Parcijalne diferencijalne jednačine [1]

Vedad Pašić

Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Tuzli

[1] Sva prava zadržana. Svako objavljivanje, štampanje ili umnožavanje zahtjeva odobrenje autora

Predmet: Parcijalne diferencijalne jednačine

Predavač: Vedad Pašić

Semestar: Zimski 2008/2009.

Kabinet: PMF 311

Telefon: 061-195464

Email: vedad.pasic@untz.ba

Web: http://www.vedad.com.ba/pmf/pdj/

Organizacija

- 2h predavanja (ponedjeljak 12-14) i 2h vježbi
- Imaćemo sedmične problemske zadaće
- ...rad na zadaći se *jako preporučuje*!
- Kabinetski sati: Četvrtak 10-11

Literatura

- M. Aganović, K. Veselić: Linearne diferencijalne jednadžbe, PMF - Matematički odjel, Zagreb (1992)

- V.I. Arnold : Lectures on Partial Differential Equations, Springer (2004)

- E.T. Copson : Partial differential equations, Cambridge University Press (1975)

- R. Haberman : Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, Prentice-Hall (1987)

- K.Tung : Partial Differential Equations and Fourier Analysis. An Introduction

- H.F. Weinberger : A First Course in Partial Differential Equations, Dover Publications (1995)

- F. John: Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York (1978)

- W.A. Strauss: Partial Differential Equations. An Introduction, John Wiley

- W.E. Williams: Partial Differential Equations, Clarendon Press, Oxford

- L.C. Evans: Partial Differential Equations, AMS

- E.C. Zachmanoglu, D.W. Thoe: Introduction to Partial Differential Equations with Applications, Dover

- V.S. Vladimirov: Uravnenija matematiceskoj fiziki, Nauka, Moskva (1976)

0.1 Opis kursa

0.1.1 Manifest

Naša misija:

Upoznati vas sa osnovama teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina. Na kraju ovog kursa biste trebali moći:

- riješiti primjerne probleme parcijalnih diferencijalnih jednačina;
- navesti i dokazati energetske nejednakosti, principe maksimuma i poredbe, Greenove identitete i teoremu reprezentacije;
- znati klasifikaciju parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

Kakav će ovaj predmet biti: Ovo će biti "čisti" kurs sa dosta definicija, teorema i njihovih dokaza.

Predznanje:

- Diferencijalni račun
- Obične diferencijalne jednačine

0.1.2 Program ukratko

- Talasna, toplotna i Laplaceova jednačina
- Problemi početne i granične vrijednosti
- d'Alembertova formula
- Putujući talasi
- Duhamelov princip
- Metoda separacije promjenljivih
- Fourierovi redovi i Fourierove metode transformacije
- Metoda nejednakosti energije
- Maksimalni princip

- Harmonijske funkcije
- Energetska metoda
- Klasifikacija jednačina drugog reda.

Poglavlje 1

Uvod u parcijalne diferencijalne jednačine

1.1 Notacija i osnovne definicije

Sa $\mathbb{R}^n$ ćemo označavati n-dimenzionalni Euclidski prostor. Tačka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je element $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, gdje su $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$.

Neka je Ω skup u $\mathbb{R}^n$. Funkcija $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ se zove *neprekidnom u* $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ ako

$$\lim_{\Omega \ni \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0).$$

Ovdje $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ znači da $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \to 0$, gdje je

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| := \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2 \right)^{1/2} \tag{1.1}$$

udaljenost između $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}^0$. Funkcija f je neprekidna na Ω ako je neprekidna za svako $\mathbf{x}^0 \in \Omega$.

Reći ćemo da *parcijalni izvod* $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ postoji u $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ ako slijedeći limes postoji

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(\mathbf{x}^0)}{h}. \tag{1.2}$$

Pretpostavimo da $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ postoji za sva $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Onda je $\frac{\partial f}{\partial x_k} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) funkcija i možemo posmatrati njene parcijalne izvode, npr. $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}$.

Važna činjenica o parcijalnim izvodima je da je redoslijed po kojem diferenciramo nevažan ako su svi izvodi koje posmatramo neprekidni. Na primjer

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}f = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}f$$

ako su $\frac{\partial f}{\partial x_k}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}f, \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}f$ neprekidni.

