Gravitacijska interpretacija nekih torzijskih talasa i analitička interpretacija Diracove jednačine†

Vedad Pašić

Odsjek matematika Univerziteta u Tuzli

Naučni kolokvij Odsjeka za matematiku
PMF Sarajevo

22. oktobar 2015.

† Zajednički rad sa Elvisom Barakovićem i Dmitrijem Vassilievom

Struktura predavanja

Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija

Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija

Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija
- pp-talasi sa aksijalnom torzijom i fizikalna interpretacija

Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija
- pp-talasi sa aksijalnom torzijom i fizikalna interpretacija
- Spektralna asimetrija Diracovog operatora bez mase

Struktura predavanja

- Metrički-afina gravitacija
- pp-talasi sa tenzorskom torzijom i fizikalna interpretacija
- pp-talasi sa aksijalnom torzijom i fizikalna interpretacija
- Spektralna asimetrija Diracovog operatora bez mase
- Diracov operator kao izvor geometrije

Metrički–afina gravitacija

Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme smatramo konektovanom realnom 4–mnogostukošću M opremljenu sa Lorentzianskom metrikom g i afinom konekcijom Γ, tj.

Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme smatramo konektovanom realnom 4–mnogostukošću M opremljenu sa Lorentzianskom metrikom g i afinom konekcijom Γ, tj.

$$\nabla_\mu u^\lambda = \partial_\mu u^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} u^\nu .$$

Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme smatramo konektovanom realnom 4–mnogostukošću M opremljenu sa Lorentzianskom metrikom g i afinom konekcijom Γ, tj.

$$\nabla_\mu u^\lambda = \partial_\mu u^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} u^\nu .$$

Nezavisna linearna konekcija Γ odvaja u startu MAG od GR - g i Γ se posmatraju kao dvije potpuno nezavisne veličine.

Metrički–afina gravitacija

Prostorvrijeme smatramo konektovanom realnom 4–mnogostukošću M opremljenu sa Lorentzianskom metrikom g i afinom konekcijom Γ, tj.

$$\nabla_\mu u^\lambda = \partial_\mu u^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} u^\nu .$$

Nezavisna linearna konekcija Γ odvaja u startu MAG od GR - g i Γ se posmatraju kao dvije potpuno nezavisne veličine.

10 nezavisnih komponenti metrike $g_{\mu\nu}$ i 64 koeficijenta konekcije $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ naše su nepoznate u MAG.

Kvadratna metrički–afina gravitacija

Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R),$$

gdje je $q(R)$ Lorentz invarijantna čisto kvadratna forma na krivini R,

Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R),$$

gdje je $q(R)$ Lorentz invarijantna čisto kvadratna forma na krivini R, koja ima 16 R^2 članova sa 16 realnih vezujućih konstanti.

Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R),$$

gdje je $q(R)$ Lorentz invarijantna čisto kvadratna forma na krivini R, koja ima 16 R^2 članova sa 16 realnih vezujućih konstanti.

Akcija je konformalno invarijantna, za razliku od Einstein–Hilbertove.

Kvadratna metrički–afina gravitacija

Akciju definišemo kao

$$S := \int q(R),$$

gdje je $q(R)$ Lorentz invarijantna čisto kvadratna forma na krivini R, koja ima 16 R^2 članova sa 16 realnih vezujućih konstanti.

Akcija je konformalno invarijantna, za razliku od Einstein–Hilbertove.

Yang–Millsova akcija za afinu konekciju je posebni slučaj

$$q(R) := R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda}{}_{\kappa}{}^{\mu\nu}.$$

Jednačine polja

Jednačine polja

Nezavisne varijacije po g i Γ nam daju Euler–Lagrangeov sistem jednačina

$$\partial S/\partial g = 0, \tag{1}$$

$$\partial S/\partial \Gamma = 0. \tag{2}$$

Klasični pp-talasi

Klasični pp-talasi

Definicija

pp-talas je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće *paralelno* spinorsko polje ($\nabla\chi = 0$).

Klasični pp-talasi

Definicija

pp-talas je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće *paralelno* spinorsko polje ($\nabla\chi = 0$).

