor polugustina sa kompleksnim vrijednostima, $\det A_1(x,\xi) \neq 0$ i principalni simbol (3.21) je jasno bez traga. Zbog toga, Diracov operator bez mase zadovoljava uslove za diferencijalni operator A iz Primjedbe 3.1.3.

Prema Teoremi 3.1.7, asimptotske formule (3.4) i (3.5) za Diracov operator bez mase na polugustinama (3.20) glase

$$e(\lambda, x, x) = \frac{\sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)}}{6\pi^2}\lambda^3 + o(\lambda^2), \tag{3.24}$$

$$N(\lambda) = \frac{\text{Vol } M}{6\pi^2}\lambda^3 + o(\lambda^2), \tag{3.25}$$

pri čemu je Vol M mjera Riemannove trodimenzionalne mnogostrukosti M.

Primjedba 3.3.2. Primijetimo da je asimptotska formula za funkciju brojanja (3.25) operatora (3.20) veoma jednostavna. Asimptotski koeficijenti (3.6) su određeni samo sa mjerom Riemannove trodimenzionalne mnogostrukosti i ne ovisi o njenom obliku. Također, veoma važna činjenica jeste da je asimptotski koeficijent (3.7) jednak nuli.

Primjedba 3.3.3. Analizom formule (3.25) zaključujemo da su pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase raspoređene na isti način.

Primjedba 3.3.4. Budući da mi radimo sa Diracovim operatorom bez mase na polugustinama (3.20), u formuli (3.24) se pojavljuje izraz $\sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)}$. Naravno, za Diracov operator bez mase (3.8) spektralna funkcija je skalarno polje a formula (3.24) glasi

$$e(\lambda, x, x) = \frac{1}{6\pi^2}\lambda^3 + o(\lambda^2).$$

Primjer 3.3.5. Posmatrajmo jedinični torus $\mathbb{T}^3$ i jediničnu sferu $\mathbb{S}^3$ kao mnogostrukosti M. Budući da su Vol $\mathbb{T}^3 = (2\pi)^3$ i Vol $\mathbb{S}^3 = 2\pi^2$ funkcije brojanja (3.25) na 3-torusu i 3-sferi su respektivno date sa

$$N(\lambda) = \frac{4}{3}\pi\lambda^3 + o(\lambda^2), \tag{3.26}$$

i

$$N(\lambda) = \frac{1}{3}\lambda^3 + o(\lambda^2). \tag{3.27}$$

Funkcije brojanja (3.26) i (3.27) pokazuju da za ova dva izbora mnogostrukosti, pozitivne svojstvene vrijednosti su raspoređene na isti način kao negativne svojstvene vrijednosti.

Veza između spektra operatora i geometrije mnogostrukosti je danas stvar intenzivnog istraživanja. Veoma je teško eksplicitno odrediti spektar Diracovog operatora bez mase na proizvoljnoj mnogostrukosti M. Prema našim saznanjima, spektar Diracovog operatora bez mase je prvi put eksplicitno izračunat od strane Friedricha [35]. U istom radu je pokazana zavisnost spektra operatora od izbora spin strukture.

Za sada samo možemo analizirati funkciju brojanja (3.25) da bi vidjeli distribuciju svojstvenih vrijednosti. Postoje samo dva primjera gdje je spektar određen eksplicitno. Prvi primjer je jedinični torus $\mathbb{T}^3$ snabdjeven sa Euclidskom metrikom a drugi primjer je jedinična sfera $\mathbb{S}^3$ snabdjevena sa standardnom metrikom koja je restrikcija Euclidske metrike sa $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{S}^3$. U oba slučaja se ispostavlja da je spektar simetričan oko nule, vidi [10, 19, 93].

Spektar Diracovog operatora bez mase na jediničnom torusu $\mathbb{T}^3$ snabdjevenog sa Euclidskom metrikom je ovakav: nula je svojstvena vrijednost višestrukosti dva te za svaki $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ svojstvene vrijednosti su $\pm\|m\|$. Spektar Diracovog operatora bez mase na jediničnoj sferi $\mathbb{S}^3$ koja je snabdjevena sa sa standardnom metrikom koja je restrikcija Euclidske metrike sa $\mathbb{R}^4$ na $\mathbb{S}^3$ također može biti eksplicitno izračunat, vidi [10, 93], i svojstvene vrijednosti su $\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)$, $(k = 1, 2, \ldots)$, sa višestrukošću $k(k + 1)$.

Svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase posjeduju veoma značajnu osobinu iskazanu sa sljedećom lemom, koja je posljedica komutiranja Diracovog operatora bez mase i operatora charge konjugacije.

Lema 3.3.6. *Svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase imaju parnu višestrukost.*

Dokaz. Neka je v svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ Diracovog operatora bez mase, tojest neka je $Wv = \lambda v$. Neka je C operator charge konjugacije. Tada, prema (3.15) imamo

$$W(C(v)) = C(Wv) = C(\lambda v) = \lambda C(v),$$

tojest vektor $C(v)$ je također svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ. $\square$

Primjedba 3.3.7. Kao što je rečeno u [24], uvođenjem magnetnog polja kao što su to uradili Erdős i Solovej u [29], situacija se mijenja jer se dvostruke svojstvene vrijednosti razilaze. Ovo upućuje na činjenicu da dvostruke svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase odgovaraju dva različita spina.

Interesantan rezultat za donju procjenu svojstvene vrijednosti na zatvorenoj mnogostrukosti dat je sa tzv. *Friedrichovom nejednakošću.*

Teorema 3.3.8. *Ako je λ svojstvena vrijednost Diracovog operatora na n-dimenzionalnoj ($n \geqslant 2$) zatvorenoj mnogostrukosti (M^n, g) sa spin strukturom, tada*

$$\lambda^2 \geqslant \frac{n}{4(n-1)} \inf_M(\mathcal{R}), \tag{3.28}$$

pri čemu je $\mathcal{R}$ skalarna krivina.

Za dokaz Teoreme 3.3.8 i poboljšanja formule (3.28) vidi [36].

Prema [3, 4, 5, 6], za opštu orijentisanu Riemannovu trodimenzionalnu mnogostrukost (M, g) nema razloga da spektar Diracovog operatora bez mase bude simetričan. U ovom poglavlju razbijamo spektralnu simetriju na jediničnom torusu $\mathbb{T}^3$ kao trodimenzionalnom mnogostrukošću sa trivijalnom topologijom perturbirajući Euclidsku metriku. Ovakav postupak je korišten također u [24].

3.4 Perturbacijska teorija za Diracov operator bez mase

Jedan od načina da se razbije spektralna simetrija Diracovog operatora bez mase jeste da se koriste trivijalne metrike i mnogostrukosti sa netrivijalnom topologijom. U ovom poglavlju se korisitimo suprotnom strategijom: koristimo mnogostrukost sa trivijalnom topologijom a netrivijalnom metrikom, tojest perturbiramo Euclidsku metriku u cilju kreiranja spektrale asimetrije. U ovoj sekciji razvijamo perturbacijsku teoriju za tu svrhu.

Posmatrajmo Euclidsku metriku perturbovanu sa malim pozitivnim realnim parametrom ϵ. Zbog jednostavnosti, predstavljamo nešto drugačiji pristup uvođenju okvira i kookvira jer radimo u određenom koordinatnom sistemu, na sličan način kao što je urađeno u [24]. Za Euclidsku metriku, lahko je vidjeti da je Diracov operator bez mase (3.8) koji odgovaraja standardnoj spin strukturi dat sa

$$W = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Neka je $g_{\alpha\beta}(x;\epsilon)$ perturbovana metrika čije su komponente glatke funkcije koordinata x^α i malog pozitivnog realnog ϵ, koja zadovoljava uslov

$$g_{\alpha\beta}(x;0) = \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.30}$$

Neka su

$$h_{\alpha\beta}(x) := \left.\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \qquad k_{\alpha\beta}(x) := 4\left.\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}(x)}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0}. \tag{3.31}$$

Perturbovani kookvir je glatka matrična funkcija sa realnim vrijednostima ${e^j}_\alpha(x;\epsilon)$, $j,\alpha = 1,2,3$ koja zadovoljava uslove

$$g_{\alpha\beta}(x;\epsilon) = \delta_{jk}{e^j}_\alpha(x;\epsilon){e^k}_\beta(x;\epsilon), \tag{3.32}$$

$${e^j}_\alpha(x;0) = {\delta^j}_\alpha. \tag{3.33}$$

Razlog zašto uvodimo uslov (3.33) jeste taj što želimo da naš neperturbovani operator ima oblik (3.29). Prvi indeks j matrične funkcije ${e^j}_\alpha(x;\epsilon)$ broji vrste matrice dok drugi indeks α broji kolone matrice. Budući da radimo u određenom koordinatnom sistemu, možemo zahtijevati da koovir ${e^j}_\alpha(x;\epsilon)$ bude simetričan, tojest

$${e^j}_\alpha(x;\epsilon) = {e^\alpha}_j(x;\epsilon). \tag{3.34}$$

Uslov (3.34) će značajno da pojednostavi naša izračunavanja u vezi Diracovog operatora bez mase.

Kao što je naglašeno u [24], u tom slučaju, asimptotska formula po stepenima od ϵ subprincipalnog simbola Diracovog operatora bez mase na polugustinama (3.22) počinje sa kvadratnim članom i ima veoma jednostavnu strukturu. Za perturbovanu metriku $g_{\alpha\beta}(x;\epsilon)$ kookvir ${e^j}_\alpha(x;\epsilon)$ nije jedinstveno određen. Matričnu funkciju ${e^j}_\alpha(x;\epsilon)$ možemo množiti sa lijeve strane sa 3×3 specijalnom ortogonalnom matričnom funkcijom $O(x;\epsilon)$ koja zadovoljava uslov $O(x;0) = I$, pri čemu je I jedinična matrica trećeg reda. Novi kookvir će također da zadovoljava uslove (3.32), (3.33). Ovakav izbor kookvira ne utiče na spektar Diracovog operatora bez mase, vidi [19].

Okvir je glatka matrična funkcija sa realnim vrijednostima ${e_j}^\alpha(x;\epsilon)$ definisana sa sistemom linearnih algebarskih jednačina

$${e_j}^\alpha(x;\epsilon){e^k}_\alpha(x;\epsilon) = {\delta_j}^k. \tag{3.35}$$

Primjedba 3.4.1. U matričnoj notaciji, formula (3.35) se čita kao *okvir je transponovana matrica inverzne matrice koovira.*

Budući da biramo da je kookvir simetričan tada je i okvir simetričan također. Na osnovu formula (3.30) i (3.31) dobijamo

$$g_{\alpha\beta}(x;\epsilon) = \delta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}(x) + \frac{\epsilon^2}{4}k_{\alpha\beta}(x) + O(\epsilon^3). \tag{3.36}$$

Koristeći Taylorovou formulu za funkciju $\sqrt{1+z}$, kookvir je dat sa

$${e^j}_\alpha(x;\epsilon) = {\delta^j}_\alpha + \frac{\epsilon}{2}{h^j}_\alpha(x) - \frac{\epsilon^2}{8}{\left(h^2\right)^j}_\alpha(x) + \frac{\epsilon^2}{8}{k^j}_\alpha(x) + O(\epsilon^3). \tag{3.37}$$

Koristeći (3.37) i Taylorovu formulu za funkciju $(1+z)^{-1}$, okvir je dat sa

$$e_j{}^\alpha(x;\epsilon) = \delta_j{}^\alpha - \frac{\epsilon}{2} h_j{}^\alpha(x) + \frac{3\epsilon^2}{8} \left(h^2\right)_j{}^\alpha(x) - \frac{\epsilon^2}{8} k_j{}^\alpha(x) + O(\epsilon^3). \tag{3.38}$$

Primjedba 3.4.2. Izraz h^2 koji se pojavljuje u formulama (3.37) i (3.38) označava kvadrat perturbacijske matrice h, tojest $\left(h^2\right)_j{}^\alpha(x) = h_j{}^\beta(x) h_\beta{}^\alpha(x)$, pri čemu se sumiranje vrši po ponovljenom indeksu β.

U matricama h i k indekse dižemo i spuštamo koristeći Euclidsku metriku, što znači da dizanje i spuštanje indeksa ništa ne mijenja.

Kao što je navedeno u [24], standardnu perturbacijsku teoriju ne možemo primijeniti na Diracov operator bez mase zbog činjenice da Diracov operator bez mase komutira sa operatorom charge konjugacije, vidi Lemu 3.3.6. U ovoj sekciji prezentujemo perturbacijsku teoriju koja u obzir uzima višestrukost svojstvene vrijednosti. U prisutnosti magnetnog polja, možemo primijeniti standardnu perturbacijsku teoriju jer magnetno polje razdvaja dvostruke svojstvene vrijednosti, vidi Primjedbu 3.3.7.

Neka je $W_{1/2}(\epsilon)$ Diracov operator bez mase na polugustinama (3.20) koji odgovara perturbovanoj metrici $g_{\alpha\beta}(x;\epsilon)$. Naglašavamo da mi radije korisitimo Diracov operator bez mase na polugustinama $W_{1/2}(\epsilon)$ radije nego Diracov operator bez mase $W(\epsilon)$, iako su spektri ova dva operatora isti jer su operatori $W_{1/2}(\epsilon)$ i $W(\epsilon)$ ekvivalentni.

Neka je

$$W_{1/2}(\epsilon) = W_{1/2}^{(0)} + \epsilon W_{1/2}^{(1)} + \epsilon^2 W_{1/2}^{(2)} + \cdots \tag{3.39}$$

asimptotski razvoj po stepenima malog pozitivnog parametra ϵ Diracovog operatora bez mase. Operator $W_{1/2}^{(0)} = W_{1/2}(0)$ je neperturbovani Diracov operator na polugustinama (3.20). Označimo sa $\lambda^{(0)}$ svojstvenu vrijednost ovog operatora a sa $v^{(0)}$ odgovarajući svojstveni vektor. Svaka svojstvena vrijednost $\lambda^{(0)}$ ima parnu višestrukost jer Diracov operator bez mase komutira sa antilinearnim operatorom charge konjugacije (3.14).

Perturbacija izolovane svojstvene vrijednosti konačne višestrukosti ograni–čenog operatora je opisana od strane Rellicha [84] i tu proceduru možemo primijeniti sa nekim dodatnim uslovima.

Operatori $W_{1/2}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ su formalno samoadjungovani diferencijalni operatori prvog reda koji također komutiraju sa antilinearnim operatorom charge konjugacije (3.14). Mi pretpostavljamo da je red (3.39) konvergentan za dovoljno malo ϵ. Tada, vidi [84], postoje stepeni redovi

$$\lambda(\epsilon) = \lambda^{(0)} + \epsilon\lambda^{(1)} + \epsilon^2\lambda^{(2)} + \cdots, \tag{3.40}$$

$$v(\epsilon) = v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + \cdots. \tag{3.41}$$

koji su konvergentni za dovoljno malo ϵ, koji zadovoljavaju uslov

$$W_{1/2}(\epsilon)v(\epsilon) = \lambda(\epsilon)v(\epsilon).$$

U perturbacijskom procesu kojeg razvijamo u ovoj sekciji, mi koristimo formalno samoadjungovan linearni operator A koji komutira sa antilinearnim operatorom charge konjugacije (3.14). Takvi operatori posjeduju specijalnu osobinu iskazanu sljedećom lemom, vidi [24].

Lema 3.4.3. *Neka je $A : C^\infty(M;\mathbb{C}^2) \to C^\infty(M;\mathbb{C}^2)$ (moguće i neograničen) formalno samoadjungovan linearni operator koji komutira sa antilinearnim operatorom charge konjugacije* (3.14). *Tada sa svaki $v \in C^\infty(M;\mathbb{C}^2)$ imamo*

$$\langle Av, C(v)\rangle = 0. \tag{3.42}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo koristeći osobine (3.17)-(3.19) operatora charge konjugacije (3.14). Neka su $v, w \in C^\infty(M;\mathbb{C}^2)$ proizvoljni. Tada

$$\langle A(C(w)), C(v)\rangle = \langle C(A(w)), C(v)\rangle = \langle v, A(w)\rangle = \langle A(v), w\rangle. \tag{3.43}$$

Za $w = C(v)$ formula (3.43) glasi

$$\langle A(C(C(v))), C(v)\rangle = \langle A(v), C(v)\rangle. \tag{3.44}$$

Budući da je $C(C(v)) = -v$, formula (3.44) postaje

$$-\langle A(v), C(v)\rangle = \langle A(v), C(v)\rangle,$$

što daje (3.42). □

U ovom poglavlju ćemo koristiti *pseudoinverz* operatora kojeg ćemo definisati na sličan način kao što je to urađeno u [24, 84].

