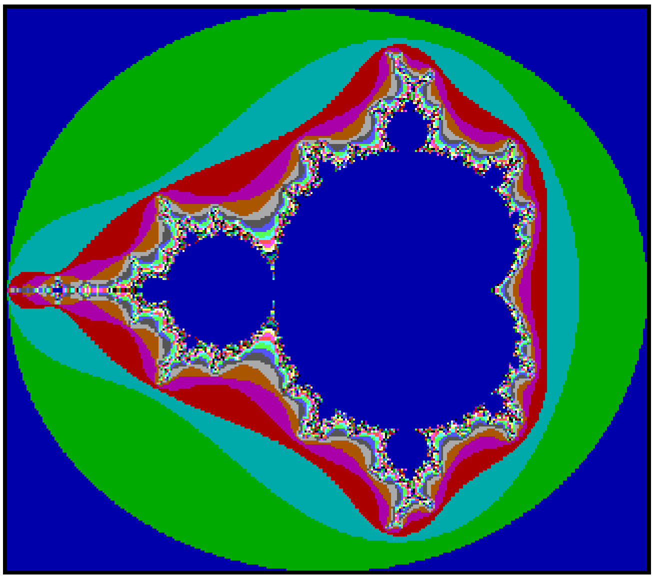
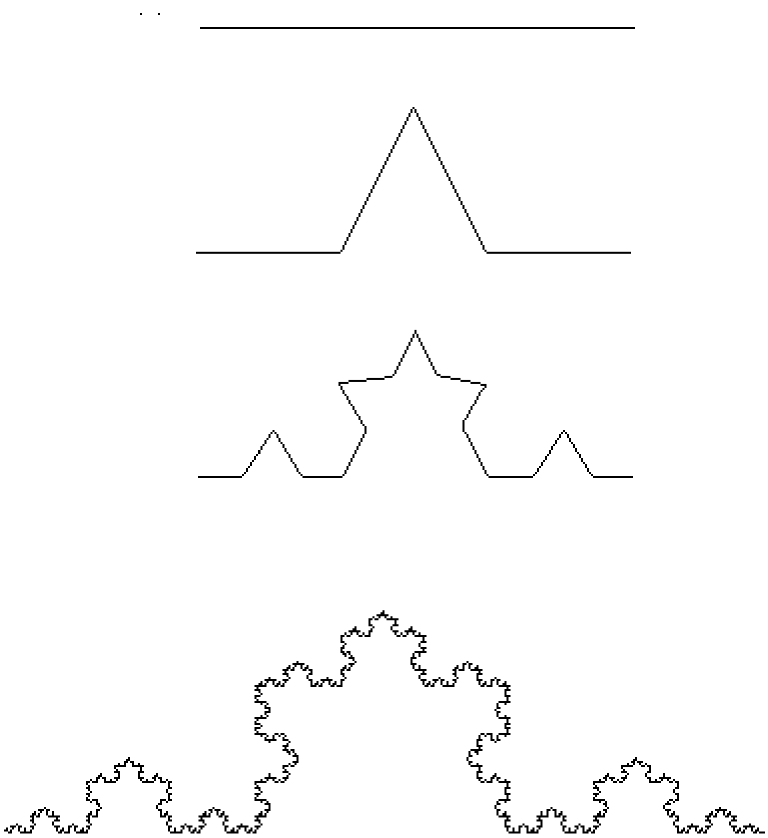
FRAKTALNA DIMENZIJA



Koliko je vruća snježna pahuljica?

Vedad Pašić



Konstrukcija Von Koch-ove krive
d(F) = ln4/ln3

Skup *F* u Euklidskom prostoru smatramao fraktalom ako:

1. *F* ima finu strukturu;

2. *F* je previše iregularan da bi se opisao u tradicionalnom geometrijskom jeziku – lokalno i globalno;

3. F ima neku vrstu samo – sličnosti, možda statističku ili približnu;

4. *Fraktalna dimenzija F* je veća od topološke dimenzije;

5. *F* često ima jednostavnu, nekad rekurzivnu definiciju;

6. *F* ima prirodan izgled;

Hausdorff – ova mjera i dimenzija

Felix Hausdorff (1869-1942)

$H^s_\varepsilon(F) = \inf \{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\}$ je ε *-pokrivač* $F\}$.

Hausdorff – ova mjera skupa F (s-dimenzionalna):

$$\boxed{H^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} H^s_\varepsilon(F)}$$

Hausdorff – ova dimenzija skupa F:

$$\dim_H F = \inf\{s: \boldsymbol{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s: \boldsymbol{H}^s(F) = \infty\}$$

Konstrukcija Cantor – ovog skupa *F*

d(F) = ln 2/ ln 3

Dimenzija Minkowskog

Hermann Minkowski (1864 – 1909)