Definicija

pp-talas je Riemannovo prostorvrijeme čija se metrika može lokalno napisati u formi

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^3 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 + f(x^1, x^2, x^3)\,(\mathrm{d}x^3)^2$$

u nekim lokalnim koordinatama.

Klasični pp-talasi

Definicija

pp-talas je Riemannovo prostorvrijeme koje prima nenestajuće *paralelno* spinorsko polje ($\nabla\chi = 0$).

Definicija

pp-talas je Riemannovo prostorvrijeme čija se metrika može lokalno napisati u formi

$$ds^2 = 2\,dx^0\,dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + f(x^1, x^2, x^3)\,(dx^3)^2$$

u nekim lokalnim koordinatama.

Dobro znana prostorvremena u GR, jednostavna formula za krivinu - samo Ricci bez traga i Weyl dijelovi krivine.

Generalizirani pp-talasi

Generalizirani pp-talasi

Pomatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i} dA.$$

Generalizirani pp-talasi

Pomatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i} dA.$$

Rješenja ove jednačine u obliku ravnih talasa se mogu napisati

$$A = h(\varphi)\, m + k(\varphi)\, l\,,$$

$$\varphi : M \mapsto \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_M l \cdot dx\,.$$

Generalizirani pp-talasi

Pomatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i} dA.$$

Rješenja ove jednačine u obliku ravnih talasa se mogu napisati

$$A = h(\varphi)\, m + k(\varphi)\, l\,,$$

$$\varphi : M \mapsto \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_M l \cdot dx\,.$$

Definicija

Generalizirani pp-talas sa tenzorskom torzijom je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i *torzijom*

Generalizirani pp-talasi

Pomatramo polarizovanu Maxwellovu jednačinu

$$*dA = \pm \mathrm{i} dA.$$

Rješenja ove jednačine u obliku ravnih talasa se mogu napisati

$$A = h(\varphi)\, m + k(\varphi)\, l\,,$$

$$\varphi : M \mapsto \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) := \int_M l \cdot dx\,.$$

Definicija

Generalizirani pp-talas sa tenzorskom torzijom je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i *torzijom*

$$T := \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A \otimes dA).$$

Teorem

Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom rješenja su jednačina polja (1) i (2).

Teorem

Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom rješenja su jednačina polja (1) i (2).

Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom imaju vrlo jednostavan eksplicitan opis.

Teorem

Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom rješenja su jednačina polja (1) i (2).

Generalizirani pp-talasi sa paralelnom Ricci krivinom imaju vrlo jednostavan eksplicitan opis.

Rezultat objavljen u “PP-waves with torsion and metric affine gravity”, V. Pasic, D. Vassiliev, *Class. Quantum Grav.* **22** 3961-3975.

Fizikalna interpretacija?

Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.

Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.
- Torzija i dio krivine koji torzija generiše su talasi koji putuju brzinom svjetla.

Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.
- Torzija i dio krivine koji torzija generiše su talasi koji putuju brzinom svjetla.
- Inherentni pp-prostor može se posmatrati kao ‘gravitacionalni otisak’ koji pravi talas nekog polja bez mase.

Fizikalna interpretacija?

- Krivina generaliziranog pp-talasa je podijeljena.
- Torzija i dio krivine koji torzija generiše su talasi koji putuju brzinom svjetla.
- Inherentni pp-prostor može se posmatrati kao ‘gravitacionalni otisak’ koji pravi talas nekog polja bez mase.
- Matematički model za neku bezmasnu elementarnu česticu?