3.4.1 Konstrukcija pseudoinverza operatora

Neka je $v^{(0)}$ normalizirani svojstveni vektor operatora A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda^{(0)}$. Tada je, vidi Lemu 3.3.6, vektor $C(v^{(0)})$ također normalizirani svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda^{(0)}$.

Slično kao što je urađeno u [24], posmatrajmo problem

$$\left(A - \lambda^{(0)}\right) v = f, \tag{3.45}$$

za datu funkciju $f \in L^2(M;\mathbb{C}^2)$ gdje trebamo odrediti funkciju $v \in H^1(M;\mathbb{C}^2)$. Pretpostavimo da funkcija f zadovoljava uslove

$$\langle f, v^{(0)}\rangle = \langle f, C(v^{(0)})\rangle = 0,$$

pri čemu je C operator charge konjugacije (3.14). Problem (3.45) se može riješiti za funkciju v a jedinstvenost ove funkcije se postiže sa uslovima

$$\langle v, v^{(0)} \rangle = \langle v, C(v^{(0)}) \rangle = 0.$$

Definišimo operator Q kao

$$Q : f \mapsto v.$$

Operator Q je linearni operator koji djeluje na ortogonalni komplement svojstvenog prostora operatora A koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda^{(0)}$. Također, ograničeni linearni operator Q je samoadjungovan i komutira sa antilinearnim operatorom charge konjugacije (3.14). Djelovanje operatora Q možemo da proširimo na cijeli Hilbertov prostor $L^2(M; \mathbb{C}^2)$ u skladu sa $Qv^{(0)} = QC(v^{(0)}) = 0$.

Sada ćemo objasniti konstrukciju operatora Q na način kao što je urađeno u [84]. Neka je λ svojstvena vrijednost višestrukosti k Hemitskog operatora A. Tada homogena jednačina

$$(A - \lambda^{(0)})v = 0$$

ima k linearno nezavisnih rješenja $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \ldots, \phi^{(k)}$ za koje možemo pretpostaviti da su ortonormalni, tojest

$$\langle \phi^{(i)}, \phi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Operator $A - \lambda^{(0)}$ nema inverznog operatora, ali kao što je naglešeno u [84], postoji jedinstveni linearni Hermitski operator Q takav da je $Q\phi^{(i)} = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ i

$$Q(A - \lambda^{(0)})u = u - \sum_{i=1}^{k} \langle \phi^{(i)}, u \rangle \phi^{(i)}.$$

Definišimo operator projektovanja P sa

$$Pu = \sum_{i=1}^{k} \langle \phi^{(i)}, u \rangle \phi^{(i)}. \tag{3.46}$$

Tada, gornje osobine operatora Q mogu biti zapisane kao $QP = 0$ i kao $Q(A - \lambda^{(0)}) = I - P$.

Operator Q se naziva pseudoinverz operatora $A - \lambda$.

Sada možemo kompletirati svojstvene vektore $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \ldots, \phi^{(k)}$ sa svojstvenim vektorima $\phi^{(k+1)}, \phi^{(k+2)}, \ldots, \phi^{(n)}$, koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n$, respektivno, tako da

$$\langle \phi^{(i)}, \phi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Zapisujući v i f kao

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi^{(i)}, v \rangle \phi^{(i)}, \quad f = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi^{(i)}, f \rangle \phi^{(i)},$$

iz (3.45) dobijamo

$$\begin{aligned} &\langle \phi^{(i)}, f \rangle = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ &\langle \phi^{(i)}, f \rangle = (\lambda_i - \lambda) \langle \phi^{(i)}, v \rangle, \quad (i = k+1, k+2, \dots, n). \end{aligned}$$

Ako jednačina ima rješenje po v, tada je funkcija f ortogonalna na sva rješenja homogene jednačine. Zbog toga stavljamo

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i \phi^{(i)} + \sum_{\lambda_i \neq \lambda} \frac{\langle \phi^{(i)}, f \rangle}{\lambda_i - \lambda} \phi^{(i)},$$

gdje su v_i proizvoljne konstante. Vektor v definiše kompletno rješenje jednačine.

Neka je P operator projektovanja u prostor razapet sa vektorima $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(k)}$, i P_i operator projektovanja u jednodimenzionalni prostor razapet sa $\phi^{(i)}$, $(i = k+1, k+2, \dots, n)$.

Definicija 3.4.4. Operator

$$Q = \sum_{\lambda_i \neq \lambda^{(0)}} \frac{P_i}{\lambda_i - \lambda^{(0)}} \tag{3.47}$$

je *pseudoinvez* operatora $A - \lambda^{(0)}$.

3.4.2 Eksplicitne formule za asimptotske koeficijente

Sada ćemo izvesti eksplicitne formule za koeficijente $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$ u asimptotskom razvoju (3.40). Posmatrajmo perturbovani problem svojstvenih vrijednosti

$$W_{1/2}(\epsilon) v(\epsilon) = \lambda(\epsilon) v(\epsilon).$$

Koristeći (3.39), (3.40) i (3.41), dobijamo

$$\begin{aligned} &(W_{1/2}^{(0)} + \epsilon W_{1/2}^{(1)} + \epsilon^2 W_{1/2}^{(2)} + \cdots)(v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + \cdots) \\ &\quad = (\lambda^{(0)} + \epsilon \lambda^{(1)} + \epsilon^2 \lambda^{(2)} + \cdots)(v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + \cdots). \end{aligned}$$

Grupišući elemente koji ne sadrže ϵ, dobijamo

$$W_{1/2}^{(0)} v^{(0)} = \lambda^{(0)} v^{(0)},$$

što je neperturbovani problem svojstvenih vrijednosti. Grupišući elemente koji sadrže ϵ, dobijamo

$$W_{1/2}^{(0)} v^{(1)} + W_{1/2}^{(1)} v^{(0)} = \lambda^{(0)} v^{(1)} + \lambda^{(1)} v^{(0)}$$

odakle je $(W_{1/2}^{(0)} - \lambda^{(0)}) v^{(1)} = (\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) v^{(0)}$, tojest $v^{(1)} = Q(\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) v^{(0)}$ pri čemu je Q pseudoinverz operatora $W_{1/2}^{(0)} - \lambda^{(0)}$. Označimo sa

$$f^{(1)} = (\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) v^{(0)}. \tag{3.48}$$

Grupišući elemente koji sadrže ϵ^2, dobijamo

$$W_{1/2}^{(0)} v^{(2)} + W_{1/2}^{(1)} v^{(1)} + W_{1/2}^{(2)} v^{(0)} = \lambda^{(0)} v^{(2)} + \lambda^{(1)} v^{(1)} + \lambda^{(2)} v^{(0)}$$

odakle je

$$(W_{1/2}^{(0)} - \lambda^{(0)}) v^{(2)} = (\lambda^{(2)} - W_{1/2}^{(2)}) v^{(0)} + (\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) v^{(1)}.$$

Označimo sa

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= (\lambda^{(2)} - W_{1/2}^{(2)}) v^{(0)} + (\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) v^{(1)} \\ &= (\lambda^{(2)} - W_{1/2}^{(2)}) v^{(0)} + (\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) Q(\lambda^{(1)} - W_{1/2}^{(1)}) v^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Nastavljajući ovaj proces, vektore $f^{(k)}$ i koeficijente $\lambda^{(k)}$ dobijamo iz uslova

$$\langle f^{(k)}, v^{(0)} \rangle = 0 \tag{3.50}$$

i

$$\langle f^{(k)}, C(v^{(0)}) \rangle = 0. \tag{3.51}$$

Primjedba 3.4.5. Svojstvene vrijednosti imaju parnu višestrukost pa uslov (3.51) je dodatni uslov koji mora biti zadovoljen. U ovom dijelu se naš perturbacijski proces razdvaja od standardnog perturbacijskog procesa za jedinstvenu svojstvenu vrijednost.

Komponente $v^{(k)}$ su date sa

$$v^{(k)} = Q f^{(k)},$$

pri čemu je Q psudoinverz operatora $W_{1/2}^{(0)} - \lambda^{(0)}$. Zamjenom (3.48), (3.49) u (3.50), (3.51) dobijamo rezultat iskazan sa sljedećom lemom.

Lema 3.4.6. *Eksplicitne formule za koeficijente $\lambda^{(1)}$ and $\lambda^{(2)}$ u asimptotskom razvoju svojstvene vrijednosti $\lambda(\epsilon)$ su date sa*

$$\lambda^{(1)} = \langle W_{1/2}^{(1)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle, \tag{3.52}$$

$$\lambda^{(2)} = \langle W_{1/2}^{(2)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle - \langle (W_{1/2}^{(1)} - \lambda^{(1)}) Q (W_{1/2}^{(1)} - \lambda^{(1)}) v^{(0)}, v^{(0)} \rangle. \tag{3.53}$$

pri čemu je $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ unutrašnji proizvod definisan sa (3.13).

3.5 Spektralna asimetrija Diracovog operatora bez mase na 3-torusu

U ovoj sekciji želimo da primijenimo rezultate i pristup iz prethodnih sekcija ovog poglavlja da bi dobili i demonstrirali spektralnu asimetriju Diracovog operatora bez mase (3.8) na određenoj mnogostrukosti. Posmatrajmo jedinični torus $\mathbb{T}^3$ parametrizovan sa cikličnim koordinatama x^α, $\alpha = 1, 2, 3$ perioda 2π. Za Euclidsku metriku, Diracov operator bez mase koji odgovara standardnoj spin strukturi je dat formulom (3.29) i svojstvene vrijednosti mu mogu biti izračunate eksplicitno. Spektar je simetričan oko nule i nula je svojstvena vrijednost operatora. Ali, kao što smo to ranije naglasili, prema [3, 4, 5, 6], za opštu orijentisanu Riemannovu trodimenzionalnu mnogostrukost (M, g) nema opravdnaja da spektar Diracovog operatora bez mase (3.8) bude simetričan.

Spektralnu asimetriju Diracovog operatora bez mase na jediničnom torusu $\mathbb{T}^3$ dobijamo perturbirajući Euclidsku metriku, kao što je opisano u Sekciji 3.4. Perturbujući metriku dobijamo perturbovanu kookvir (3.37) i okvir (3.38), a time i Diracov operator bez mase na polugustinama (3.20) je perturbovan. Naš cilj jeste da ispitujemo pod kojim perturbacijama Euclidske metrike je spektralna simetrija ovog operatora razbijena.

Definicija 3.5.1. Za datu funkciju $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{C}$, označavamo sa

$$\widehat{f}(m) := \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} e^{-\mathrm{i} m_\alpha x^\alpha} f(x) dx, \quad m \in \mathbb{Z}^3, \tag{3.54}$$

njene Fourierove koeficijente, pri čemu je $dx := dx^1 dx^2 dx^3$.

Primjedba 3.5.2. Važan specijalan slučaj kojeg ćemo posmatrati jeste kada je metrika funkcija samo od koordinate x^1. U tom slučaju možemo izabrati kookvir i okvir takve da ovise također samo o koordinati x^1 i svojstvene funkcije tražiti u obliku $v(x^1)$. Ovaj slučaj nazivamo *aksisimetrični slučaj.* U ovim postavkama glavni problem svojstvenih vrijednosti parcijalnog diferencijalnog operatora se reducira na svojstveni problem običnog diferencijalnog operatora.

Primjedba 3.5.3. Za Euclidsku metriku Diracov operator bez mase (3.29) koji odgovara standardnoj spin strukturi u aksisimetričnom sličaju je

$$W = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx^1} \\ \frac{d}{dx^1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Diferencijalni operator A prvog reda je u potpunosti određen sa svojim principalnim i subprincipalnim simbolom, vidi Definiciju 3.1.1 i Definiciju 3.1.2. Principalni simbol ima oblik $A_1(x,\xi) := M^{(\alpha)}(x)\xi_\alpha$ pri čemu su $M^{(\alpha)}(x)$ matrične funkcije koji ovise samo od x a diferencijalni operator A je dat sa

$$A = -\frac{\mathrm{i}}{2}M^{(\alpha)}(x)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}M^{(\alpha)}(x) + A_{\mathrm{sub}}. \tag{3.56}$$

Posmatrajmo sada aksisimetrični slučaj, vidi Primjedbu 3.5.2. Za $\alpha = 1$ u (3.56), koristeći formule za principalni simbol (3.21) i subprincipalni simbol (3.22), direktno dobijamo eksplicitnu formulu za Diracov operator bez mase na polugustinama po elemntima kookvira i okvira

$$\begin{aligned} W_{1/2}(\epsilon) = &-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} {e_3}^1 & {e_1}^1 - \mathrm{i}{e_2}^1 \\ {e_1}^1 + \mathrm{i}{e_2}^1 & -{e_3}^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\ &-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {e_3}^1 & {e_1}^1 - \mathrm{i}{e_2}^1 \\ {e_1}^1 + \mathrm{i}{e_2}^1 & -{e_3}^1 \end{pmatrix} \\ &+\frac{\delta_{jk}}{4\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}}\left({e^j}_3\left(\frac{d{e^k}_2}{dx^1}\right) - {e^j}_2\left(\frac{d{e^k}_3}{dx^1}\right)\right)I, \end{aligned} \tag{3.57}$$

koji odgovara perturbovanoj metrici $g(x^1,\epsilon)$, pri čemu su I 2×2 jedinična matrica i

$$\sqrt{\det g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{\det g^{\alpha\beta}}} = \det {e^j}_\alpha = \frac{1}{\det {e_j}^\alpha}.$$

Kookvir ${e^j}_\alpha(x^1;\epsilon)$ i okvir ${e_j}^\alpha(x^1;\epsilon)$ su definisani u skladu sa (3.37) i (3.38), respektivno.

Za svojstvenu vrijednost $n \in \mathbb{Z}$ odgovarajući normalizovani svojstveni vektor Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.55) je

$$v_n(x^1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}nx^1}. \tag{3.58}$$

Budući da su svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase u aksisimetrčnom slučaju višestrukosti dva, vidi Lemu 3.3.6, tada je i vektor

$$w_n(x^1) = C(v_n(x^1)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}nx^1} \tag{3.59}$$

također normalizovani svojstveni vektor operatora (3.55) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$, pri čemu je C operator charge konjugacije (3.14).

Za svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$ Diracovog operatora bez mase na polugustinama u opštem slučaju asimptotsku formulu (3.40) su odredili Downes, Levitin i Vassiliev u [24], pri čemu su posmatrali perturbacije metrike (3.36) sa

$k_{\alpha\beta}(x) = 0$. Pokazano je da je linearni koeficijent $\lambda^{(1)}$ jednak nuli i određena je eksplicitna formula za kvadratni koeficijent $\lambda^{(2)}$. Formula za kvadratni koeficijent $\lambda^{(2)}$ izražena preko komponenti perturbacijske matrice $h_{\alpha\beta}(x)$ je data sa

$$\lambda^{(2)} = \frac{\mathrm{i}}{16}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sum_{m\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{m_\mu m_\nu}{\|m\|^2}\right) m_\alpha \widehat{h}_{\beta\mu}(m)\overline{\widehat{h}_{\gamma\nu}(m)}, \tag{3.60}$$

pri čemu je $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ totalno antisimetrična veličina, $\varepsilon_{123} := +1$, a crta iznad označava kompleksnu konjugaciju.

U aksisimetričnom slučaju, vidi Primjedbu 3.5.2, formula (3.60) je nešto jednostavnija i glasi

$$\lambda^{(2)} = -\frac{1}{8}\sum_{m_1\in\mathbb{N}} m_1 \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \widehat{h}_{22} & \widehat{h}_{23} \\ \widehat{h}_{32} & \widehat{h}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{h}_{22} & \widehat{h}_{23} \\ \widehat{h}_{32} & \widehat{h}_{33} \end{pmatrix}^*\right),$$

pri čemu je $\widehat{h}_{\alpha\beta} = \widehat{h}_{\alpha\beta}(m_1)$ i '$*$' označava Hermitsku konjugaciju.