Dimenzija Mikowskog se definiše sa:

$$\boxed{\dim_M F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}}$$

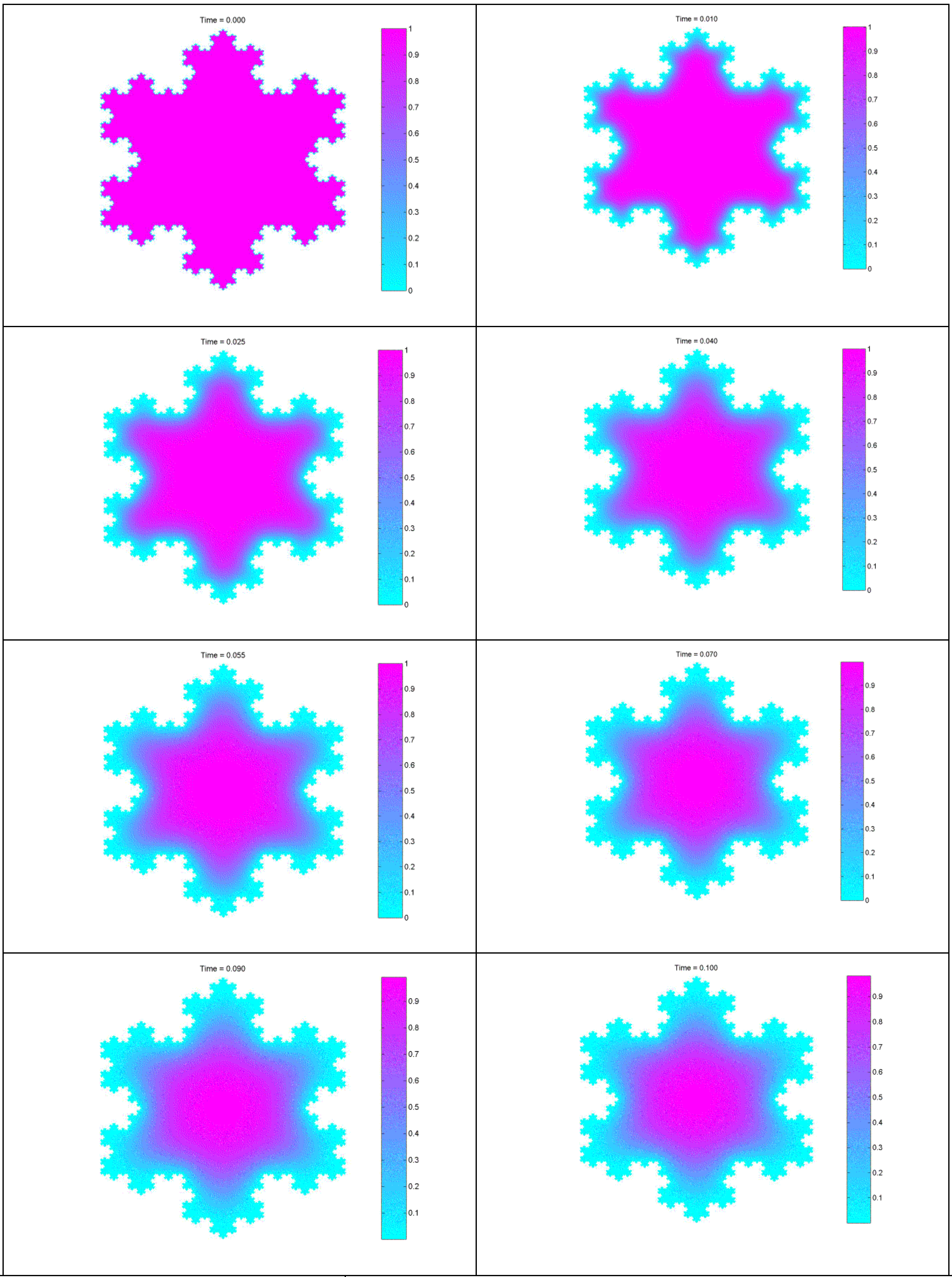
gdje je $N_\varepsilon(F)$ najmanji broj zatvorenih lopti koje pokrivaju F.

Ako je $F \subset \Im^n$

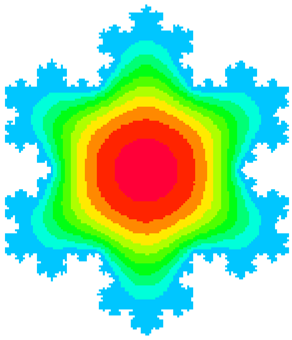
$$\boxed{\dim_M F = n - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln vol^n(F_\varepsilon)}{\ln \varepsilon}}$$

Veza između dimenzija:

$$\boxed{\dim_{\mathrm{H}} \mathrm{F} \le \underline{\dim}_M F \le \overline{\dim}_M F}$$



Za fizičare	Za matematičare
Slike prikazuju distribuciju temperature unutar Von Koch-ove pahuljice. Inicijalno se tijelo drži na temperaturi 1, a granica je uvijek temperature 0. Vidimo kako se tijelo hladi.	Slika prikazuje rješenje *u(x,t)* graničnog problema inicijalne vrijednosti za toplotnu jednačinu $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t)$ $t>0,\ x\in S$, sa inicijalnim uslovom $u(x,0)=1$ za $x\in S$, te Dirichlet – ovim graničnim uslovom $u\|_{\partial S}=0$, gdje je S trijadska Von Koch-ova pahuljica.



- U prošlosti su skupovi nedovoljno glatkih funkcija ignorisani

- Fraktalna geometrija daje okvir za njihovo proučavanje

- Termin 'fraktal' – od 'fractus' (lat.) *slomljen*

- Mnoge matematičke definicije pojma

- Najčešća osobina – *samo-sličnost* i česta je kod prirodnih fraktala

- Svi prirodni i neki apstraktni samo-slični fraktali su *stohastični*

- Fraktali ne posjeduju osobinu translacione simetrije

- Ključna karakteristika fraktala – *fraktalna dimenzija*

- Velika primjena fraktala pored matematičke : fizička hemija, fiziologija, mehanika fluida, statistička mehanika, računarska grafika.