MAG vs Einstein-Weyl

MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i \int \left(\xi^{a} \, \sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_{\mu} \bar{\xi}^{\dot{b}}) \; - \; (\nabla_{\mu} \xi^{a}) \, \sigma^{\mu}{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \right),$$

MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i \int \left(\xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \; - \; (\nabla_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \right),$$

U generaliziranom pp-prostoru, Diracova jednačina bez mase uzima formu

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \{\nabla\}_\mu \, \xi^a = 0.$$

MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i\int\Big(\xi^a\,\sigma^\mu{}_{a\dot b}\,(\nabla_\mu\bar\xi^{\dot b})\;-\;(\nabla_\mu\xi^a)\,\sigma^\mu{}_{a\dot b}\,\bar\xi^{\dot b}\Big),$$

U generaliziranom pp-prostoru, Diracova jednačina bez mase uzima formu

$$\sigma^\mu{}_{a\dot b}\{\nabla\}_\mu\,\xi^a = 0.$$

Postoje pp-talasna rješenja Einstein-Weylovog modela

MAG vs Einstein-Weyl

Posmatramo Weylovu akciju

$$S_{\mathrm{W}} := 2i \int \Big(\xi^a \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, (\nabla_\mu \bar{\xi}^{\dot{b}}) \;-\; (\nabla_\mu \xi^a) \, \sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \, \bar{\xi}^{\dot{b}} \Big),$$

U generaliziranom pp-prostoru, Diracova jednačina bez mase uzima formu

$$\sigma^\mu{}_{a\dot{b}} \{\nabla\}_\mu \, \xi^a = 0.$$

Postoje pp-talasna rješenja Einstein-Weylovog modela

$$S_{\mathrm{EW}} := k \int \mathcal{R} + S_{\mathrm{W}},$$

$$\partial S_{\mathrm{EW}} / \partial g = 0, \quad \partial S_{\mathrm{EW}} / \partial \xi = 0.$$

Fizikalna interpretacija

Fizikalna interpretacija koju predlažemo je da ova prostorvremena predstavljaju konformalno invarijantan metrički-afin model neke čestice bez mase.

Fizikalna interpretacija

Fizikalna interpretacija koju predlažemo je da ova prostorvremena predstavljaju konformalno invarijantan metrički-afin model neke čestice bez mase.

Veoma slični pp-talasnim rješenjima Einstein–Weyl modela.

Prijedlog

Generalizovani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički-afin model za neutrino bez mase.

Fizikalna interpretacija

Fizikalna interpretacija koju predlažemo je da ova prostorvremena predstavljaju konformalno invarijantan metrički-afin model neke čestice bez mase.

Veoma slični pp-talasnim rješenjima Einstein–Weyl modela.

Prijedlog

Generalizovani pp-talasi sa čisto tenzorskom torzijom i paralelnom Ricci krivinom predstavljaju metrički-afin model za neutrino bez mase.

Rezultat objavljen u “PP-waves with torsion: a metric-affine model for the massless neutrino”,
V. Pasic, E. Barakovic, *Gen. Relativ. Grav.* **46** (10), 1787 (2014).

Nova generalizacija

Nova generalizacija

Definicija

GEneralizirani pp-talas sa čisto aksijalnom torzijom je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i torzijom:

$$T := *A \tag{3}$$

Nova generalizacija

Definicija

GEneralizirani pp-talas sa čisto aksijalnom torzijom je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i torzijom:

$$T := *A \tag{3}$$

gdje je A realno vektorsko polje $A = k(\phi)\, l$, $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ proizvoljna realna funkcija faze.

Nova generalizacija

Definicija

GEneralizirani pp-talas sa čisto aksijalnom torzijom je metrički kompatibilno prostorvrijeme sa pp-metrikom i torzijom:

$$T := *A \tag{3}$$

gdje je A realno vektorsko polje $A = k(\phi)\, l$, $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ proizvoljna realna funkcija faze.

Torzija (3) je jasno čisto aksijalna.

Osobine aksijalnih pp-talasa

Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$R = -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f$$

Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$
\begin{aligned}
R &= -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f \\
&+ \frac{1}{4}k^2 \,\mathrm{Re}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \mp \frac{1}{2}k' \,\mathrm{Im}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m}))
\end{aligned}
$$

Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\}) f \\ &+ \frac{1}{4}k^2 \,\mathrm{Re}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \mp \frac{1}{2}k' \,\mathrm{Im}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \end{aligned}$$