U [24] autori su također odredili uslove pod kojima je konstanta $\lambda^{(2)}$ različita od nula, što nam govori da je za dovoljno mali parametar ϵ spektar Diracovog operatora bez mase asimetričan. Također, autori daju dva eksplicitna primjera perturbovane Euclidske metrike za koje se svojstvene vrijednosti Diracovog operatora bez mase na polugustinama u aksisimetričnom slučaju mogu eksplicitno izračunati. Jedan primjer je kvadratne zavisnosti dok je drugi primjer kvartične zavisnosti od parametra ϵ.

U ovom poglavlju mi ćemo imati sličan pristup kao u [24], ali veoma bitno za naglasiti je da mi posmatramo svojstvene vijednosti ± 1 Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.57) i za perturbovanu Euclidsku metriku (3.36) izvodimo njihove asimptotske formule tipa (3.40), tojest tražimo perturbacije Euclidske metrike za koje je moguće pomjeriti svojstvene vrijednosti ± 1 na asimetričan način.

3.5.1 Numerička analiza spektra

U ovoj sekciji numerički analiziramo spektar Diracovog operatora bez mase (3.55) koristeći *Galerkonov metod* da bi diskretizirali problem svojstvenih vrijedosti Diracovog operatora bez mase. Posmatramo jedinični torus $\mathbb{T}^3$ snabdjeven sa Euclidskom metrikom. Tada, za standardnu spin strukturu, spektar Diracovog operatora bez mase (3.55) se može eksplicitno izračunati.

Posmatajmo $2m+1$ svojstvenih vrijednosti $\lambda_i = i, \quad (i = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$ neperturbovanog Diracovog operatora bez mase na polugustinama $W_{1/2}(0)$. Svaka svojstvena vrijednost λ_i $(i = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$ ima višestukost dva i svojstveni vektori $v_i(x^1)$ i $w_i(x^1)$ $(i = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$ su dati sa (3.58) and (3.59). Sada imamo

$$W_{1/2}(0)v_i(x^1) = \lambda_i v_i(x^1), \tag{3.61}$$
$$W_{1/2}(0)w_i(x^1) = \lambda_i w_i(x^1), \tag{3.62}$$

pri čemu $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$. Svojstveni vektori $v_i(x^1)$ i $w_i(x^1)$ su ortonormalni u odnosu na unutrašnji proizvod (3.13), tojest

$$\begin{aligned} &\langle v_i, v_j\rangle = \langle w_i, w_j\rangle = \delta_{ij}, \\ &\langle v_i, w_j\rangle = \langle w_i, v_j\rangle = 0, \ (i,j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Prema (3.63), iz (3.61) i (3.62), za $i, j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$ imamo

$$\lambda_i = \langle W_{1/2}(0)v_i(x^1), v_i(x^1)\rangle = \langle W_{1/2}(0)w_i(x^1), w_i(x^1)\rangle$$

i

$$\begin{aligned} \langle W_{1/2}(0)v_i(x^1), w_j(x^1)\rangle = \langle W_{1/2}(0)v_j(x^1), w_i(x^1)\rangle = 0, \\ \langle W_{1/2}(0)w_i(x^1), v_j(x^1)\rangle = \langle W_{1/2}(0)w_j(x^1), v_i(x^1)\rangle = 0. \end{aligned}$$

Konstruišimo sada matrice

$$H_{i,j} := \begin{pmatrix} \langle W_{1/2}(0)v_i, v_j\rangle & \langle W_{1/2}(0)v_i, w_j\rangle \\ \langle W_{1/2}(0)w_i, v_j\rangle & \langle W_{1/2}(0)w_i, w_j\rangle \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

pri čemu $i, j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$. Koristeći matrice (3.64) konstruišimo blok matricu H na sljedeći način

$$H := \begin{pmatrix} H_{-m,m} & & & H_{0,m} & & & H_{m,m} \\ & \ddots & & \vdots & & \iddots & \\ & & & H_{0,1} & & & \\ & \cdots & H_{-1,0} & H_{0,0} & H_{1,0} & \cdots & \\ & & & H_{0,-1} & & & \\ & \iddots & & \vdots & & \ddots & \\ H_{-m,-m} & & & H_{0,-m} & & & H_{m,-m} \end{pmatrix}.$$

Matrica H je kvadratna matrica reda $2(2m+1)$ i po konstrukciji ona je Hermitska matica.

Svojstvene vrijednosti matrice H su $\lambda = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$ i svaka svojstvena vrijednost ima višestrukost dva. To znači da smo problem (3.61)-(3.62) reducirali na problem svojstvenih vrijedosti matrice H koristeći Galerkinov metod.

Posmatrajmo sada matricu $H(\epsilon)$ sa perturbovanim Diracovim operatorom $W_{1/2}(\epsilon)$ umjesto neperturbovanog operatora $W_{1/2}(0)$. Tada je matrica $H(\epsilon)$ Hermitska matrica čiji članovi ovise o realnom parametru ϵ i $H(0) = H$. Koristeći perturbacijski proces opisan od strane McCartina [61] za perturbovanu Hermitsku matricu, možemo dobiti asimptotske formule za svojstvene vrijednosti matrice $H(\epsilon)$, te specijalno i asimptoske formule za svojstvene vrijednosti $\lambda = \pm 1$. Jasno, svojstvene vrijednosti matrice $H(\epsilon)$ konvergiraju ka svojstvenim vrijednostima matrice H kad $\epsilon \to 0$.

Primjedba 3.5.4. Kroz ovo poglavlje sa $\lambda_+(\epsilon)$ i $\lambda_-(\epsilon)$ označavamo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti $\lambda = 1$ i $\lambda = -1$, respektivno, te sa $\lambda_+^{(i)}$ i $\lambda_-^{(i)}$ njihove asimptotske koeficijente.

Ovim smo ispitivanje spektra perturbovanog Dircovog operatora bez mase sveli na ispitivanje spektra Hermitske matrice $H(\epsilon)$.

Primjer 3.5.5. Posmatrajmo kookvir

$$e^j{}_\alpha = \delta^j{}_\alpha + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ 0 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}. \tag{3.65}$$

Eksplicitna formula za perturbovani Diracov operator za kookvir (3.65) je određena u [24] i glasi

$$W(\epsilon) = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} - \frac{\epsilon^2}{2(1-\epsilon^2)} I. \tag{3.66}$$

Svojstvene vrijednosti operatora (3.66) su eksplicitno date sa

$$\lambda_n(\epsilon) = n - \frac{\epsilon^2}{2(1-\epsilon^2)} = n - \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{2} + O(\epsilon^6), \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.67}$$

i sve svojstvene vrijednosti imaju višestrukost dva.

Sada ćemo koristiti kookvir (3.65) da bi analizirali spektar Diracovog operatora bez mase koristeći Galerkinov metod opisan na početku ove sekcije da bi ove rezultate potvrdili i numeričkim putem. Eksplicitno smo konstruisali matricu $H(\epsilon)$ reda 102×102 i numerički analizirali dio njenog spektra. Svojstvene vrijednosti $0, \pm 1, \pm 2$ matrice $H(\epsilon)$ su perturbovane na sljedeći način

	$\lambda = -2$	$\lambda = -1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$
za $\epsilon = 0.2$	-2.02083	-1.02083	-0.0208333	0.979167	1.97917
za $\epsilon = 0.1$	-2.00505	-1.00505	-0.00505051	0.994949	1.994950
za$\epsilon = 0.01$	-2.00005	-1.00005	-0.000050005	0.99995	1.99995

i svaka svojstvena vrijednost ima višestrukost dva. Analizom podataka datih u gornjoj tabeli vidimo da je za ovaj izbor kookvira spektralna simetrija matrice $H(\epsilon)$ razbijena te posljedično smo dobili i spektralnu asimetriju Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju.

Koristeći perturbacijski proces za matrice sa dvostrukim svojstvenim vrijednostima opisan u [61], dobijamo da su asimptotske formule svojstvenih vrijednosti ± 1 date sa

$$\begin{aligned}\lambda_+(\epsilon) &= 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3),\\ \lambda_-(\epsilon) &= -1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3).\end{aligned}$$

što je u skladu sa formulom (3.67).

Sada ćemo posmatrati kookvir koji nije simetričan da bi pokazali da je i u tom slučaju moguće dobiti spektralnu asimetriju.

Primjer 3.5.6. Posmatrajmo kookvir

$$e^j{}_\alpha = \delta^j{}_\alpha + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & \cos x^1 - \cos 2x^1 + \cos 3x^1 & \sin x^1 + \sin 2x^1 - \sin 3x^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analizom spektra matrice $H(\epsilon)$ reda 102×102 dobijamo da su svojstvene vrijednosti $0, \pm 1, \pm 2$ matrice perturbovane na sljedeći način

	$\lambda = -2$	$\lambda = -1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$
za $\epsilon = 0.2$	-2.10913	-1.05372	0.00169489	1.0571	2.11252
za $\epsilon = 0.1$	-2.02923	-1.01456	0.000119453	1.0148	2.02947
za $\epsilon = 0.01$	-2.0003	-1.00015	1.24941×10^{-8}	1.00015	2.0003

i svaka svojstvena vrijednost ima višestrukost dva. Analizom podataka u gornjoj tabeli zaključujemo da je spektralna simetrija razbijena.

Koristeći metod opisan u [61], dobijamo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti ± 1 date sa

$$\begin{aligned}\lambda_+(\epsilon) &= 1 + \frac{3}{2}\epsilon^2 - \frac{17}{8}\epsilon^4 + O(\epsilon^5),\\ \lambda_-(\epsilon) &= -1 - \frac{3}{2}\epsilon^2 + \frac{37}{8}\epsilon^4 + O(\epsilon^5),\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je spektralna simetrija postignuta na kvartičnom članu.

3.5.2 Analitičke formule za perturbovane svojstvene vrijednosti

Numerička analiza spektra Diracovog operatora bez mase pokazuje da je za odgovarajući izbor kookvira moguće dobiti spektralnu asimetriju. Sada tu tvrdnju želimo dokazati i analitičkim putem te zbog toga izvodimo eksplicitne analitičke formule (3.40) za svojstvene vrijednosti ± 1 za proizvoljnu perturbaciju Euclidske metrike. Glavni rezultat ove sekcije je

Teorema 3.5.7. *Za proizvoljnu perturbaciju metrike* (3.36)*, imamo*

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 + \lambda_+^{(1)}\epsilon + \lambda_+^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad \text{as} \quad \epsilon \to 0, \tag{3.68}$$

$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \lambda_-^{(1)}\epsilon + \lambda_-^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad \text{as} \quad \epsilon \to 0, \tag{3.69}$$

pri čemu su konstante $\lambda_+^{(1)}$, $\lambda_-^{(1)}$, $\lambda_+^{(2)}$ *i* $\lambda_-^{(2)}$ *date sa formulama*

$$\lambda_+^{(1)} = -\frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0), \tag{3.70}$$

$$\lambda_-^{(1)} = \frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0), \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_+^{(2)} = {} & \frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) - \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{\mathrm{i}}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m) \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}(m+1)^2\ \widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)} \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{31}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right) \\
& - \frac{\mathrm{i}}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{21}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right),
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_-^{(2)} = {} & -\frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) + \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{\mathrm{i}}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m) \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{1}{m+1}(m-1)^2\ \widehat{h}_{11}(m+1)\overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} \\
& - \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{31}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right) \\
& - \frac{\mathrm{i}}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{21}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right),
\end{aligned} \tag{3.73}$$

gdje je $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ totalno antisimetrična veličina, $\varepsilon_{123} := +1$, a crta iznad označava kompleksnu konjugaciju.

Primjedba 3.5.8. Mi posmatramo Diracov operator bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.57), te zbog toga metrika $g_{\alpha\beta}$ ovisi samo o koordinati x^1 te za datu funkcije h_{ij}, njeni Fourierovi koeficijenti koji se pojavljuju u Teoremi 3.5.7 su dati sa

$$\widehat{h_{ij}}(m_1) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im_1x^1} h_{ij}(x^1)dx^1, \quad m_1 \in \mathbb{Z}. \tag{3.74}$$

Teorem 3.5.7 daje sljedeće činjence.

Primjedba 3.5.9. Na osnovu (3.70) i (3.71), imamo

$$\lambda_+^{(1)} + \lambda_-^{(1)} = 0,$$

odakle zaključujemo da spektralnu asimetriju ne možemo dobiti na linearnom članu.

Primjedba 3.5.10. Dužina luka x^1 kružnice je data sa

$$l(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}(x^1)}dx^1 = 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0)\epsilon\right) + O(\epsilon^2).$$

Prema tome koeficijenti $\lambda_+^{(1)}$ i $\lambda_-^{(1)}$ su određeni sa promjenom dužine luka x^1 kružnice.

Primjedba 3.5.11. Na osnovu (3.72) i (3.73), dobijamo

$$\begin{aligned}
\lambda_+^{(2)} + \lambda_-^{(2)} &= -\frac{\mathrm{i}}{8}\varepsilon_{\beta\gamma1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m)\\
&- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}(m+1)^2\, \widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)}\\
&- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{31}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right)\\
&- \frac{i}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{21}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right)\\
&- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{1}{m+1}(m-1)^2\, \widehat{h}_{11}(m+1)\overline{\widehat{h}_{11}(m+1)}\\
&- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{31}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right)\\
&- \frac{i}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{21}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - \mathrm{i}\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right).
\end{aligned}$$

Odavdje zaključujemo da je jedan način da dobijemo spektralnu asimetriju da izaberemo perturbacijsku matricu $h_{\alpha\beta}(x^1)$ takvu da je $\widehat{h}_{11}(m) = \widehat{h}_{21}(m) = \widehat{h}_{31}(m) = 0$ za sve $m \in \mathbb{Z}$ i da je

$$\varepsilon_{\beta\gamma 1} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m) \neq 0.$$

U tom slučaju imamo $\lambda_+^{(2)} + \lambda_-^{(2)} \neq 0$.

Dokaz Teoreme 3.5.7. Da bi dokazali Teoremu 3.5.7 prvo moramo eksplicitno zapisati diferencijalne operatore $W_{1/2}^{(1)}$ i $W_{1/2}^{(2)}$ koji se pojavljuju u asimptotskom razvoju perturbovanog Diracovog operaora na polugustinama

$$W_{1/2}(\epsilon) = W_{1/2}^{(0)} + \epsilon W_{1/2}^{(1)} + \epsilon^2 W_{1/2}^{(2)} + O(\epsilon^3).$$

Zamjenom (3.37) i (3.38) u (3.57), dobijamo

$$\begin{aligned} W_{1/2}^{(1)} = &\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} {h_3}^1 & {h_1}^1 - \mathrm{i}{h_2}^1 \\ {h_1}^1 + \mathrm{i}{h_2}^1 & -{h_3}^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {h_3}^1 & {h_1}^1 - \mathrm{i}{h_2}^1 \\ {h_1}^1 + \mathrm{i}{h_2}^1 & -{h_3}^1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.75}$$

i

$$\begin{aligned} W_{1/2}^{(2)} = &-\frac{3\mathrm{i}}{16}\begin{pmatrix} {(h^2)_3}^1 & {(h^2)_1}^1 - \mathrm{i}\,{(h^2)_2}^1 \\ {(h^2)_1}^1 + \mathrm{i}\,{(h^2)_2}^1 & -\,{(h^2)_3}^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\ &- \frac{3\mathrm{i}}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {(h^2)_3}^1 & {(h^2)_1}^1 - \mathrm{i}\,{(h^2)_2}^1 \\ {(h^2)_1}^1 + \mathrm{i}\,{(h^2)_2}^1 & -\,{(h^2)_3}^1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{16}\begin{pmatrix} {k_3}^1 & {k_1}^1 - \mathrm{i}{k_2}^1 \\ {k_1}^1 + \mathrm{i}{k_2}^1 & -{k_3}^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {k_3}^1 & {k_1}^1 - \mathrm{i}{k_2}^1 \\ {k_1}^1 + \mathrm{i}{k_2}^1 & -{k_3}^1 \end{pmatrix} - \frac{1}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}h_{\alpha\beta}\frac{dh_{\alpha\gamma}}{dx^1}I. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Eksplicitne formule za koeficijente $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$ su date sa (3.52) i (3.53).