1.1.1 Lančano pravilo

Pretpostavimo da su

$$u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \mapsto \Omega_0 \subset \mathbb{R}^m,$$
$$\varphi : \Omega_0 \mapsto \mathbb{R}(\text{ ili } \mathbb{C})$$

neprekidne i da imaju neprekidne parcijalne izvode prvog reda na Ω i Ω_0 respektivno. Posmatrajmo kompoziciju $\varphi \circ u$

$$(\varphi \circ u)(\mathbf{x}) = \varphi(u(\mathbf{x})) = \varphi(u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})).$$

Ova funkcija $\varphi \circ u$ je neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda na Ω koji su dati formulom

$$\frac{\partial(\varphi \circ u)}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi(u(\mathbf{x}))}{\partial u_j}\frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_k}. \tag{1.3}$$

1.1.2 Multiindeks

Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, gdje je $\mathbb{N}_0^n = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ i $\alpha_k \in \mathbb{N}_0, k = 1, 2, \ldots, n$. “Dužina” α je $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Primjetite razliku sa $|\mathbf{x}|$ za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Parcijalni izvodi

$$\partial^\alpha u(\mathbf{x}) = \partial^\alpha_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(\mathbf{x}),$$

gdje je $\partial_k^{\alpha_k} u(\mathbf{x}) = \partial_{x_k}^{\alpha_k} u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{\alpha_k} u(\mathbf{x})}{\partial x_k^{\alpha^k}}$ α_k -ti parcijalni izvod u odnosu na x_k, tj. $\frac{\partial}{\partial x_k}$ primjenjen na $u(\mathbf{x})$ α_k puta.

Uvijek ćemo pretpostaviti da je ’sve’ neprekidno i da je redoslijed diferenciranja nevažan.

$|\alpha|$ je ukupni broj diferenciranja, tj. *red* parcijalnog izvoda. ako je $|\alpha| = 0$, imamo da je

$$\partial^\alpha u(\mathbf{x}) := u(x).$$

Primjer 1.1

$n = 3$, $\alpha = (0, 5, 7)$,

$$\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^5}{\partial x_2^5} \frac{\partial^7}{\partial x_3^7} u(\mathbf{x}).$$

∎

1.2 Uvod u parcijalne diferencijalne jednačine

Neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i neka je $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ neka funkcija. Onda se jednačina

$$F(\mathbf{x}, u, \partial_{x_1} u, \ldots \partial_{x_n} u, \ldots \partial^{\alpha} u, \ldots) = 0, \tag{1.4}$$

gjde je F znana funkcija $\mathbf{x}$, u i konačno mnogo parcijalnih izvoda funkcije u, zove *parcijalna diferencijalna jednačina* za u. Funkcije F i u mogu biti vektorske i u tom slučaju imam sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Parcijalni izvodi se razumjevaju po komponentama:

$$\partial^{\alpha} = (\partial^{\alpha} u_1, \partial^{\alpha} u_2, \ldots, \partial^{\alpha} u_n).$$

Mi ćemo se samo baviti *linearnim* jednačinama.

Definicija 1.2.1. Linearna PDJ je jednačina oblika:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(\mathbf{x}) \partial^{\alpha} u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{1.5}$$

Ovdje su f i a_{α} date funkcije i tražimo u. Jednačina (1.5) se zove *homogena* ako je $f \equiv 0$, a *nehomogena* inače. m se zove *red* jednačine (1.5). Mi ćemo se pretežno baviti jednačinama do drugog reda.

Na primjer, neka je $n = 2$ i $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onda za bilo koju neprekidnu funkciju $f(t)$, $u(x, y) = f(x - y)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.6}$$

Ovakvo u zovemo riješenjem PDJ. Za datu jednačinu i/ili granične uslove želimo postaviti slijedeća pitanja

1. Da li rješenje postoji?
2. Ako postoji, da li je jedinstveno?
3. Ako jedinstveno rješenje postoji, da li se može odrediti?
4. Da li je rješenje stabilno pod malim peturbacijama datih podataka?

U gornjem primjeru, data PDJ ima mnogo rješenja $u(x, y) = f(x - y)$, jer je f bilo koja diferencijabilna neprekidna funkcija jedne promjenljive. u gornjem primjeru, posmatrajmo rejšenje koje zadovoljava uslove

(i) $u(x, 0) = \varphi(x)$, gdje je φ dato; ili

(ii) $u(x, x) = \psi(x)$, gdje je ψ dato

Vidimo da su rezultati značajno drugačiji. Za slučaj (i), u je rješenje (1.6), tako da je $u(x, y) = f(x - y)$ za neko f. Kako takodjer zahtjevamo da u zadovoljava (i), imamo da je $u(x, 0) = f(x)$. S druge strane, $u(x, 0) = \varphi(x)$, što je date funkcija, pa stoga moramo imati da je $f(x) = \varphi(x)$. Stoga rješenje (1.6) pod uslovom (i) je $u(x, y) = \varphi(x - y)$. Početni uslov (i) ograničava broj rješenja, tj. samo kada je $f = \varphi$ rješenje za (1.6) može da zadovolji i jednačinu i početni uslov.

Situacija u slučaju (ii) je značajno drugačija. Ako neko rješenje jednačine (1.6) $u(x, y) = f(x - y)$ zadovoljava (ii), tj. $u(x, x) = \psi(x)$, onda je $f(0) = \psi(x)$. Jednačina (1.6) i (ii) ima rješenje samo ako je ψ konstantna funkcija.