- Torzija je

$$T = \mp \frac{i}{2} k \; l \wedge m \wedge \overline{m}.$$

Osobine aksijalnih pp-talasa

- Krivina je ponovo suma dva dijela:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{2}(l \wedge \{\nabla\}) \otimes (l \wedge \{\nabla\})f \\ &+ \frac{1}{4}k^2 \,\mathrm{Re}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \mp \frac{1}{2}k' \,\mathrm{Im}\,((l \wedge m) \otimes (l \wedge \overline{m})) \end{aligned}$$

- Torzija je

$$T = \mp\frac{i}{2}k\; l \wedge m \wedge \overline{m}.$$

- Ricci krivina je

$$Ric = \frac{1}{2}(f_{11} + f_{22} - k^2)\, l \otimes l.$$

Nova rješenja

Nova rješenja

Teorem

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2) u Yang–Mills slučaju.

Nova rješenja

Teorem

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2) u Yang–Mills slučaju.

- Sa $\{Ric\}$ označavamo Riemannov dio Ricci krivine.
- Uslov $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$ implicira da je $f_{11} + f_{22} = C$.
- Rezultat također vrijedi ako je Ric paralelno.

Nova rješenja

Teorem

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2) u Yang–Mills slučaju.

- Sa $\{Ric\}$ označavamo Riemannov dio Ricci krivine.
- Uslov $\{\nabla\}\{Ric\} = 0$ implicira da je $f_{11} + f_{22} = C$.
- Rezultat također vrijedi ako je *Ric* paralelno.

Rezultat objavljen u “Torsion Wave Solutions in Yang–Mielke Theory of Gravity”,
V. Pasic, E. Barakovic, *Advances in High Energy Physics* **2015** (239076) (2015).

Konjektura

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2)

Konjektura

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2)

Do sada dokazali za jednačinu (1), te za posebni, ali generalniji slučaj jednačine (2).

Konjektura

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2)

Do sada dokazali za jednačinu (1), te za posebni, ali generalniji slučaj jednačine (2).

Interesantna geometrija u promatranju proizvoljnih čisto aksijalno-torzijskih prostorvremena. Ranije je predloženo da se aksijalna komponenta torzije može interpretirati kao Hodgeov dual elektromagnetnog vektorskog potencijala.

Konjektura

Generalizirani pp-talasi sa čisto aksijalnom torzijom i paralelnom $\{Ric\}$ krivinom su rješenja (1), (2)

Do sada dokazali za jednačinu (1), te za posebni, ali generalniji slučaj jednačine (2).

Interesantna geometrija u promatranju proizvoljnih čisto aksijalno-torzijskih prostorvremena. Ranije je predloženo da se aksijalna komponenta torzije može interpretirati kao Hodgeov dual elektromagnetnog vektorskog potencijala.

Završetak rada očekujemo do kraja godine.

Fizikalna interpetacija

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.

Fizikalna interpetacija

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.

Ponovo razmatramo Einstein-Weyl model, kao prije.

Fizikalna interpetacija

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.

Ponovo razmatramo Einstein-Weyl model, kao prije. Rezultat sličan, no uslovi nešto drukčiji.

Fizikalna interpetacija

- Krivina prostorvremena ponovo podijeljena.
- Torzija i torzijom generisana krivina talasi koji putuju brzinom svjetlosti.

Ponovo razmatramo Einstein-Weyl model, kao prije. Rezultat sličan, no uslovi nešto drukčiji.
Kombinacija dva rješenja na žalost nemoguća.

Matematički model

Neka je M 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannianskom metrikom g.

Matematički model

Neka je M 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannianskom metrikom g.

Izaberemo trojku glatkih ortonormiranih vektora e_j. Ovo nazivamo *okvir*. Svaki vektor ima svoje koordinatne komponente $e_j^\alpha(x)$.

Matematički model

Neka je M 3-dimenzionalna konektovana orijentisana mnogostrukost bez granice sa Riemannianskom metrikom g.