Posmatrajmo sada svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$ Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.57). Normalizirani svojstveni vektor $v^{(0)}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda^{(0)} = 1$ je dat sa

$$v^{(0)}(x^1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix^1}. \tag{3.77}$$

Naravno, vektor

$$w^{(0)}(x^1) = C(v^{(0)}(x^1)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix^1}$$

je također svojstveni vektor Diracovog operarora bez mase koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $n \in \mathbb{Z}$, pri čemu je C operator charge konjugacije (3.14), vidi formule (3.58) i (3.59). Mi ćemo izračunati koeficijente $\lambda_+^{(1)}$ i $\lambda_+^{(2)}$ za svojstveni vektor $v^{(0)}(x^1)$. Rezultat će biti isti ako izaberemo vektor $w^{(0)}(x^1)$.

Koristeći formule (3.52), (3.75) za svojstveni vektor (3.77) te korištenjem parcijalne integracije, dobijamo

$$\lambda_+^{(1)} = \langle W_{1/2}^{(1)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle = -\frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0),$$

vidi Dodatak D za detaljan račun.

Zbog jednostavnosti i čitljivosti, koeficijent $\lambda_+^{(2)}$ ćemo izračunati u nekoliko koraka, vidi (3.53). Prvo ćemo izračunati dio $\langle W_{1/2}^{(2)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle$. Koristeći (3.76), za svojstveni vektor (3.77) dobijamo

$$\langle W_{1/2}^{(2)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle = \frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) - \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{\mathrm{i}}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} m \overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)} \widehat{h}_{\alpha\gamma}(m).$$

Da bi izračunali dio $\langle (W_{1/2}^{(1)} - \lambda^{(1)}) Q (W_{1/2}^{(1)} - \lambda^{(1)}) v^{(0)}, v^{(0)} \rangle$ potreban nam je pseudoinverzni operator Q. Konstrukcija pseudoinverznog operatora je objašnjena u Sekciji 3.4.1. Za svojstvene vektore (3.58) i (3.59) operator projektovanja (3.46) je dat sa

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Bigg[& \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imx^1} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} (\,\cdot\,) e^{-imy^1} dy^1 \\ & + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-imx^1} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} (\,\cdot\,) e^{imy^1} dy^1 \Bigg] \end{aligned}$$

odakle je koristeći (3.47), eksplicitna formula za pseudoinverz Q operatora $W_{1/2}(0) - I$ data sa

$$\begin{aligned} Q = \frac{1}{4\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \Bigg[& e^{imx^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{-imy^1} (\,\cdot\,) dy^1 \\ & + e^{-imx^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{imy^1} (\,\cdot\,) dy^1 \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Dalje, koristeći (3.78), dug ali jednostavan račun daje

$$\langle (W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)})Q(W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)})v^{(0)}, v^{(0)}\rangle =$$
$$\frac{1}{16} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}(m+1)^2\, \widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)} +$$
$$\frac{1}{16} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\, \left(\widehat{h}_{31}(m+1) + i\widehat{h}_{21}(m+1)\right) \left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right),$$

čime smo konačno dobili formulu (3.72).

Procedura izvođenja formula (3.71) i (3.73) je analogna izvođenju formula (3.70) i (3.72). Jednina razlika je u tome što u računu koristimo svojstveni vektor

$$v^{(0)}(x^1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix^1}. \tag{3.79}$$

koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = -1$ i formulu za pseudoinverz Q operatora $W_{1/2}(0) + I$ datu sa

$$Q = \frac{1}{4\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{1}{m+1} \Bigg[e^{imx^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{-imy^1}(\,\cdot\,)dy^1$$
$$+ e^{-imx^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \int_0^{2\pi} e^{imy^1}(\,\cdot\,)dy^1 \Bigg]. \tag{3.80}$$

Koristeći formule (3.52), (3.75) za svojstveni vektor (3.79) te koristeći parcijalnu integraciju, dobijamo

$$\lambda^{(1)}_{-} = \langle W^{(1)}_{1/2} v^{(0)}, v^{(0)}\rangle = \frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0).$$

Dakle

$$\langle W^{(2)}_{1/2} v^{(0)}, v^{(0)}\rangle = -\frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) + \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m)$$

i

$$\langle (W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)})Q(W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)})v^{(0)}, v^{(0)}\rangle =$$
$$\frac{1}{16} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{1}{m+1}(m-1)^2\, \widehat{h}_{11}(m+1)\overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} +$$
$$\frac{1}{16} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\, \left(\widehat{h}_{31}(m-1) + i\widehat{h}_{21}(m-1)\right) \left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right).$$

Koristeći gornje rezultate dobijamo formulu (3.73). □

3.5.3 Eksplicitni primjeri spektralne asimetrije

U ovoj sekciji predstavljamo dva eksplicitna primjera perturbacijskih matrica za koje Diracov operator bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.57) ima asimetričan spektar. Također su izvedene i eksplicitne formule za Diracov operator bez mase za dva različita kookvira.

Asimptotske formule za svojstvene vrijednosti ± 1 su izvedene na dva različita načina, time potvrđujući naše nove rezultate za asimptotske koeficijente iz Teoreme 3.5.7. Prvo izvodimo asimptotske koeficijente svojstvenih vrijednosti ± 1 Diracovog operatora bez mase u aksisimetričnom slučaju po definiciji, koristeći formule (3.52) i (3.53) a s druge strane, koristimo naše nove formule (3.70), (3.71), (3.72) i (3.73) koje su izražene samo preko Fourierovih koeficijenata perturbacijskih matrica h i k.

U prvom primjeru predstavljamo perturbacijske matrice kookvira za koje je linearni koeficijent u asimptotskom razvoju svojstvenih vrijednosti ± 1 jednak nuli. U drugom primjeru linearni koeficijent je različit od nule. Ovi primjeri nam daju ideju kako izabrati perturbovani kookvir u cilju dobijanja spektrale asimetrije Diracovog operatora bez mase.

Primjer 3.5.12. Izaberimo perturbacijske matrice

$$h_{\alpha\beta}(x^1) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ 0 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}, \quad k_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ \cos x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koristeći (3.75) i (3.76), dobijamo

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= 0, \\ A^{(2)} &= \frac{\mathrm{i}}{16}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}I, \end{aligned}$$

pa je odgovarajući Diracov operator bez mase u aksisimetričnom slučaju (3.57) eksplicitno dat sa

$$\begin{aligned} W(\epsilon) = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} + \frac{\mathrm{i}\epsilon^2}{16}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\ + \frac{\mathrm{i}\epsilon^2}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1 + \sin x^1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon^2}{2}I. \end{aligned}$$

Koristeći (3.13), (3.52), (3.53), (3.78) i (3.80) dobijamo

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3), \tag{3.81}$$

$$\lambda_-(\epsilon) = -1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \tag{3.82}$$

Primjenom Fourierove transformacije (3.74) dobijamo

$$\widehat{h}_{\alpha\beta}(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 1, \\ \\ 0 & \text{za} \quad m = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{3.83}$$

$$\widehat{k}_{\alpha\beta}(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 1, \\ \\ 0 & \text{za} \quad m = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{3.84}$$

$$\widehat{(h^2)}_{\alpha\beta}(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 0, \\ \\ 0 & \text{za} \quad m = 1, 2, 3, \ldots \ . \end{cases} \tag{3.85}$$

Zamjenom (3.83), (3.84) i (3.85) u (3.70), (3.71), (3.72) i (3.73) dobijamo

$$\lambda_\pm^{(1)} = 0, \ \lambda_+^{(2)} = \lambda_-^{(2)} = -\frac{1}{2}$$

što je u skladu sa asimptotskim formulama (3.81) i (3.82).

Primjer 3.5.13. Izaberimo perturbacijske matrice

$$h_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} 1 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ \cos x^1 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ \sin x^1 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}, \ k_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ \cos x^1 & -\sin x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Koristeći (3.75) i (3.76), dobijamo

$$A^{(1)} = \frac{\mathrm{i}}{4} \begin{pmatrix} \sin x^1 & 1 - \mathrm{i}\cos x^1 \\ 1 + \mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} + \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} \sin x^1 & 1 - \mathrm{i}\cos x^1 \\ 1 + \mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
A^{(2)} = &-\frac{3\mathrm{i}}{16}\begin{pmatrix} \sin x^1 & 2-\mathrm{i}-\mathrm{i}\cos x^1 \\ 2+\mathrm{i}+\mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\
&-\frac{3\mathrm{i}}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} \sin x^1 & 2-\mathrm{i}-\mathrm{i}\cos x^1 \\ 2+\mathrm{i}+\mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix} \\
&+\frac{\mathrm{i}}{16}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\
&+\frac{\mathrm{i}}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 & 0 \end{pmatrix}-\frac{3}{16}I,
\end{aligned}
$$

pa je odgovarajući perturbovani Diracov operator u aksisimetričnom slučaju dat sa

$$
\begin{aligned}
W(\epsilon) = &-\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1}+\frac{\mathrm{i}\epsilon}{4}\begin{pmatrix} \sin x^1 & 1-\mathrm{i}\cos x^1 \\ 1+\mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\
&+\frac{\mathrm{i}\epsilon}{4}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} \sin x^1 & 1-\mathrm{i}\cos x^1 \\ 1+\mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix} \\
&-\frac{3\mathrm{i}\epsilon^2}{16}\begin{pmatrix} \sin x^1 & 2-\mathrm{i}-\mathrm{i}\cos x^1 \\ 2+\mathrm{i}+\mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\
&-\frac{3\mathrm{i}\epsilon^2}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} \sin x^1 & 2-\mathrm{i}-\mathrm{i}\cos x^1 \\ 2+\mathrm{i}+\mathrm{i}\cos x^1 & -\sin x^1 \end{pmatrix} \\
&+\frac{\mathrm{i}\epsilon^2}{16}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx^1} \\
&+\frac{\mathrm{i}\epsilon^2}{16}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 \\ \mathrm{i}\cos x^1+\sin x^1 & 0 \end{pmatrix}-\frac{3\epsilon^2}{16}I.
\end{aligned}
$$

Koristeći (3.13), (3.52), (3.53), (3.78) i (3.80) dobijamo

$$
\lambda_+(\epsilon) = 1-\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{4}\epsilon^2+O(\epsilon^3), \tag{3.86}
$$

$$
\lambda_-(\epsilon) = -1+\frac{1}{2}\epsilon-\epsilon^2+O(\epsilon^3). \tag{3.87}
$$

Primjenom Fourierove transformacije (3.74) dobijamo

$$
\widehat{h}_{\alpha\beta}(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{for} \quad m=0, \\[2ex] \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -\mathrm{i}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\mathrm{i}/2 \\ -\mathrm{i}/2 & -\mathrm{i}/2 & -1/2 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m=1, \\[2ex] 0 & \text{za} \quad m=2,3,\dots, \end{cases} \tag{3.88}
$$

$$\widehat{k}_{\alpha\beta}(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & \mathrm{i}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 1, \\ \\ 0 & \text{za} \quad m = 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{3.89}$$

$$\widehat{(h^2)}_{\alpha\beta}(m) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 0, \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -\mathrm{i}/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 1, \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\mathrm{i}/4 \\ 0 & -\mathrm{i}/4 & -1/4 \end{pmatrix} & \text{za} \quad m = 2, \\ \\ 0 & \text{za} \quad m = 3, 4, \ldots \ . \end{cases} \tag{3.90}$$

Zamjenom (3.88), (3.89) i (3.90) u (3.70), (3.71), (3.72) and (3.73) dobijamo

$$\lambda_{\pm}^{(1)} = \mp\frac{1}{2}, \quad \lambda_{+}^{(2)} = \frac{3}{4}, \text{ and } \lambda_{-}^{(2)} = -1,$$

što je u skladu sa asimptotskim formulama (3.86) i (3.87).

Primjedba 3.5.14. U Primjeru 3.5.12 pokazali smo da ako izaberemo perturbacijsku matricu $h_{\alpha\beta}(x^1)$ takvu da je $h_{11}(x^1) = 0$, linearni koeficijenti $\lambda_{\pm}^{(1)}$ su jednaki nula, što je u skladu sa (3.70) i (3.71). S druge strane, ako izaberemo perturbacijsku matricu $h_{\alpha\beta}(x^1)$ kao u Primjeru 3.5.13 gdje je $h_{11}(x^1) \neq 0$, linearni koeficijent nije jednak nuli i za svojstvene vrijednosti ± 1 imaju suprotan znak. Ovo je u skladu sa Primjedbom 3.5.9. Spektralna asimetrija u oba slučaja je dobijena na kvadratnom članu.

Dodatak A

Einsteinove i Yang-Millsove jednačine

U ovom dodatku predstavljamo izvođenje Einsteinovih jednačina polja, Yang-Millsove jednačine i komplementarne Yang-Millsove jednačine. Ovi rezultati su već dobro poznati, vidi [53, 59, 72, 75, 99], a mi ovdje prezentujemo detaljano izvođenje ovih jednačina.

A.1 Einsteinove jednačine polja

Einsteinove jednačine polja leže u centru generalne relativnosti. One povezuju geometriju prostorvremena i materiju. Vakuumske Einsteinove jednačine

$$Ric_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\alpha\beta} = 0 \tag{A.1}$$

se dobijaju varijacijom po metrici Einstein-Hilbertove akcije

$$S_{EH} := \frac{c^4}{16\pi G}\int \mathcal{R}\sqrt{|\det g|}, \tag{A.2}$$

kao što je prethodno naglašeno u [75]. Pri tome su $\mathcal{R}$ skalarna krivina (1.19), Ric Ricci krivina (1.18), g metrika, c brzina svjetlosti i G gravitaciona konstanta čija je preporučena numerička vrijednost $6.673\ 84(80) \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$, sa relativnim standardnim odstupanjem 1.2×10^{-4}, vidi [63]. Pune jednačine polja su dobijene dodajući Lagrangian materije Einstein-Hilbertovoj akciji, što nam daje Einsteinove jednačine

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu},$$

pri čemu je T tenzor energije-impulsa koji proizilazi iz Lagrangiana materije, vidi [59]. Najjednostavnije rješenje ovih jednačina jeste prostorvrijeme Minkowskog iz specijalne relativnosti.

Propozicija A.1.1. Neka je (M, g) (pseudo-)Riemannova mnogostrukost. Pri varijaciji $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, vrijedi

- $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} g^{\lambda\nu} \delta g_{\kappa\lambda}$,
- $\delta \det g_{\mu\nu} = \det g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$,
- $\delta \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \frac{1}{2} \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$.

Za dokaz Propozicije A.1.1 vidi [65]. Budući da je $\mathcal{R} = R^{\kappa\mu}{}_{\kappa\mu}$, imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S_{EH}}{\delta g} &= \delta \int R^{\kappa\mu}{}_{\kappa\mu} \sqrt{|\det g|} = \delta \int R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} \\
&= \int \delta \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} \right) = \int R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} \delta \left(g^{\lambda\mu} \sqrt{|\det g|} \right) \\
&= \int R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} \delta \left(-g^{\lambda\alpha} g^{\beta\mu} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{|\det g|} + g^{\lambda\mu} \frac{1}{2} \sqrt{|\det g|} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\beta\mu} + \frac{1}{2} R^{\kappa}{}_{\lambda\kappa\mu} g^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}
$$

Dakle

$$
\frac{\delta S_{EH}}{\delta g} = \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-R^{\kappa\alpha}{}_{\kappa}{}^{\beta} + \frac{1}{2} \mathcal{R} g^{\alpha\beta} \right) = \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(-Ric^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathcal{R} g^{\alpha\beta} \right),
$$

što nam daje jednačinu (A.1).

A.2 Yang-Millsove jednačine

Yang-Millsovu akciju definišemo sa

$$
S_{YM} := \int R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|}. \tag{A.3}
$$

Varijacijom akcije (A.3) po metrici dobijamo tzv. *komplementarnu Yang-Millsovu jednačinu* za afinu konekciju. Koristeći Propoziciju A.1.1, dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{YM}}{\delta g} &= \int \delta \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa\mu'\nu'} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \sqrt{|\det g|} \right) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta}) R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa\mu'\nu'} \left(-g^{\mu\alpha} g^{\beta\mu'} g^{\nu\nu'} - g^{\nu\alpha} g^{\beta\nu'} g^{\mu\mu'} + \frac{1}{2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\alpha\beta} \right) \\
&= -\int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\nu}{}^{\alpha} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\nu\beta} + R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \right) \\
&= -2 \int (\delta g_{\alpha\beta}) \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \right), \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

pa je komplementarna Yang-Millsova jednačina data sa

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu}{}^{\alpha} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} = 0. \qquad \text{(A.5)}$$

Koristeći notaciju $H = H_{\alpha}{}^{\beta} := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\alpha} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\beta}$ i $\delta = \delta_{\alpha}{}^{\beta}$, jednačina (A.5) je ekvivalentna jednačini

$$H - \frac{1}{4} (\mathrm{tr}\ H) \delta = 0,$$

kao što je naglašeno i u [53].