Teorija i aplikacije PDJ imaju dugu historiju. Pojavile su se malo poslije izuma diferencijalnog računa. Od tada se koriste da modeliraju probleme u prirodnim naukama i inžinjertvu. Nedavno su se počele koristiti i u finansijama, indutriji i drugim granama ekonomije i života.

Kao što smo već rekli, u ovom kursu ćemo se pretežno baviti jednačinama drugog reda sa velikom motivacijom iz fizike: talana jednačina, toplotna jednačina i Laplaceova jednačina. Također ćemo proučavati jednačine prvog reda i njihova rješenja i klasifikaciju jednačina drugog reda sa dvije nezavisne promjenljive. Opšte situacije ćemo ukratko objasniti.

Ove tri gore spomenute jednačine (toplotna, talasna i Laplaceova) su prototipovi tri tipične jednačine drugog reda. One su hiperblične (talasna), parabolične (toplotna) i eliptične (Laplaceova i Poissionova) jednačine. Posmatramo dva tipa problema:

1. kvantitativne probleme: kako rješiti problem ili kako naći ekspilictnu formulu za rješenje;

2. kvalitativne probleme: kako dobiti informacije o rješenjima bez eksplicitnog rješavanja, npr. problem jedinstvenosti rješenja.

Za problem (1), primjenjujemo teorije za obične diferencijalne jednačine, Fourierovu analizu, i diferencijalni račun funkcija više promjenljivih. Za problem (2), koristimo se takozvanom energetskom nejednakošću za talasnu jednačinu, i različite maksimalne principe kako bismo promatrali toplotnu i Laplaceovu jednačinu.

1.3 Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda

Kako ćemo se pretežno baviti ovim jednačinama, pogledajmo ih pobliže odmah na startu. Parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda (linearna dakako!) je jednačina oblika

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(\mathbf{x})\partial^\alpha u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{1.7}$$

Jednačinu (1.7) možemo drugačije zapisati kao

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

Možemo pretpostaviti da je $a_{jk}(\mathbf{x}) \equiv a_{kj}(\mathbf{x})$. Doista, kako je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j},$$

imamo slijedeće

$$a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + a_{kj}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} = (a_{jk}(\mathbf{x}) + a_{kj}(\mathbf{x}))\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} =$$

$$= \frac{1}{2}(a_{jk}(\mathbf{x}) + a_{kj}(\mathbf{x}))\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{1}{2}(a_{jk}(\mathbf{x}) + a_{kj}(\mathbf{x}))\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}$$

Stoga se (1.8) neće promjeniti ako zamjenimo $a_{jk}(\mathbf{x})$ sa $a_{kj}(\mathbf{x})$ sa $\frac{1}{2}(a_{jk}(\mathbf{x}) + a_{kj}(\mathbf{x}))$. Uvijek ćemo pretpostaviti da je $a_{jk}(\mathbf{x}) = a_{kj}(\mathbf{x})$.

1.3.1 Tri osnovna primjera

Laplaceova jednačina

$$\Delta u = 0, \tag{1.9}$$

gdje je

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Poissonova jednačina je nehomogena Laplaceova jednačina

$$\Delta u = f \tag{1.10}$$

U primjeni, ove jednačine opisuju stacionarne procese, dakle one koje ne zavise o vremenu.

Talasna jednačina

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} = 0. \tag{1.11}$$

U primjenama ova jednačina opisuje vibracije, propagaciju talasa i slične nestacionarne procese. y_1 se uobičajeno korsiti da predstavlja *vrijeme*. Stoga, promjenimo notaciju:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0. \tag{1.12}$$

Primjetite da sada ima $n+1$ promjenljiva. Dakako, talasnu jednačinu možemo zapisati kao

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0. \tag{1.13}$$

Promjenljiva t se zove vrijeme, a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se zove prostorna promjenljiva.

Operator

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{1.14}$$

se zove *talasni operator* ili *d'Alembertov operator*.

Toplotna jedačina

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \tag{1.15}$$

u aplikacijama ova jednačina opisuje toplotnu provodljivost, difuziju i druge slične nestacionarne procese.

1.4 Klasifikacija linearnih PDJ drugog reda

Potsjetimo se jednačine (1.8):

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x})$$

i činjenice da uvijek podrazumjevamo da je $a_{jk}(\mathbf{x}) = a_{kj}(\mathbf{x})$, tj. matrica $(a_{jk}(\mathbf{x}))_{j,k=1}^{n}$ je *simetrična*. Znamo iz linearne algebre da ova matrica ima n ne neophodno različitih *svojstvenih vrijednosti*.