Izaberemo trojku glatkih ortonormiranih vektora e_j. Ovo nazivamo *okvir*. Svaki vektor ima svoje koordinatne komponente $e_j^\alpha(x)$. *Kookvir* e^j je definisan relacijom

$$e_j^\alpha e_\alpha^k = \delta_j{}^k.$$

Diracov operator bez mase

Matrični 2 $\times$ 2 operator

$$W := -i\sigma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left(\frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \sigma^\gamma \right) \right).$$

Diracov operator bez mase

Matrični 2×2 operator

$$W := -i\sigma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left(\frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ {\beta \atop \alpha\gamma} \right\} \sigma^\gamma \right) \right).$$

Euklidska metrika, jedinični torus $\mathbb{T}^3$:

$$W = -i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Diracov operator bez mase

Matrični 2×2 operator

$$W := -i\sigma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{4}\sigma_\beta \left(\frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \sigma^\gamma \right) \right).$$

Euklidska metrika, jedinični torus $\mathbb{T}^3$:

$$W = -i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} & \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Tražimo svojstvene funkcije oblika $v(x) = ue^{im_\alpha x^\alpha}$, $m \in \mathbb{Z}^3$, $u \in \mathbb{C}^2$.

Spektar Diracovog operatora bez mase

- Nula je svojstvena vrijednost višestrukosti 2.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $\|m\|$ i jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $-\|m\|$ jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.

Spektar Diracovog operatora bez mase

- Nula je svojstvena vrijednost višestrukosti 2.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $\|m\|$ i jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.
- Za svako $m \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ imamo svojstvenu vrijednost $-\|m\|$ jedinstvenu (do reskaliranja) svojstvenu funkciju oblika $ue^{im_\alpha x^\alpha}$.
- Spektar operatora je simetričan!
- Spektralna asimetrija: trivijalna topologija 3–torusa & perturbacije euklidske metrike.

$$g_{\alpha\beta}(x^1;\epsilon) = \delta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}(x^1) + \frac{\epsilon^2}{4} k_{\alpha\beta}(x^1) + O(\epsilon^3).$$

- Dobijamo asimptotske formule za svojstvene vrijednosti ± 1.

Perturbirani problem svojstvenih vrijednosti

$$W(\epsilon)v(\epsilon) = \lambda(\epsilon)v(\epsilon)$$

Perturbirani problem svojstvenih vrijednosti

$$W(\epsilon)v(\epsilon) = \lambda(\epsilon)v(\epsilon)$$

Radimo na 3-torusu i perturbiramo metriku $g_{\alpha\beta}(x;\epsilon)$.

Perturbirani operator: $W(\epsilon) = W^{(0)} + \epsilon W^{(1)} + \epsilon^2 W^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

Perturbirani svojstveni vektor: $v(\epsilon) = v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

Perturbirana svojstvaena vrijednost: $\lambda(\epsilon) = \lambda^{(0)} + \epsilon\lambda^{(1)} + \epsilon^2\lambda^{(2)} + O(\epsilon^3)$.

Cilj: Izračunati $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$.

Principalni i subprincipalni simbol perturbiranog Diracovog operatora bez mase na polugustinama je dat pomoću okvira i kookvira sa

Principalni i subprincipalni simbol perturbiranog Diracovog operatora bez mase na polugustinama je dat pomoću okvira i kookvira sa

$$A_1(x,\xi;\epsilon) = \begin{pmatrix} {e_3}^\alpha & {e_1}^\alpha - i{e_2}^\alpha \\ {e_1}^\alpha + i{e_2}^\alpha & -{e_3}^\alpha \end{pmatrix} \xi_\alpha,$$

$$A_{\mathrm{sub}} = \frac{3}{4}(*T^{\mathrm{ax}}(x;\epsilon))I,$$

Principalni i subprincipalni simbol perturbiranog Diracovog operatora bez mase na polugustinama je dat pomoću okvira i kookvira sa

$$A_1(x,\xi;\epsilon) = \begin{pmatrix} {e_3}^\alpha & {e_1}^\alpha - i{e_2}^\alpha \\ {e_1}^\alpha + i{e_2}^\alpha & -{e_3}^\alpha \end{pmatrix} \xi_\alpha,$$