Varijacijom akcije (A.3) po konekciji dobijamo *Yang-Millsovu jednačinu* za afinu konekciju. Budući da krivinu variramo nezavisno, dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{YM}}{\delta \Gamma} &= \int \delta \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \right) \sqrt{|\det g|} \\
&= \int \delta \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \right) R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|} + \int \delta \left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \right) R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \sqrt{|\det g|} \\
&= 2 \int \delta \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} \right) R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|}. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

Koristeći formulu za tenzor krivine (1.17), dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} &= \partial_{\mu} \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} \right) - \partial_{\nu} \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} \right) \\
&\quad + \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta} \right) \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta} \delta \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda} - \left(\delta \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta} \right) \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta} \delta \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Zamjenom jednačine (A.7) u jednačinu (A.6), dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\delta S_{YM}}{\delta\Gamma} = &-\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda}\right)\partial_\mu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\partial_\nu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\right)\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}+\int \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\left(\delta\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\\
&-\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\right)\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}-\int \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\left(\delta\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}
$$

Koristeći se činjenicom da za krivinu vrijedi antisimetrija $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu}$, preimenujući neke indekse, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\delta S_{YM}}{\delta\Gamma} = &\,2\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\partial_\nu\left(R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\right)\frac{\sqrt{|\det g|}}{\sqrt{|\det g|}}\\
&+2\int \left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}R^{\eta}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}-2\int \Gamma^{\eta}{}_{\nu\kappa}\left(\delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}\right)R^{\lambda}{}_{\eta}{}^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}
$$

Tada

$$
\frac{\delta S_{YM}}{\delta\Gamma} = 4\int \left(\delta\Gamma_\mu\right)\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\left(\partial_\nu+[\Gamma_\nu,\cdot]\right)\left(\sqrt{|\det g|}R^{\mu\nu}\right),
$$

odakle dobijamo Yang-Millsovu jednačinu

$$
\left(\partial_\nu+[\Gamma_\nu\,,\,\cdot\,]\right)\left(\sqrt{|\det g|}\,R^{\mu\nu}\right) = 0.
$$

Dodatak B

Bianchijev identitet za krivinu

U ovom dodatku prdstavljamo izvođenje Bianchijevog identiteta za krivinu koji je korišten pri izvođenju eksplicitne forme druge jednačine polja (2.50). Mi ćemo koristiti sljedeće pretpostavke:

(i) naše prostorvrijeme je metrički kompatibilno;

(ii) torzija je čisto aksijalna;

(iii) Ricci krivina je simetrična;

(iv) skalarna krivina $\mathcal{R}$ i pseudoskalarna krivina $\mathcal{R}_*$ su jednake nuli.

Primjedba B.0.1. Antisimetrija $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}$ vrijedi za bilo koju krivinu dok je antisimetrija $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ posljedica metričke kompatibilnosti. Primijetimo da *nećemo* koristiti simetriju $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}$, budući da krivina generaliziranih pp-talasa sa čisto aksijalnom torzijom ne posjeduje tu osobinu.

B.1 Eksplicitna formula za $R^{(5)}$ dio krivine

Sada ćemo izvesti eksplicitnu formulu za $R^{(5)}$ ireducibilni dio krivine (1.35), vidi Sekciju 1.4.1 i [99] za više o ireducibilnoj dekompoziciji krivine. Poznato je da je dio krivine $R^{(5)}$ i dijelovi $R_*^{(9,l)}$, vidi (1.41), povezani kao

$$R^{(5)} = -(R_*^{(9,1)} + R_*^{(9,2)})^*, \tag{B.1}$$

gdje $*$ označava desnu Hodgeovu zvjezdicu (1.23). Koristeći jednačinu (B.1), dobijamo

$$
\begin{aligned}
R^{(5)}_{\kappa\lambda\mu\nu} &= -\bigg(\frac{3}{8}(g_{\kappa\mu}\mathcal{S}_*{}^{(1)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{S}_*{}^{(1)}{}_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8}(g_{\lambda\mu}\mathcal{S}_*{}^{(1)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{S}_*{}^{(1)}{}_{\kappa\mu}) \\
&\quad - \frac{1}{8}(g_{\kappa\mu}\mathcal{S}_*{}^{(2)}{}_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\mathcal{S}_*{}^{(2)}{}_{\lambda\mu}) + \frac{3}{8}(g_{\lambda\mu}\mathcal{S}_*{}^{(2)}{}_{\kappa\nu} - g_{\lambda\nu}\mathcal{S}_*{}^{(2)}{}_{\kappa\mu})\bigg)^* \\
&= \frac{1}{8}\left(\left(3\mathcal{S}_*{}^{(1)}{}_{\lambda\eta} - \mathcal{S}_*{}^{(2)}{}_{\lambda\eta}\right)\epsilon^{\eta}{}_{\kappa\mu\nu} + \left(3\mathcal{S}_*{}^{(2)}{}_{\kappa\eta} - \mathcal{S}_*{}^{(1)}{}_{\kappa\eta}\right)\epsilon^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu}\right).
\end{aligned}
$$

Za metrički kompatibilna prostorvremena imamo da je $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}$ pa posljedično $\mathcal{S}_*^{(1)}{}_{\mu\nu} = -\mathcal{S}_*^{(2)}{}_{\mu\nu}$. Odavdje dobijamo

$$
R^{(5)}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}\left((\mathcal{R}ic_*^{(1)}{}_{\lambda\eta} + \mathcal{R}ic_*^{(1)}{}_{\eta\lambda})\epsilon^{\eta}{}_{\kappa\mu\nu} - (\mathcal{R}ic_*^{(1)}{}_{\kappa\eta} + \mathcal{R}ic_*^{(1)}{}_{\eta\kappa})\epsilon^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu}\right). \quad \text{(B.2)}
$$

Pod pretpostavkom da je Ric krivina simetrična a pseudoskalarna krivina $\mathcal{R}_*$ nula, dobijamo pojednostavljenu verziju formule (B.2) datu sa

$$
R^{(5)}_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\eta}{}_{\kappa\mu\nu} Ric_*^{(1)}{}_{\lambda\eta} - \epsilon^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu} Ric_*^{(1)}{}_{\kappa\eta}\right). \quad \text{(B.3)}
$$

B.2 Izvođenje Bianchijevog identiteta

Pretpostavka (i) implicira da je $R^{(6)}$ dio krivine (1.36) nula a pretpostavka (iv) očigledno implicira da su $R^{(2)}$ dio krivine (1.32) i $R^{(4)}$ dio krivine (1.34) jednake nuli. Dakle, pod gornjim pretpostavkama, krivina (1.17) ima samo *tri* nenulta ireducibilna dijela, tj. $R^{(1)}$, $R^{(3)}$ i $R^{(5)}$. Zbog toga može biti predstavljena kao

$$
\begin{aligned}
R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu}Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric_{\kappa\nu} + g_{\lambda\nu}Ric_{\kappa\mu} - g_{\kappa\nu}Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}_{\kappa\lambda\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2}(-\epsilon^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu}Ric_{*\kappa\eta} + \epsilon^{\eta}{}_{\kappa\mu\nu}Ric_{*\lambda\eta}). \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

Bianchijev identitet za krivinu je dat sa

$$
\nabla_\xi R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\nu R^{\kappa}{}_{\lambda\xi\mu} + \nabla_\mu R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\xi} = 0,
$$

koji može biti zapisan u obliku

$$
(\partial_\xi + [\Gamma_\xi, \cdot])R_{\mu\nu} + (\partial_\nu + [\Gamma_\nu, \cdot])R_{\xi\mu} + (\partial_\mu + [\Gamma_\mu, \cdot])R_{\nu\xi} = 0, \quad \text{(B.5)}
$$

koristeći matričnu notaciju

$$
[\Gamma_\xi, R_{\mu\nu}]^{\kappa}{}_{\lambda} = \Gamma^{\kappa}{}_{\xi\eta}R^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu} - R^{\kappa}{}_{\eta\mu\nu}\Gamma^{\eta}{}_{\xi\lambda}.
$$

Zamjenom (B.4) u (B.5) dobijamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_\xi \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\mu Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric^\kappa{}_\nu + g_{\lambda\nu}Ric^\kappa{}_\mu - \delta^\kappa{}_\nu Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\partial_\xi(-\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\mu\nu}Ric_*{}^\kappa{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\mu\nu}Ric_{*\lambda\vartheta}) \\
&+ \partial_\nu \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\xi Ric_{\lambda\mu} - g_{\lambda\xi}Ric^\kappa{}_\mu + g_{\lambda\mu}Ric^\kappa{}_\xi - \delta^\kappa{}_\mu Ric_{\lambda\xi}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\xi\mu}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\partial_\nu(-\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\xi\mu}Ric_*{}^\kappa{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\xi\mu}Ric_{*\lambda\vartheta}) \\
&+ \partial_\mu \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\nu Ric_{\lambda\xi} - g_{\lambda\nu}Ric^\kappa{}_\xi + g_{\lambda\xi}Ric^\kappa{}_\nu - \delta^\kappa{}_\xi Ric_{\lambda\nu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\lambda\nu\xi}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\partial_\mu(-\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\nu\xi}Ric_*{}^\kappa{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta}) \\
&+ \Gamma^\kappa{}_{\nu\eta} \left[\frac{1}{2}(\delta^\eta{}_\xi Ric_{\lambda\mu} - g_{\lambda\xi}Ric^\eta{}_\mu + g_{\lambda\mu}Ric^\eta{}_\xi - \delta^\eta{}_\mu Ric_{\lambda\xi}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\xi\mu}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\nu\eta}(-\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\xi\mu}Ric_*{}^\eta{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\eta}{}_{\xi\mu}Ric_{*\lambda\vartheta}) \\
&- \Gamma^\eta{}_{\nu\lambda} \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\xi Ric_{\eta\mu} - g_{\eta\xi}Ric^\kappa{}_\mu + g_{\eta\mu}Ric^\kappa{}_\xi - \delta^\kappa{}_\mu Ric_{\eta\xi}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\xi\mu}\right] \\
&- \frac{1}{2}\Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}(-\epsilon^\vartheta{}_{\eta\xi\mu}Ric_*{}^\kappa{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\xi\mu}Ric_{*\eta\vartheta}) \\
&+ \Gamma^\kappa{}_{\xi\eta} \left[\frac{1}{2}(\delta^\eta{}_\mu Ric_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}Ric^\eta{}_\nu + g_{\lambda\nu}Ric^\eta{}_\mu - \delta^\eta{}_\nu Ric_{\lambda\mu}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\mu\nu}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\xi\eta}(-\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\mu\nu}Ric_*{}^\eta{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\eta}{}_{\mu\nu}Ric_{*\lambda\vartheta}) \\
&- \Gamma^\eta{}_{\xi\lambda} \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\mu Ric_{\eta\nu} - g_{\eta\mu}Ric^\kappa{}_\nu + g_{\eta\nu}Ric^\kappa{}_\mu - \delta^\kappa{}_\nu Ric_{\eta\mu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\mu\nu}\right] \\
&- \frac{1}{2}\Gamma^\eta{}_{\xi\lambda}(-\epsilon^\vartheta{}_{\eta\mu\nu}Ric_*{}^\kappa{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\mu\nu}Ric_{*\eta\vartheta}) \\
&+ \Gamma^\kappa{}_{\mu\eta} \left[\frac{1}{2}(\delta^\eta{}_\nu Ric_{\lambda\xi} - g_{\lambda\nu}Ric^\eta{}_\xi + g_{\lambda\xi}Ric^\eta{}_\nu - \delta^\eta{}_\xi Ric_{\lambda\nu}) + \mathcal{W}^\eta{}_{\lambda\nu\xi}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Gamma^\kappa{}_{\mu\eta}(-\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\nu\xi}Ric_*{}^\eta{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\eta}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta}) \\
&- \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda} \left[\frac{1}{2}(\delta^\kappa{}_\nu Ric_{\eta\xi} - g_{\eta\nu}Ric^\kappa{}_\xi + g_{\eta\xi}Ric^\kappa{}_\nu - \delta^\kappa{}_\xi Ric_{\eta\nu}) + \mathcal{W}^\kappa{}_{\eta\nu\xi}\right] \\
&- \frac{1}{2}\Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}(-\epsilon^\vartheta{}_{\eta\nu\xi}Ric_*{}^\kappa{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\nu\xi}Ric_{*\eta\vartheta}).
\end{aligned}
$$

Dug ali jednostavan račun daje

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2}\{&\delta^{\kappa}{}_{\mu}(\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\xi\nu}Ric_{\lambda\eta}) + g_{\lambda\mu}(-\nabla_{\xi}Ric^{\kappa}{}_{\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\xi\nu}Ric^{\kappa}{}_{\eta})\\
&+ g_{\lambda\nu}(\nabla_{\xi}Ric^{\kappa}{}_{\mu} + \Gamma^{\eta}{}_{\xi\mu}Ric^{\kappa}{}_{\eta}) + \delta^{\kappa}{}_{\nu}(-\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\mu} - \Gamma^{\eta}{}_{\xi\mu}Ric_{\lambda\eta})\\
&+ \delta^{\kappa}{}_{\xi}(\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\mu} + \Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu}Ric_{\lambda\eta}) + \delta^{\kappa}{}_{\mu}(-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\xi}Ric_{\lambda\eta})\\
&+ g_{\lambda\mu}(\nabla_{\nu}Ric^{\kappa}{}_{\xi} + \Gamma^{\eta}{}_{\nu\xi}Ric^{\kappa}{}_{\eta}) + g_{\lambda\xi}(-\nabla_{\nu}Ric^{\kappa}{}_{\mu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu}Ric^{\kappa}{}_{\eta})\\
&+ \delta^{\kappa}{}_{\nu}(\nabla_{\mu}Ric_{\lambda\xi} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\xi}Ric_{\lambda\eta}) + \delta^{\kappa}{}_{\xi}(-\nabla_{\mu}Ric_{\lambda\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}Ric_{\lambda\eta})\\
&+ g_{\lambda\xi}(\nabla_{\mu}Ric^{\kappa}{}_{\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}Ric^{\kappa}{}_{\eta}) + g_{\lambda\nu}(-\nabla_{\mu}Ric^{\kappa}{}_{\xi} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\xi}Ric^{\kappa}{}_{\eta})\\
&+ \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}(\delta^{\eta}{}_{\xi}Ric_{\lambda\mu} - \delta^{\eta}{}_{\mu}Ric_{\lambda\xi}) + \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}(g_{\eta\xi}Ric^{\kappa}{}_{\mu} - g_{\eta\mu}Ric^{\kappa}{}_{\xi})\\
&+ \Gamma^{\kappa}{}_{\xi\eta}(\delta^{\eta}{}_{\mu}Ric_{\lambda\nu} - \delta^{\eta}{}_{\nu}Ric_{\lambda\mu}) + \Gamma^{\eta}{}_{\xi\lambda}(g_{\eta\mu}Ric^{\kappa}{}_{\nu} - g_{\eta\nu}Ric^{\kappa}{}_{\mu})\\
&+ \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}(\delta^{\eta}{}_{\nu}Ric_{\lambda\xi} - \delta^{\eta}{}_{\xi}Ric_{\lambda\nu}) + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}(g_{\eta\nu}Ric^{\kappa}{}_{\xi} - g_{\eta\xi}Ric^{\kappa}{}_{\nu})\\
&+ \partial_{\xi}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\mu\nu}Ric_{*}{}^{\kappa}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\mu\nu}Ric_{*\lambda\vartheta})\right] + \partial_{\nu}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\xi\mu}Ric_{*}{}^{\kappa}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\xi\mu}Ric_{*\lambda\vartheta})\right]\\
&+ \partial_{\mu}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\nu\xi}Ric_{*}{}^{\kappa}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta})\right] + \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\xi\mu}Ric_{*}{}^{\eta}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\eta}{}_{\xi\mu}Ric_{*\lambda\vartheta})\right]\\
&- \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\eta\xi\mu}Ric_{*}{}^{\kappa}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\xi\mu}Ric_{*\eta\vartheta})\right] + \Gamma^{\kappa}{}_{\xi\eta}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\mu\nu}Ric_{*}{}^{\eta}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\eta}{}_{\mu\nu}Ric_{*\lambda\vartheta})\right]\\
&- \Gamma^{\eta}{}_{\xi\lambda}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\eta\mu\nu}Ric_{*}{}^{\kappa}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\mu\nu}Ric_{*\eta\vartheta})\right] + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\nu\xi}Ric_{*}{}^{\eta}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\eta}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta})\right]\\
&-\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\left[(-\epsilon^{\vartheta}{}_{\eta\nu\xi}Ric_{*}{}^{\kappa}{}_{\vartheta} + \epsilon^{\vartheta\kappa}{}_{\nu\xi}Ric_{*\eta\vartheta})\right]\}\\
&+ \partial_{\xi}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} + \partial_{\nu}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\lambda\xi\mu} + \partial_{\mu}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\lambda\nu\xi} + \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\eta}\mathcal{W}^{\eta}{}_{\lambda\xi\mu} - \Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\eta\xi\mu}\\
&+ \Gamma^{\kappa}{}_{\xi\eta}\mathcal{W}^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu} - \Gamma^{\eta}{}_{\xi\lambda}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\eta\mu\nu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\eta}\mathcal{W}^{\eta}{}_{\lambda\nu\xi} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\mathcal{W}^{\kappa}{}_{\eta\nu\xi}.
\end{aligned}
$$

Sada ćemo kontrakovati indekse κ i μ u gornjoj jednačini.