$$A_{\mathrm{sub}} = \frac{3}{4}(*T^{\mathrm{ax}}(x;\epsilon))I,$$

gdje je

$$*T^{\mathrm{ax}}(x;\epsilon) = \frac{\delta_{lk}}{3}\sqrt{\det g^{\alpha\beta}}\Big[{e^k}_1\,\partial {e^l}_3/\partial x^2 + {e^k}_2\partial {e^l}_1/\partial x^3 + {e^k}_3\partial {e^l}_2/\partial x^1 - {e^k}_1\partial {e^l}_2/\partial x^3 - {e^k}_2\partial {e^l}_3/\partial x^1 - {e^k}_3\partial {e^l}_1/\partial x^2\Big]$$

eksplicitna formula za Hodgeov dual aksijalnog dijela torzije! Rad objavljen u *Journal of the LMS*, vol. 89, p. 301–320 (2014).

Aksisimetrični slučaj

Važan poseban slučaj je kada je metrika $g(x^1;\epsilon)$ funkcija samo x^1 koordinate.

U tom slučaju moćemo izabrati i okvir i kookvir da samo zavise od x^1, a i svojstvene funkcije tražimo u obliku $v(x^1)$.

Aksisimetrični slučaj

Važan poseban slučaj je kada je metrika $g(x^1;\epsilon)$ funkcija samo x^1 koordinate.

U tom slučaju moćemo izabrati i okvir i kookvir da samo zavise od x^1, a i svojstvene funkcije tražimo u obliku $v(x^1)$.

Aksisimetrični Diracov operator bez mase na polugustinama je

$$
\begin{aligned}
W_{1/2}(\epsilon) = \\
& -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} {e_3}^1 & {e_1}^1 - i{e_2}^1 \\ {e_1}^1 + i{e_2}^1 & -{e_3}^1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx^1} - \frac{i}{2}\frac{d}{dx^1}\begin{pmatrix} {e_3}^1 & {e_1}^1 - i{e_2}^1 \\ {e_1}^1 + i{e_2}^1 & -{e_3}^1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{\delta_{jk}}{4\sqrt{\det g_{\alpha\beta}}}\left({e^j}_3\left(\frac{d{e^k}_2}{dx^1}\right) - {e^j}_2\left(\frac{d{e^k}_3}{dx^1}\right)\right) I,
\end{aligned}
$$

Glavni rezultat

Pod proizvoljnim perturbacijama metrike $g(x^1;\epsilon)$, koeficijenti asimptotskog razvoja svojstvenih vrijednosti ± 1

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 + \lambda_+^{(1)}\epsilon + \lambda_+^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{kako} \ \epsilon \to 0,$$
$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \lambda_-^{(1)}\epsilon + \lambda_-^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{kako} \ \epsilon \to 0,$$

mogu se izračunati eksplicitno. Očekivana objava rezultata u prvoj polovini 2016.

Glavni rezultat

Pod proizvoljnim perturbacijama metrike $g(x^1;\epsilon)$, koeficijenti asimptotskog razvoja svojstvenih vrijednosti ± 1

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 + \lambda_+^{(1)}\epsilon + \lambda_+^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{kako} \ \epsilon \to 0,$$
$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \lambda_-^{(1)}\epsilon + \lambda_-^{(2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \ \text{kako} \ \epsilon \to 0,$$

mogu se izračunati eksplicitno. Očekivana objava rezultata u prvoj polovini 2016.

Koeficijenti linearog izraza

$$\lambda_+^{(1)} = -\frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0), \quad \lambda_-^{(1)} = \frac{1}{2}\widehat{h}_{11}(0).$$

$$\lambda_+^{(2)} = \frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) - \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m)$$
$$- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} \frac{1}{m-1}(m+1)^2\,\widehat{h}_{11}(m-1)\overline{\widehat{h}_{11}(m-1)}$$
$$- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{31}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right)$$
$$- \frac{i}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}} (m-1)\widehat{h}_{21}(m+1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m+1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m+1)}\right),$$

$$\lambda_-^{(2)} = -\frac{3}{8}\widehat{(h^2)}_{11}(0) + \frac{1}{8}\widehat{k}_{11}(0) - \frac{i}{16}\varepsilon_{\beta\gamma 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m\overline{\widehat{h}_{\alpha\beta}(m)}\widehat{h}_{\alpha\gamma}(m)$$
$$- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{1}{m+1}(m-1)^2\,\widehat{h}_{11}(m+1)\overline{\widehat{h}_{11}(m+1)}$$
$$- \frac{1}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{31}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right)$$
$$- \frac{i}{16}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} (m+1)\widehat{h}_{21}(m-1)\left(\overline{\widehat{h}_{31}(m-1)} - i\overline{\widehat{h}_{21}(m-1)}\right),$$

Primjer spektralne asimetrije

Za perturbacijske matrice

$$h_{\alpha\beta}(x^1) = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ 0 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}, \quad k_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ \cos x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

imamo

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

$$\lambda_-(\epsilon) = -1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Tako imamo $\lambda_+^{(1)} + \lambda_-^{(1)} = 0$ and $\lambda_+^{(2)} + \lambda_-^{(2)} \neq 0$.

Primjer spektralne asimetrije

Za perturbacijske matrice

$$h_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} 1 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ \cos x^1 & \cos x^1 & \sin x^1 \\ \sin x^1 & \sin x^1 & -\cos x^1 \end{pmatrix}, k_{\alpha\beta}(x^1) = \begin{pmatrix} \sin x^1 & \cos x^1 & 0 \\ \cos x^1 & -\sin x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

imamo

$$\lambda_+(\epsilon) = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{4}\epsilon^2 + O(\epsilon^3),$$

$$\lambda_-(\epsilon) = -1 + \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Tako da je $\lambda_+^{(1)} + \lambda_-^{(1)} = 0$ and $\lambda_+^{(2)} + \lambda_-^{(2)} \neq 0$.

Ekspazija problema

Sada radimo na 4-mnogostrukosti M. Neka nam je data pozitivna gustina ρ. Radimo na 2-kolonama $v : M \mapsto \mathbb{C}^2$ skalarnih polja.

Unutrašnji proizvod je

$$\langle u, w \rangle = \int_m w^* v \rho dx.$$

Ekspazija problema

Sada radimo na 4-mnogostrukosti M. Neka nam je data pozitivna gustina ρ. Radimo na 2-kolonama $v : M \mapsto \mathbb{C}^2$ skalarnih polja.

Unutrašnji proizvod je

$$\langle u, w \rangle = \int_m w^* v \rho dx.$$

Želimo posmatrati formalno samokonjugovan linearni diferencijalni operator prvog reda L koji djeluje na 2-kolonama skalarnih polja kompleksnih vrijednosti.

Ekspazija problema

Sada radimo na 4-mnogostrukosti M. Neka nam je data pozitivna gustina ρ. Radimo na 2-kolonama $v : M \mapsto \mathbb{C}^2$ skalarnih polja.

Unutrašnji proizvod je

$$\langle u, w \rangle = \int_m w^* v \rho dx.$$

Želimo posmatrati formalno samokonjugovan linearni diferencijalni operator prvog reda L koji djeluje na 2-kolonama skalarnih polja kompleksnih vrijednosti.

U lokalnim koordinatama operator je

$$L = U^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + V(x),$$

Ekspazija problema

Sada radimo na 4-mnogostrukosti M. Neka nam je data pozitivna gustina ρ. Radimo na 2-kolonama $v : M \mapsto \mathbb{C}^2$ skalarnih polja.

Unutrašnji proizvod je

$$\langle u, w \rangle = \int_m w^* v \rho dx.$$

Želimo posmatrati formalno samokonjugovan linearni diferencijalni operator prvog reda L koji djeluje na 2-kolonama skalarnih polja kompleksnih vrijednosti.

U lokalnim koordinatama operator je

$$L = U^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + V(x),$$

gdje su $U^\alpha(x)$ i $V(x)$ neke 2×2 matrične funkcije.

Definišemo principalni simbol L_{prin} i subprincipalni simbol L_{sub}, kao prije, koji jedinstveno određuju operator L.