Budući da je gornja jednačina preduga, prvo ćemo posmatrati izraze koji sadrže Weylovu krivinu $\mathcal{W}$. Kontrakcijom indeksa κ i μ te koristeći formulu sa kovarijantni izvod Weylovog tenzora, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}\mathcal{W}^{\eta}{}_{\lambda\xi\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\xi\eta}\mathcal{W}^{\eta}{}_{\lambda\mu\nu} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\eta\xi} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\xi}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}\\
&= \nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi} + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(\Gamma^{\eta}{}_{\nu\mu} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}) + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(\Gamma^{\eta}{}_{\mu\xi} - \Gamma^{\eta}{}_{\xi\mu})\\
&= \nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi} + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\mu} - K^{\eta}{}_{\mu\nu}) + \mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi} - K^{\eta}{}_{\xi\mu}),
\end{aligned}
$$

prema osobini simetrije Levi-Civita konekcije i jednačine (1.14).

Izrazi koji sadrže kovarijanti izvod Ricci krivine, nakon kontrakcije indeksa κ i μ postaju

$$
\begin{aligned}
&4\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} - \nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} - \nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} + \nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi} - 4\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi} + \nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}\\
&+ \nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi} - \nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} + g_{\lambda\xi}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\xi}\\
&= \nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu} - \nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi} + g_{\lambda\xi}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu} - g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\xi}.
\end{aligned}
$$

Izrazi iz Bianchijevog identiteta koji sadrže tenzor Ricci krivine, nakon kontrakcije indeksa κ i μ te koristeći osobinu simetrije Levi-Civita konekcije i jednačinu (1.14) postaju

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[4Ric_{\lambda\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\xi})+Ric_{\lambda\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\nu})+g_{\lambda\nu}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\xi})\\
&\quad+Ric_{\lambda\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\nu})+Ric_{\lambda\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\nu})+g_{\lambda\xi}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})\\
&\quad+Ric_{\lambda\mu}(K^{\mu}{}_{\nu\xi}-K^{\mu}{}_{\xi\nu})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})+Ric^{\mu}{}_{\mu}(K_{\xi\nu\lambda}-K_{\nu\xi\lambda})\\
&\quad+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})]\\
=&\frac{1}{2}[g_{\lambda\nu}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\xi\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\xi})+g_{\lambda\xi}Ric^{\mu}{}_{\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})\\
&\quad+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})\\
&\quad+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})].
\end{aligned}$$

Izrazi iz Bianchijevog identiteta koji sadrže Ric_* tenzor krivine, nakon kontrakcije indeksa κ i μ te koristeći definiciju kovarijantnog izvoda postaju

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\eta\nu}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_{*\lambda\vartheta})\right.\\
&\quad+(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\xi\eta}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\xi\eta}Ric_{*\lambda\vartheta})\\
&\quad\left.-\nabla_{\mu}(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\nu\xi}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta})+\nabla_{\mu}(\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta})\right\}.
\end{aligned}$$

Spajajući sav račun i koristeći činjenicu da je $Ric^{\mu}{}_{\eta}K^{\eta}{}_{\xi\mu}=0$, Bianchijev identitet za krivinu postaje

$$\begin{aligned}
0=&\nabla_{\xi}Ric_{\lambda\nu}-\nabla_{\nu}Ric_{\lambda\xi}+g_{\lambda\xi}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}-g_{\lambda\nu}\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\xi}\\
&+Ric^{\mu}{}_{\eta}(g_{\lambda\xi}K^{\eta}{}_{\mu\nu}-g_{\lambda\nu}K^{\eta}{}_{\mu\xi})+Ric^{\mu}{}_{\xi}(K_{\nu\mu\lambda}-K_{\mu\nu\lambda})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K_{\mu\xi\lambda}-K_{\xi\mu\lambda})\\
&+Ric_{\lambda\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})+Ric_{\lambda\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})\\
&+(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\eta\nu}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_{*\lambda\vartheta})\\
&+(K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\nu\mu})(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\xi\eta}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\xi\eta}Ric_{*\lambda\vartheta})\\
&-\nabla_{\mu}(\epsilon^{\vartheta}{}_{\lambda\nu\xi}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta})+\nabla_{\mu}(\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta})\\
&+2\nabla_{\mu}\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\xi}+2\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\xi\eta}(K^{\eta}{}_{\nu\mu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})+2\mathcal{W}^{\mu}{}_{\lambda\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu}).
\end{aligned}\tag{B.6}$$

Sada želimo eliminisati izraz $\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}$. Kontrakcijom indeksa λ i ξ u (B.6), dobijamo

$$\begin{aligned}
0=&\nabla_{\xi}Ric^{\xi}{}_{\nu}-\nabla_{\nu}R+4\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}-\nabla_{\mu}Ric^{\mu}{}_{\nu}+Ric^{\mu}{}_{\eta}(4K^{\eta}{}_{\mu\nu}-K^{\eta}{}_{\mu\nu})\\
&-Ric^{\mu}{}_{\xi}(K^{\xi}{}_{\mu\nu}-K^{\xi}{}_{\nu\mu})+Ric^{\mu}{}_{\nu}(K^{\xi}{}_{\mu\xi}-K^{\xi}{}_{\xi\mu})+Ric^{\xi}{}_{\nu}(K^{\mu}{}_{\xi\mu}-K^{\mu}{}_{\mu\xi})\\
&+Ric^{\xi}{}_{\xi}(K^{\mu}{}_{\mu\nu}-K^{\mu}{}_{\nu\mu})+(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu})(\epsilon^{\vartheta\xi}{}_{\eta\nu}Ric_*{}^{\mu}{}_{\vartheta}-\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_*{}^{\xi}{}_{\vartheta})\\
&+2\mathcal{W}^{\mu\xi}{}_{\nu\eta}(K^{\eta}{}_{\mu\xi}-K^{\eta}{}_{\xi\mu}).
\end{aligned}$$

Sada izraz ∇Ric možemo izraziti kao

$$\nabla_\mu Ric^\mu{}_\nu = -\frac{1}{2}Ric^\mu{}_\eta K^\eta{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Ric^\beta{}_\nu(K^\mu{}_{\beta\mu} - K^\mu{}_{\mu\beta}) - \frac{1}{2}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\nu\eta}(K^\eta{}_{\mu\alpha} - K^\eta{}_{\alpha\mu})$$
$$- \frac{1}{2}K^\eta{}_{\mu\beta}(\epsilon^{\vartheta\beta}{}_{\eta\nu}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_*{}^\beta{}_\vartheta). \tag{B.7}$$

Zamjenom (B.7) u (B.6), dobijamo

$$\nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} = -\frac{1}{2}[\nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} - \nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} + \nabla_\mu(\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\nu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta} - \epsilon^\vartheta{}_{\lambda\nu\xi}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta)$$
$$+ Ric^\mu{}_\xi(K_{\nu\mu\lambda} - K_{\mu\nu\lambda}) + Ric^\mu{}_\nu(K_{\mu\xi\lambda} - K_{\xi\mu\lambda}) + Ric_{\lambda\nu}(K^\mu{}_{\xi\mu} - K^\mu{}_{\mu\xi})$$
$$+ Ric_{\lambda\xi}(K^\mu{}_{\mu\nu} - K^\mu{}_{\nu\mu}) + (K^\eta{}_{\mu\xi} - K^\eta{}_{\xi\mu})(\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\eta\nu}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_{*\lambda\vartheta})$$
$$+ (K^\eta{}_{\mu\nu} - K^\eta{}_{\nu\mu})(\epsilon^\vartheta{}_{\lambda\xi\eta}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\xi\eta}Ric_{*\lambda\vartheta})]$$
$$+ \frac{1}{4}Ric^\mu{}_\eta(g_{\lambda\xi}K^\eta{}_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}K^\eta{}_{\mu\xi}) + \frac{1}{4}(g_{\lambda\xi}Ric^\beta{}_\nu - g_{\lambda\nu}Ric^\beta{}_\xi)(K^\mu{}_{\beta\mu} - K^\mu{}_{\mu\beta})$$
$$+ \frac{1}{4}g_{\lambda\xi}K^\eta{}_{\mu\beta}(\epsilon^{\vartheta\beta}{}_{\eta\nu}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}Ric_*{}^\beta{}_\vartheta)$$
$$- \frac{1}{4}g_{\lambda\nu}K^\eta{}_{\mu\beta}(\epsilon^{\vartheta\beta}{}_{\eta\xi}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta - \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\xi}Ric_*{}^\beta{}_\vartheta)$$
$$+ \frac{1}{4}(g_{\lambda\xi}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\nu\eta} - g_{\lambda\nu}\mathcal{W}^{\mu\alpha}{}_{\xi\eta})(K^\eta{}_{\mu\alpha} - K^\eta{}_{\alpha\mu})$$
$$- \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\xi\eta}(K^\eta{}_{\nu\mu} - K^\eta{}_{\mu\nu}) - \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta}(K^\eta{}_{\mu\xi} - K^\eta{}_{\xi\mu}). \tag{B.8}$$

Primjedba B.2.1. Primijetimo da jednakost (B.8) predstavlja Bianchijev identite za krivinu bez korištenja bilo kakvih pretpostavki o torziji.

Sada možemo primijeniti osobinu (*ii*) da je torzija čisto aksijalna i vezu između Levi-Civita tenzora i Weylovog tenzora datu u Lemi 1.4.11. Jednačina (B.7) sada postaje

$$\nabla_\mu Ric^\mu{}_\nu = \epsilon^{\vartheta\beta}{}_{\nu\eta}K^\eta{}_{\mu\beta}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta, \tag{B.9}$$

a jednačina (B.8) postaje

$$\nabla_\mu \mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\xi} = -\frac{1}{2}\left[\nabla_\xi Ric_{\lambda\nu} - \nabla_\nu Ric_{\lambda\xi} + 2Ric^\mu{}_\xi K_{\nu\mu\lambda} + 2Ric^\mu{}_\nu K_{\mu\xi\lambda}\right.$$
$$\left.+\epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\nu\xi}\nabla_\mu Ric_{*\lambda\vartheta} - \epsilon^\vartheta{}_{\lambda\nu\xi}\nabla_\mu Ric_*{}^\mu{}_\vartheta\right]$$
$$- \epsilon^\vartheta{}_{\lambda\eta\nu}K^\eta{}_{\mu\xi}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\eta\nu}K^\eta{}_{\mu\xi}Ric_{*\lambda\vartheta}$$
$$- \epsilon^\vartheta{}_{\lambda\xi\eta}K^\eta{}_{\mu\nu}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta + \epsilon^{\vartheta\mu}{}_{\xi\eta}K^\eta{}_{\mu\nu}Ric_{*\lambda\vartheta}$$
$$+ \frac{1}{2}g_{\lambda\xi}\epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\nu}K^\eta{}_{\mu\zeta}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta - \frac{1}{2}g_{\lambda\nu}\epsilon^{\vartheta\zeta}{}_{\eta\xi}K^\eta{}_{\mu\zeta}Ric_*{}^\mu{}_\vartheta$$
$$- 2\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\xi\eta}K^\eta{}_{\nu\mu} - 2\mathcal{W}^\mu{}_{\lambda\nu\eta}K^\eta{}_{\mu\xi}. \tag{B.10}$$

Dodatak C

Eksplicitne varijacije nekih kvadratnih formi krivine

U ovom dodatku predstavljamo eksplicitine varijacije po metrici određenih kvadratnih formi krivine koje su korištene u ovoj disertaciji koristeći Propoziciju A.1.1.

C.1 Varijacija od $\int Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}$

Budući da je

$$\frac{\delta}{\delta g}\int Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} = \int \delta\left(Ric_{\mu\nu}Ric_{\mu'\nu'}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|}\right),$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta})\, Ric_{\mu\nu}Ric_{\mu'\nu'}\left(-g^{\nu\nu'}g^{\mu\alpha}g^{\beta\mu'} - g^{\mu\mu'}g^{\nu\alpha}g^{\beta\nu'} + \frac{1}{2}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\alpha\beta}\right) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta})\left(-Ric^{\alpha}{}_{\nu}Ric^{\beta\nu} - Ric_{\mu}{}^{\alpha}Ric^{\mu\beta} + \frac{1}{2}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}$$

Primjedba C.1.1. Pod pretpostavkom da je prostorvrijeme metrički kompatibilno, Ricci krivina je simetrična i posljednja jednačina se pojednostavljuje na

$$\frac{\delta}{\delta g}\int Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}\sqrt{|\det g|} = -2\int (\delta g_{\alpha\beta})\left(Ric_{\mu}{}^{\alpha}Ric^{\mu\beta} - \frac{1}{4}Ric_{\mu\nu}Ric^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right).$$

C.2 Varijacija od $\int Ric^{(2)}_{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}$

Koristeći Propoziciju A.1.1, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= \frac{\delta}{\delta g}\int R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu}{}^{\nu}\sqrt{|\det g|} = \frac{\delta}{\delta g}\int R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu\nu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|} \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta}) R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu} R^{\mu}{}_{\kappa\mu\nu'}\Big(-g^{\lambda\alpha} g^{\beta\lambda'} g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|} - g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\alpha} g^{\beta\nu'}\sqrt{|\det g|} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'} g^{\alpha\beta}\sqrt{|\det g|}\Big) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta})\left(-R^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} - Ric^{(2)\kappa\alpha} Ric_{\kappa}{}^{\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu}\right).
\end{aligned}$$

Primjedba C.2.1. Pod pretpostavkom da je prostorvrijeme metrički kompatibilno, $Ric^{(2)} = -Ric$ i posljednja jednačina se pojednostavljuje na

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int Ric^{(2)\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta})\left(-R^{\kappa\alpha\beta}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu} + Ric^{\kappa\alpha} Ric_{\kappa}{}^{\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} Ric^{\kappa}{}_{\nu} Ric_{\kappa}{}^{\nu}\right).
\end{aligned}$$

C.3 Varijacija od $\int Ric^{(2)}_{\mu\nu} Ric^{(2)\mu\nu}$

Budući da je $Ric^{(2)}_{\kappa\nu} = R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta g}\int Ric^{(2)}_{\kappa\nu} Ric^{(2)\kappa\nu} = \frac{\delta}{\delta g}\int Ric^{(2)}_{\kappa\nu} Ric^{(2)\kappa\nu}\sqrt{|\det g|} \\
&= \frac{\delta}{\delta g}\int R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu} R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu}\sqrt{|\det g|} = \frac{\delta}{\delta g}\int R^{\kappa'}{}_{\mu'\mu\nu} R^{\kappa}{}_{\lambda'\lambda\nu'} g_{\kappa\kappa'} g^{\mu\mu'} g^{\lambda\lambda'} g^{\nu\nu'}\sqrt{|\det g|}.
\end{aligned}$$

Koristeći Propoziciju A.1.1, dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g}\int Ric^{(2)}_{\kappa\nu} Ric^{(2)\kappa\nu} &= \int (\delta g_{\alpha\beta})\big(R^{\beta\mu}{}_{\mu\nu} R^{\alpha\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} - R^{\kappa\beta\alpha\nu} R_{\kappa}{}^{\lambda}{}_{\lambda\nu} \\
&\quad - R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu} R^{\kappa\beta\alpha\nu} - R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu}{}^{\alpha} R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda}{}^{\beta} + \frac{1}{2} R_{\kappa}{}^{\mu}{}_{\mu\nu} R^{\kappa\lambda}{}_{\lambda}{}^{\nu} g^{\alpha\beta}\Big) \\
&= \int (\delta g_{\alpha\beta})\Big(Ric^{(2)\beta}{}_{\nu} Ric^{(2)\alpha\nu} - Ric^{(2)}{}_{\kappa}{}^{\alpha} Ric^{(2)\kappa\beta} \\
&\quad - 2Ric^{(2)}{}_{\kappa\nu} R^{\kappa\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} Ric^{(2)}{}_{\kappa\nu} Ric^{(2)\kappa\nu}\Big).
\end{aligned}$$

Primjedba C.3.1. Pod pretpostavkom da je prostorvrijeme metrički kompatibilno, Ricci krivina je simetrična i $Ric^{(2)} = -Ric$, pa se posljednja jednačina pojednostavljuje na

$$\frac{\delta}{\delta g}\int Ric^{(2)}_{\kappa\nu}Ric^{(2)\kappa\nu}\sqrt{|\det g|} = \int(\delta g_{\alpha\beta})\left(2Ric_{\kappa\nu}R^{\kappa\beta\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}Ric_{\kappa\nu}Ric^{\kappa\nu}\right).$$

Dodatak D

Detaljan račun za asimptotske koeficijente

U ovom dodatku predstavljamo detaljan račun za asimptotske koeficijente (3.70), (3.71), (3.72) i (3.73) iz Teoreme 3.5.7 koji odgovarajuju svojstvenim vrijednostima $\lambda = \pm 1$. Pri tome ćemo koristiti perturbacijsku teoriju koja je opisana u Sekciji 3.4 i eksplicitno izvedene formule za asimptotske koeficijente date sa (3.52), (3.53). Također, koristiti ćemo koncept pseudoinverza Diracovog operatora bez mase čija je konstrukcija data u Sekciji 3.4.1.