Definišemo principalni simbol L_{prin} i subprincipalni simbol L_{sub}, kao prije, koji jedinstveno određuju operator L.

Determinanta principalnog simbola je kvadrtana forma momentuma p

$$\det L_{prin}(x,p) = -g^{\alpha\beta}(x)p_\alpha p_\beta,$$

gdje se koeficijenti $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ mogu interpretirati kao komponente contravarijantnog metričkog tenzora! Metrika je Lorentzianska.

Teorem [J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 165203]

Diracova jednačina u zakrivljenom prostorvremenu može se zapisati kao sistem od 4 jednačine

$$\begin{pmatrix} L & m\,I \\ m\,I & \mathrm{Adj}\,L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

Teorem [J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 165203]

Diracova jednačina u zakrivljenom prostorvremenu može se zapisati kao sistem od 4 jednačine

$$\begin{pmatrix} L & m\,I \\ m\,I & Adj\,L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

Ovdje je m masa elektrona, I je jedinična matrica, v, w su nepoznate 2-kolone skalarnih polja kompleksnih vrijednosti.

Četiri fundamentalne jednačine teorijske fizike

1. Maxwellove jednačine. Opisuju elektromagnetizam i fotone.
2. Diracova jednačina. Opisuje elektrone i pozitrone.
3. Diracova jednačina bez mase. Opisuje neutrine i antineutrine.
4. Linearizovane Einsteinove jednačine polja generalne relativnosti. Opisuju gravitaciju.

Sve četiri sadrže istu fizikalnu konstantu, c.

Prihvaćeno objašnjenje

Stvoritelj je geometar. On/a je napravio/la 4-dimenzionalni svijet parametrizovan pomoću lokalnih koordinata x^1, x^2, x^3, x^4 u kojem se udaljenosti mjere na čudan, Lorentzov način.

Prihvaćeno objašnjenje

Stvoritelj je geometar. On/a je napravio/la 4-dimenzionalni svijet parametrizovan pomoću lokalnih koordinata x^1, x^2, x^3, x^4 u kojem se udaljenosti mjere na čudan, Lorentzov način.

Nakon što se odlučio/la da iskoristi Lorentzovu metriku, stvoritelj je onda napisao glavne jednačine teorijske fizike koristeći se samo geometrijskim konstrukcijama, tj. konceptima konekcije, krivine, torziije, itd.

Na ovaj način, sve jednačine sadrže istu konstantu, brzinu svjetlosti, u sebi.

Alternativno objašnjenje

Stvoritelj je analitičar. On je napravio 4-dimezionalni svijet, te je onda napisao jedan sistem nelineralnih PDJ koje opisuju sve fenomene u svemiru.

Alternativno objašnjenje

Stvoritelj je analitičar. On je napravio 4-dimezionalni svijet, te je onda napisao jedan sistem nelineralnih PDJ koje opisuju sve fenomene u svemiru.

Napravivši ovo, stvoritelj nije imao neki posebni način mjerenja udaljenosti na umi, a ovaj sistem PDJ ima različita rješenja koja mi interpretiramo kao elektromagnetizam, gravitacija, elektroni, neutrini, itd.

Alternativno objašnjenje

Stvoritelj je analitičar. On je napravio 4-dimezionalni svijet, te je onda napisao jedan sistem nelineralnih PDJ koje opisuju sve fenomene u svemiru.

Napravivši ovo, stvoritelj nije imao neki posebni način mjerenja udaljenosti na umi, a ovaj sistem PDJ ima različita rješenja koja mi interpretiramo kao elektromagnetizam, gravitacija, elektroni, neutrini, itd.

Razlog zbog kojeg se ista fizikalna konstanta, c, manifestira u svim fizikalnim fenomenima je taj što gledamo različita rješenja istog sistema PDJ.

Moguća prednost ovog pristupa je da postoji šansa da opišemo interakcije fizikalnih polja na mnogo konzistentniji neperturbativni način.

Krunoslav Ljolje

(Jajce 1928. - Sarajevo 2003.)

Hvala na pažnji i dobro došli u Tuzlu!