D.1 Račun za $\lambda_\pm^{(1)}$ koeficijente

Prvo ćemo izvesti formule (3.70), (3.71) iz Teoreme 3.5.7. Koristeći svojstvene vektore (3.77), (3.79) koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\lambda = 1$ i $\lambda = -1$ respektivno, kao i formulu (3.75) za diferencijalni operator $W_{1/2}^{(1)}$, parcijalnom integracijom dobijamo da formula (3.52) za svojstvene vrijednosti $\lambda = \pm 1$ postaje

$$\begin{aligned}
\lambda_+^{(1)} &= \langle W_{1/2}^{(1)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle = \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* W_{1/2}^{(1)} v^{(0)} dx^1 \\
&= \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \begin{pmatrix} {h_3}^1 & {h_1}^1 - i{h_2}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 & -{h_3}^1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} v^{(0)} dx^1 \\
&- \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx^1} [v^{(0)}]^* \begin{pmatrix} {h_3}^1 & {h_1}^1 - i{h_2}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 & -{h_3}^1 \end{pmatrix} v^{(0)} dx^1 \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} {h_1}^1(x^1) dx^1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} {h_1}^1(x^1) dx^1 = -\frac{1}{2} \widehat{h}_{11}(0),
\end{aligned} \tag{D.1}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_-^{(1)} &= \langle W_{1/2}^{(1)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle = \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* W_{1/2}^{(1)} v^{(0)} dx^1 \\
&= \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \begin{pmatrix} {h_3}^1 & {h_1}^1 - i{h_2}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 & -{h_3}^1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} v^{(0)} dx^1 \\
&- \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx^1} [v^{(0)}]^* \begin{pmatrix} {h_3}^1 & {h_1}^1 - i{h_2}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 & -{h_3}^1 \end{pmatrix} v^{(0)} dx^1 \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} {h_1}^1(x^1) dx^1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} {h_1}^1(x^1) dx^1 = \frac{1}{2} \widehat{h}_{11}(0), \qquad \text{(D.2)}
\end{aligned}
$$

pri čemu $\widehat{h}(m)$ označava Fourierove koeficijente funkcije $h(x^1)$, vidi Definiciju 3.5.1.

D.2 Račun za $\lambda_\pm^{(2)}$ koeficijente

Prvo ćemo dokazati formulu (3.72) iz Teoreme 3.5.7 za koeficijent $\lambda_+^{(2)}$ u asimptotskom rzavoju (3.68) svojstvene vrijednosti $\lambda = 1$. Zbog jednostavnosti i čitljivosti, račun ovog koeficijenta ćemo razdvojiti na nekoliko dijelova koristeći ekplicitnu formulu (3.53). Zbog toga, prvo ćemo izračunati izraz $\langle W_{1/2}^{(2)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle$. Koristeći svojstveni vektor (3.77) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$, kao i formulu (3.76) za diferencijalni operator $W_{1/2}^{(2)}$, parcijalnom integracijom, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\langle W_{1/2}^{(2)} v^{(0)}, v^{(0)} \rangle &= \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* W_{1/2}^{(2)} v^{(0)} dx^1 \\
&= -\frac{3i}{16} \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \begin{pmatrix} {(h^2)_3}^1 & {(h^2)_1}^1 - i{(h^2)_2}^1 \\ {(h^2)_1}^1 + i{(h^2)_2}^1 & -{(h^2)_3}^1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} v^{(0)} dx^1 \\
&- \frac{3i}{16} \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} {(h^2)_3}^1 & {(h^2)_1}^1 - i{(h^2)_2}^1 \\ {(h^2)_1}^1 + i{(h^2)_2}^1 & -{(h^2)_3}^1 \end{pmatrix} v^{(0)} dx^1 \\
&+ \frac{i}{16} \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \begin{pmatrix} {k_3}^1 & {k_1}^1 - i{k_2}^1 \\ {k_1}^1 + i{k_2}^1 & -{k_3}^1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} v^{(0)} dx^1 \\
&+ \frac{i}{16} \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} {k_3}^1 & {k_1}^1 - i{k_2}^1 \\ {k_1}^1 + i{k_2}^1 & -{k_3}^1 \end{pmatrix} v^{(0)} dx^1 \\
&+ \int_0^{2\pi} [v^{(0)}]^* \left(-\frac{1}{16} \right) \varepsilon_{\beta\gamma 1} h_{\alpha\beta} \frac{dh_{\alpha\gamma}}{dx^1} I v^{(0)} \\
&= \frac{3}{8} \widehat{(h^2)}_{11}(0) - \frac{1}{8} \widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16} \varepsilon_{\beta\gamma 1} \sum_{m_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} m_1 \overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m_1)} \widehat{h}_{\alpha\gamma}(m_1). \qquad \text{(D.3)}
\end{aligned}
$$

Primjedba D.2.1. Jednačinu (D.3) smo pojednostavili koristeći Fourierove koeficijente, vidi Definiciju 3.5.1 i Parsevalovu formulu

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(x)\overline{q(x)}dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{p}(m)\overline{\widehat{q}(m)}.$$

Sada ćemo izračunati izraz $\langle (W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)})Q(W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)})v^{(0)}, v^{(0)}\rangle$. Pseudoinverz, vidi Sekciju 3.4.1, operatora $W_{1/2} - I$ je dat sa

$$\begin{aligned} Q_+ = \frac{1}{4\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}&\left[e^{imx^1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\int_0^{2\pi} e^{-imy^1}(\,\cdot\,)dy^1\right. \\ &\left. +e^{-imx^1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\int_0^{2\pi} e^{imy^1}(\,\cdot\,)dy^1\right]. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Koristeći (3.75), (3.77) i (D.1), dobijamo

$$\begin{aligned} (W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_+)v^{(0)} &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} {h_1}^1 - i{h_2}^1 + {h_3}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 - {h_3}^1 \end{pmatrix} e^{ix^1} \\ &+ \frac{i}{8\sqrt{\pi}}e^{ix^1}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {h_1}^1 - i{h_2}^1 + {h_3}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 - {h_3}^1 \end{pmatrix} + \frac{\widehat{h}_{11}(0)}{4\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix^1}. \end{aligned} \tag{D.5}$$

Koristeći eksplicitnu formulu za pseudoinverz (D.4), sada ćemo izračunati izraz $Q_+((W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_+)v^{(0)})$ u tri dijela. Prvo ćemo djelovati pseudoinverzom Q_+ na prvi dio desne strane jednačine (D.5). Koristeći poznatu osobinu Fourierovih koeficijenata $\widehat{h}(-m) = \overline{\widehat{h}(m)}$, dobijamo

$$\begin{aligned} &Q_+\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} {h_1}^1 - i{h_2}^1 + {h_3}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 - {h_3}^1 \end{pmatrix} e^{ix^1}\right) \\ &= -\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\frac{1}{m-1} \\ &\quad\left[e^{imx^1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} {h_1}^1 - i{h_2}^1 + {h_3}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 - {h_3}^1 \end{pmatrix} e^{-i(m-1)y^1}dy^1\right. \\ &\quad\left. + e^{-imx^1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} {h_1}^1 - i{h_2}^1 + {h_3}^1 \\ {h_1}^1 + i{h_2}^1 - {h_3}^1 \end{pmatrix} e^{-i(-(m+1))y^1}dy^1\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\quad \Bigg[e^{imx^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{h}_{11}(m-1) - i\widehat{h}_{21}(m-1) + \widehat{h}_{31}(m-1) \\ \widehat{h}_{11}(m-1) + i\widehat{h}_{21}(m-1) - \widehat{h}_{31}(m-1) \end{pmatrix} \\
&\quad + e^{-imx^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)} + \overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} \\ \overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} + i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)} - \overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} \end{pmatrix} \Bigg] \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\quad \begin{pmatrix} \widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} - i\,\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1} + \overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1} \\ \widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} + i\,\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1} - \overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Drugo, djelujući sa pseudoinverzom Q_+ na drugi dio desne strane jednačine (D.5), koristeći parcijalnu integraciju, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&Q_+\left(\frac{i}{8\sqrt{\pi}} e^{ix^1} \frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} h_1{}^1 - ih_2{}^1 + h_3{}^1 \\ h_1{}^1 + ih_2{}^1 - h_3{}^1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{16\sqrt{\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\quad \Bigg[e^{imx^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{m-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-1)y^1} \begin{pmatrix} h_1{}^1 - ih_2{}^1 + h_3{}^1 \\ h_1{}^1 + ih_2{}^1 - h_3{}^1 \end{pmatrix} dy^1 \\
&\quad - e^{-imx^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{m+1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(-(m+1))y^1} \begin{pmatrix} h_1{}^1 - ih_2{}^1 + h_3{}^1 \\ h_1{}^1 + ih_2{}^1 - h_3{}^1 \end{pmatrix} dy^1 \Bigg] \\
&= -\frac{1}{16\sqrt{\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\quad \Bigg[(m-1)e^{imx^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{h}_{11}(m-1) - i\widehat{h}_{21}(m-1) + \widehat{h}_{31}(m-1) \\ \widehat{h}_{11}(m-1) + i\widehat{h}_{21}(m-1) - \widehat{h}_{31}(m-1) \end{pmatrix} \\
&\quad - (m+1)\, e^{-imx^1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)} + \overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} \\ \overline{\widehat{h}_{11}(m+1)} + i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)} - \overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} \end{pmatrix} \Bigg] \\
&= -\frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\quad \begin{pmatrix} (m-1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} + i(m+1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1} - (m+1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1} \\ (m-1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} - i(m+1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1} + (m+1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Treće, djelujući sa pseudoinverzom Q_+ na treći i posljednji dio desne strane jednačine (D.5) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&Q_+\left(\frac{\widehat{h}_{11}(0)}{4\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{ix^1}\right)\\
&\quad=\frac{\widehat{h}_{11}(0)}{16\pi\sqrt{\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\frac{1}{m-1}\left[e^{imx^1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{i(1-m)y^1}dy^1\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\,e^{-imx^1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{i(m+1)y^1}dy^1\right].
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

Za $m\in\mathbb{Z}$ imamo da je

$$
\int_0^{2\pi}e^{i(1-m)y^1}dy^1=\begin{cases}2\pi, & m=1,\\ 0, & m\neq 1,\end{cases}\quad,\quad \int_0^{2\pi}e^{i(m+1)y^1}dy^1=\begin{cases}2\pi, & m=-1,\\ 0, & m\neq -1,\end{cases}
$$

i dobijamo da sumu (D.6) ima smisla posmatrati samo ako je $m=-1$. Dakle

$$
Q_+\left(\frac{\widehat{h}_{11}(0)}{4\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{ix^1}\right)=-\frac{\widehat{h}_{11}(0)}{32\pi\sqrt{\pi}}e^{ix^1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\pi\\2\pi\end{pmatrix}=0.
$$

Spajajući sva tri računa zajedno, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&Q_+((A^{(1)}-\lambda_+^{(1)})v^{(0)})=-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\frac{1}{m-1}\\
&\begin{pmatrix}(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1}+i(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1}-(m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1}\\(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1}-i(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1}+(m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{D.7}
$$

Sada ćemo izračunati dio $((W_{1/2}^{(1)}-\lambda_+^{(1)})Q_+((W_{1/2}^{(1)}-\lambda_+^{(1)})v^{(0)})$. Budući da je

$$
\begin{aligned}
&\frac{d(Q_+((A^{(1)}-\lambda_+^{(1)})v^{(0)}))}{dx^1}=-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\frac{1}{m-1}\\
&\begin{pmatrix}im(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1}+m(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1}+im(m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1}\\im(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1}-m(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1}-im(m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx^1}\left(\begin{pmatrix}h_{31}&h_{11}-ih_{21}\\h_{11}+ih_{21}&-h_{31}\end{pmatrix}Q_+((A^{(1)}-\lambda_+^{(1)})v^{(0)})\right)\\
&=-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\frac{1}{m-1}\left[(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix}h_{11}-ih_{21}+h_{31}\\h_{11}+ih_{21}-h_{31}\end{pmatrix}e^{imx^1}\right.\\
&\qquad+i(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix}h_{11}-ih_{21}-h_{31}\\h_{11}+ih_{21}+h_{31}\end{pmatrix}e^{-imx^1}\\
&\qquad\left.-(m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix}h_{11}-ih_{21}-h_{31}\\h_{11}+ih_{21}+h_{31}\end{pmatrix}e^{-imx^1}\right],
\end{aligned}
$$

koristeći jednačine (3.75), (D.1) i (D.7), dobijamo

$$
\begin{aligned}
&(W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_{+})Q_{+}((W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_{+})v^{(0)}) \\
&\quad = -\frac{i}{32\sqrt{\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\qquad \Bigg[im(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} \begin{pmatrix} h_{11} - ih_{21} + h_{31} \\ h_{11} + ih_{21} - h_{31} \end{pmatrix} \\
&\qquad + m(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)} \begin{pmatrix} -h_{11} + ih_{21} + h_{31} \\ h_{11} + ih_{21} + h_{31} \end{pmatrix} e^{-imx^1} \\
&\qquad + im(m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} \begin{pmatrix} -h_{11} + ih_{21} + h_{31} \\ h_{11} + ih_{21} + h_{31} \end{pmatrix} e^{-imx^1} \Bigg] \\
&\quad - \frac{i}{32\sqrt{\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\qquad \Bigg[(m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)\frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} h_{11} - ih_{21} + h_{31} \\ h_{11} + ih_{21} - h_{31} \end{pmatrix} e^{imx^1} \\
&\qquad + i(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} -h_{11} + ih_{21} + h_{31} \\ h_{11} + ih_{21} + h_{31} \end{pmatrix} e^{-imx^1} \\
&\qquad - (m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}\frac{d}{dx^1} \begin{pmatrix} -h_{11} + ih_{21} + h_{31} \\ h_{11} + ih_{21} + h_{31} \end{pmatrix} e^{-imx^1} \Bigg] \\
&\quad - \frac{\widehat{h}_{11}(0)}{16\sqrt{\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1} \\
&\qquad \begin{pmatrix} (m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} + i(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1} - (m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1} \\ (m+1)\widehat{h}_{11}(m-1)e^{imx^1} - i(m-1)\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}e^{-imx^1} + (m-1)\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}e^{-imx^1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Konačno, drugi dio $\langle (W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_{+})Q_{+}(W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_{+})v^{(0)}, v^{(0)} \rangle$, koristeći (3.13), postaje

$$
\begin{aligned}
&\langle (W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_{+})Q_{+}((W^{(1)}_{1/2} - \lambda^{(1)}_{+})v^{(0)}), v^{(0)} \rangle \\
&\quad = \frac{1}{16} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}(m+1)^2\, \widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)} \\
&\quad + \frac{1}{16} \sum_{m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\, \Big(\widehat{h}_{31}(m+1) + i\widehat{h}_{21}(m+1)\Big)\Big(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - \overline{i\widehat{h}_{21}(m+1)}\Big). \qquad \text{(D.8)}
\end{aligned}
$$

Kombinujući jednačine (D.3) i (D.8), dobijamo da je formula (3.53) za koeficijent $\lambda^{(2)}_{+}$ data sa

$$\lambda_+^{(2)} = \frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) - \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m)$$
$$-\frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}\frac{1}{m-1}(m+1)^2\,\widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)}$$
$$-\frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}}(m-1)\,\Big(\widehat{h}_{31}(m+1)+i\widehat{h}_{21}(m+1)\Big)\Big(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)}-i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\Big).$$

Primjedba D.2.2. Koristeći svojstveni vektor (3.79) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = -1$ Diracvog operatora bez mase i psudoinverz (3.80) operatora $W_{1/2}+I$, analogno gornjem računu urađenom za svojstveni vektor (3.77) koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$, dobijamo da je formula (3.53) za koeficijent $\lambda_-^{(2)}$ data sa

$$\lambda_-^{(2)} = -\frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) + \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m)$$
$$-\frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}}\frac{1}{m+1}(m-1)^2\,\widehat{h}_{11}(m+1)\overline{\widehat{h}_{11}(m+1)}$$
$$-\frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}}(m+1)\,\Big(\widehat{h}_{31}(m-1)+i\widehat{h}_{21}(m-1)\Big)\Big(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)}-i\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\Big).$$

Bibliografija

[1] W. Adamowicz. Plane waves in gauge theories of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 12(9):677–691, 1980.

[2] D. Alekseevsky. Holonomy groups and recurrent tensor fields in Lorentzian spaces. *Problems of the Theory of Gravitation and Elementary Particles*, 5:5–17, 1974.

[3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. *Bull. London Math. Soc.*, 5:229–234, 1973.

[4] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77(01):43–69, 1975.

[5] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry II. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(03):405–432, 1975.

[6] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry III. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 79(01):71–99, 1976.

[7] J. Audretsch. Asymptotic behaviour of neutrino fields in curved spacetime. *Communications in Mathematical Physics*, 21(4):303–313, 1971.

[8] O. Babourova, B. Frolov, and E. Klimova. Plane torsion waves in quadratic gravitational theories in Riemann-Cartan space. *Classical and Quantum Gravity*, 16(4):1149, 1999.

[9] P. Baekler and F. W. Hehl. Beyond Einstein-Cartan gravity: quadratic torsion and curvature invariants with even and odd parity including all boundary terms. *Classical and Quantum Gravity*, 28(21):215017, 2011.

[10] C. Bär. The Dirac operator on space forms of positive curvature. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 48(1):69–83, 1996.

[11] A. Baykal. Gravitational wave solutions of quadratic curvature gravity using a null coframe formulation. *Physical Review D*, 89(6):064054, 2014.

[12] A. Baykal. Pp-waves in modified gravity. *Turk J Phys*, 1:36, 2015.

[13] M. Blagojević, F. W. Hehl, and T. Kibble. *Gauge theories of gravitation: a reader with commentaries*. Imperial College Press, 2013.

[14] H. Brinkmann. On Riemann spaces conformal to Euclidean space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, pages 1–3, 1923.

[15] R. L. Bryant. Pseudo-Riemannian metrics with parallel spinor fields and vanishing Ricci tensor. *Sémin. Congr*, 4:53–94, 2000.

[16] J. Burnett and D. Vassiliev. Modelling the electron with Cosserat elasticity. *Mathematika*, 58(02):349–370, 2012.

[17] O. Chervova. *The massless Dirac equation from the continuum mechanics and microlocal analysis perspectives*. PhD thesis, UCL (University College London), 2012.

[18] O. Chervova, R. J. Downes, and D. Vassiliev. The spectral function of a first order elliptic system. *Journal of Spectral Theory*, 3(3):317–360, 2013.

[19] O. Chervova, R. J. Downes, and D. Vassiliev. Spectral theoretic characterization of the massless Dirac operator. *Journal of the London Mathematical Society*, 89(1):301–320, 2014.

[20] O. Chervova and D. Vassiliev. The stationary Weyl equation and Cosserat elasticity. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(33):335203, 2010.

[21] C. Collinson and P. Morris. Space-times admitting neutrino fields with zero energy and momentum. *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, 6(7):915, 1973.

[22] T. M. Davis and J. R. Ray. Ghost neutrinos in general relativity. *Physical Review D*, 9(2):331, 1974.

[23] V. De Andrade, L. Guillen, and J. Pereira. Gravitational energy-momentum density in teleparallel gravity. *Physical Review Letters*, 84(20):4533, 2000.

[24] R. J. Downes, M. Levitin, and D. Vassiliev. Spectral asymmetry of the massless Dirac operator on a 3-torus. *Journal of Mathematical Physics*, 54(11):111503, 2013.

[25] R. J. Downes and D. Vassiliev. Spectral theoretic characterization of the massless Dirac action. *Mathematika*, 62:701–718, 2016.

[26] A. S. Eddington. The mathematical theory of relativity. *Cambridge: University Press, 1963, 2nd ed.*, 1, 1963.

[27] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.

[28] A. Einstein. *The meaning of relativity: Including the relativistic theory of the non-symmetric field*. Princeton University Press, 2014.

[29] L. Erdős and J. P. Solovej. The kernel of Dirac operators on $\mathbb{S}^3$ and $\mathbb{R}^3$. *Reviews in Mathematical Physics*, 13(10):1247–1280, 2001.

[30] W. Esser. Exact solutions of the metric–affine gauge theory of gravity. *University of Cologne: Diploma Thesis*, 1996.

[31] E. E. Fairchild Jr. Erratum: Gauge theory of gravitation. *Physical Review D*, 14(10):2833, 1976.

[32] E. E. Fairchild Jr. Gauge theory of gravitation. *Physical Review D*, 14(2):384, 1976.

[33] Y.-L. Fang and D. Vassiliev. Analysis as a source of geometry: a non-geometric representation of the Dirac equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(16):165203, 2015.

[34] R. Ferraro and F. Fiorini. Modified teleparallel gravity: inflation without an inflaton. *Physical Review D*, 75(8):084031, 2007.

[35] T. Friedrich. Zur Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur. *Colloquium Mathematicae*, 48(1):57–62, 1984.

[36] T. Friedrich. *Dirac operators in Riemannian geometry*, volume 25. American Mathematical Society Providence, 2000.

[37] G. Galilei. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo.* 1632.

[38] G. Galilei. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.* 1638.

[39] A. Garcia, A. Macias, D. Puetzfeld, and J. Socorro. Plane-fronted waves in metric-affine gravity. *Physical Review D*, 62(4):044021, 2000.

[40] A. A. García, F. W. Hehl, C. Heinicke, and A. Macías. The Cotton tensor in Riemannian spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 21(4):1099, 2004.

[41] P. B. Gilkey. *Asymptotic formulae in spectral geometry*. CRC press, 2003.

[42] J. Griffiths. Gravitational radiation and neutrinos. *Communications in Mathematical Physics*, 28(4):295–299, 1972.

[43] J. Griffiths. Some physical properties of neutrino-gravitational fields. *International Journal of Theoretical Physics*, 5(3):141–150, 1972.

[44] J. Griffiths. Neutrino fields in Einstein-Cartan theory. *General Relativity and Gravitation*, 13(3):227–237, 1981.

[45] J. Griffiths and R. Newing. Tetrad equations for the two-component neutrino field in general relativity. *Journal of Physics A: General Physics*, 3(3):269, 1970.

[46] J. Griffiths and R. Newing. The two-component neutrino field in general relativity. *Journal of Physics A: General Physics*, 3(2):136, 1970.

[47] J. B. Griffiths. *Colliding plane waves in general relativity*. Clarendon Press Oxford, 1991.

[48] J. B. Griffiths and J. Podolskỳ. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009.

[49] C. Grossmann, H.-G. Roos, and M. Stynes. *Numerical treatment of partial differential equations*. Springer, 2007.

[50] F. W. Hehl and A. Macias. Metric–affine gauge theory of gravity II. Exact solutions. *International Journal of Modern Physics D*, 8(04):399–416, 1999.

[51] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne'eman. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Physics Reports*, 258(1):1–171, 1995.

[52] P. W. Higgs. Quadratic Lagrangians and general relativity. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 11(6):816–820, 1959.

[53] A. D. King and D. Vassiliev. Torsion waves in metric-affine field theory. *Classical and Quantum Gravity*, 18(12):2317–2329, 2001.

[54] R. C. Kirby. *The topology of* 4*-manifolds*. Springer, 1989.

[55] D. Kramer and E. Schmutzer. *Exact solutions of Einstein's field equations*, volume 2003. Cambridge University Press Cambridge, 1980.

[56] B. Kuchowicz and J. Żebrowski. The presence of torsion enables a metric to allow a gravitational field. *Physics Letters A*, 67(1):16–18, 1978.

[57] C. Lanczos. A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions. *Annals of Mathematics*, pages 842–850, 1938.

[58] C. Lanczos. Lagrangian multiplier and Riemannian spaces. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):497, 1949.

[59] L. Landau and E. Lifshitz. The classical theory of fields. *Course of theoretical physics*, 2:5, 1975.

[60] H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38. JSTOR, 1989.

[61] B. J. McCartin. Pseudoinverse formulation of Rayleigh-Schrödinger perturbation theory for the symmetric matrix eigenvalue problem. *Journal of Applied Mathematics*, 2003(9):459–485, 2003.

[62] E. W. Mielke. On pseudoparticle solutions in Yang's theory of gravity. *General Relativity and Gravitation*, 13(2):175–187, 1981.

[63] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010. *Rev. Mod. Phys.*, 84:1527–1605, Nov 2012.

[64] U. Muench, F. Gronwald, and F. W. Hehl. A brief guide to variations in teleparallel gauge theories of gravity and the Kaniel-Itin model. *General Relativity and Gravitation*, 30(6):933–961, 1998.

[65] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. IOP Publishing, Bristol, 2nd edition, 1998.

[66] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.

[67] Y. N. Obukhov. Generalized plane-fronted gravitational waves in any dimension. *Physical Review D*, 69(2):024013, 2004.

[68] Y. N. Obukhov. Plane waves in metric-affine gravity. *Physical Review D*, 73(2):024025, 2006.

[69] Y. N. Obukhov and J. Pereira. Metric-affine approach to teleparallel gravity. *Physical Review D*, 67(4):044016, 2003.

[70] Y. N. Obukhov, E. Vlachynsky, W. Esser, R. Tresguerres, and F. Hehl. An exact solution of the metric-affine gauge theory with dilation, shear, and spin charges. *Physics Letters A*, 220(1):1–9, 1996.

[71] P. Olesen. A relation between the Einstein and the Yang-Mills field equations. *Physics Letters B*, 71(1):189–190, 1977.

[72] V. Pasic. *New vacuum solutions for quadratic metric–affine gravity*. PhD thesis, University of Bath, 2009.

[73] V. Pasic. New vacuum solutions for quadratic metric-affine gravity–a metric affine model for the massless neutrino? *Mathematica Balkanica New Series*, 24(3-4):329–340, 2010.

[74] V. Pasic and E. Barakovic. Pp-waves with torsion: a metric-affine model for the massless neutrino. *General Relativity and Gravitation*, 46(10):1–27, 2014.

[75] V. Pasic and E. Barakovic. Torsion wave solutions in Yang-Mielke theory of gravity. *Advances in High Energy Physics*, Article ID 239076:7, 2015.

[76] V. Pasic, E. Barakovic, and N. Okicic. A new representation of the field equations of quadratic metric-affine gravity. *Adv. Math. Sci. J*, 3(1):33–46, 2014.

[77] V. Pasic and D. Vassiliev. Pp-waves with torsion and metric-affine gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 22(19):3961, 2005.

[78] W. Pauli. Zur Theorie der Garvitation und der Elektrizität von Hermann Weyl. *Physikalische Zeitschrift*, 20(20):457–467, 1919.

[79] R. Pavelle. Unphysical solutions of Yang's gravitational-field equations. *Physical Review Letters*, 34(17):1114, 1975.

[80] A. Peres. Some gravitational waves. *Physical Review Letters*, 3(12):571, 1959.

[81] F. Pfäffle. The Dirac spectrum of Bieberbach manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 35(4):367–385, 2000.

[82] D. Puetzfeld. Exact solutions in metric-affine gauge theory of gravity. *University of Cologne: Diploma Thesis*, 2000.

[83] D. Puetzfeld. A plane-fronted wave solution in metric-affine gravity. In *Exact Solutions and Scalar Fields in Gravity*, pages 141–151. Springer, 2002.

[84] F. Rellich. *Perturbation theory of eigenvalue problems.* CRC Press, 1969.

[85] Y. Safarov and D. Vassilev. *The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential operators*, volume 155. American Mathematical Soc., 1997.

[86] T. Sauer. Field equations in teleparallel space–time: Einstein's *Fernparallelismus* approach toward unified field theory. *Historia mathematica*, 33(4):399–439, 2006.

[87] P. Singh. On axial vector torsion in vacuum quadratic Poincaré gauge field theory. *Physics Letters A*, 145(1):7–10, 1990.

[88] P. Singh. On null tratorial torsion in vacuum quadratic Poincaré gauge field theory. *Classical and Quantum Gravity*, 7(11):2125, 1990.

[89] P. Singh and J. Griffiths. A new class of exact solutions of the vacuum quadratic Poincaré gauge field theory. *General Relativity and Gravitation*, 22(8):947–956, 1990.

[90] G. Stephenson. Quadratic Lagrangians and general relativity. *Il Nuovo Cimento Series 10*, 9(2):263–269, 1958.

[91] A. Thompson. Yang's gravitational field equations. *Physical Review Letters*, 34(8):507, 1975.

[92] A. H. Thompson. Geometrically degenerate solutions of the Kilmister-Yang equations. *Physical Review Letters*, 35(5):320, 1975.

[93] A. Trautman. The Dirac operator on hypersurfaces. *Acta Phys. Pol. B*, 26(hep-th/9810018):1283–1310, 1995.

[94] R. Tresguerres. Exact static vacuum solution of four-dimensional metric-affine gravity with nontrivial torsion. *Physics Letters A*, 200(6):405–410, 1995.

[95] S. Ulhoa and R. Amorim. On teleparallel quantum gravity in Schwarzschild space-time. *Advances in High Energy Physics*, 2014, 2014.

[96] A. Unzicker. Teleparallel space-time with defects yields geometrization of electrodynamics with quantized charges. *arXiv preprint gr-qc/9612061*, 1996.

[97] A. Unzicker and T. Case. Translation of Einstein's attempt of a unified field theory with teleparallelism. *arXiv preprint physics/0503046*, 2005.

[98] D. Vassiliev. A tensor interpretation of the 2D Dirac equation. *arXiv:math-ph/0006019*, 2000.

[99] D. Vassiliev. Pseudoinstantons in metric-affine field theory. *General Relativity and Gravitation*, 34(8):1239–1265, 2002.

[100] D. Vassiliev. Quadratic non-Riemannian gravity. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 11(sup1):204–216, 2004.

[101] D. Vassiliev. Quadratic metric-affine gravity. *Annalen der Physik*, 14(4):231–252, 2005.

[102] D. Vassiliev. Teleparallel model for the neutrino. *Physical Review D*, 75(2):025006, 2007.

[103] H. Weyl. Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. *Ann. Phys.*, 59:101–133, 1919.

[104] J. A. Wheeler. *A journey into gravity and spacetime.* Scientific American Library, New York, 1990.

[105] F. Wilczek. Geometry and interactions of instantons. In *Quark confinement and field theory.* 1977.

[106] C.-N. Yang. Integral formalism for gauge fields. *Physical Review Letters*, 33(7):445, 1974.