Označimo ove svojstvene vrijednosti sa

$$\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \ldots, \lambda_n(\mathbf{x}),$$

što su rješenja jednačine

$$\det\left[(a_{jk}(\mathbf{x}))_{n\times n} - \lambda I\right] = 0.$$

Definicija 1.4.1. Fiksirajmo tačku $\mathbf{x}^0 \in \Omega$.

1. Ako su $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0), \ldots, \lambda_n(\mathbf{x}^0)$ *različite od nule* i imaju *isti znak*, onda se jednačina (1.8) zove *eliptična* u $\mathbf{x}^0$.
2. Ako su $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0), \ldots, \lambda_n(\mathbf{x}^0)$ *različite od nule* i sve *osim jedne* imaju *isti znak*, onda se jednačina (1.8) zove *hiperbolična* u $\mathbf{x}^0$.
3. Ako su $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0), \ldots, \lambda_n(\mathbf{x}^0)$ *različite od nule* i najmanje dvije su pozitivne i najmanje dvije su negativne, onda se jednačina (1.8) zove *ultrahiperbolična* u $\mathbf{x}^0$.
4. Ako barem jedna od $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0), \ldots, \lambda_n(\mathbf{x}^0)$ je *jednaka nuli*, onda se jednačina (1.8) zove *parabolična* u $\mathbf{x}^0$.

Primjedba 1.4.2. Mi nećemo posmatrati ultrahiperbolične jednačine.

Primjedba 1.4.3. Jednačina (1.8) se zove paraboličnom, hiperboličnom, eliptičnom, ... na cijeloj Ω ako je parabolična, hiperbolična, eliptična, ... za svako $\mathbf{x}^0 \in \Omega$.

Primjedba 1.4.4. Ova terminologija je povezana sa činjenicom da je skup

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \sum_{j,k=1}^{2} a_{jk}(\mathbf{x}^0)\xi_j\xi_k + \sum_{j,k}^{2} a_j(\mathbf{x}^0)\xi_j = const\right\}$$

1. elipsa, ako su $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0)$ različite od nule i imaju isti znak;
2. hipebola, ako su $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0)$ različite od nule i imaju suprotan znak;
3. parabola, ako je jedno od $\lambda_1(\mathbf{x}^0), \lambda_2(\mathbf{x}^0)$ jednako nuli.

Primjer 1.2

Laplaceova jednačina
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$
Imamo slijedeću situaciju:

$$a_{jk}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \text{ako je } j \neq k,$$

$$a_{kk}(\mathbf{x}) \equiv 1, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$
Stoga je matrica $(a_{jk}(\mathbf{x}))_{j,k=1}^{n} \equiv I$ jednaka identitetu.

$$\det\left[(a_{jk}(\mathbf{x})) - \lambda I\right] = \det[(1-\lambda)I] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^n$$

Stoga imamo $\lambda_1(\mathbf{x}) = \lambda_2(\mathbf{x}) = \cdots = \lambda_n(\mathbf{x}) = 1$, pa je stoga Laplaceova jednačina *eliptična*. ∎

Primjer 1.3

Talasna jednačina
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$
Imamo situaciju

$$a_{jk}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{ako je } j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ldots, n, n+1,$$

$$a_{11}(\mathbf{x}) \equiv 1,$$

$$a_{kk}(\mathbf{x}) \equiv -1, \quad k = 2, 3, \ldots, n, n+1.$$
Stoga imamo da je matrica

$$(a_{jk}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

pa je

$$\det(a_{jk}(\mathbf{x}) - \lambda I) = (-1)^n (1-\lambda)(1+\lambda)^n.$$

Stoga zaključujemo da su svojstvene vrijednosti:

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = 1,\ \lambda_2(\mathbf{x}) = \lambda_3(\mathbf{x}) = \cdots = \lambda_n(\mathbf{x}) = \lambda_{n+1}(\mathbf{x}) = -1,$$

pa je stoga talasna jednačina hiperbolična. ∎

Primjer 1.4

Toplotna jednačina

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Imamo da je

$$a_{jk}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \text{ako je } j \neq k,$$

$$a_{11}(\mathbf{x}) \equiv 0, \text{jer se ne pojavljuje } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$a_{kk}(\mathbf{x}) \equiv -1, \quad j = 2, 3, \ldots, n, n+1.$$

$$(a_{jk}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det((a_{jk}(\mathbf{x})) - \lambda I) = (-1)^n \lambda (1+\lambda)^n,$$

pa su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} = -1.$$

Toplotna jednačina je parabolična. ∎

Gornja tri primjera su na jednačinama sa konstantnim koeficijentima. Bilo koja linearna PDJ drugog reda sa konstantnim koeficijentima ima isti tip svugdje, jer svojstvene vrijednosti $\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \ldots \lambda_n(\mathbf{x})$ matrice $((a_{jk}(\mathbf{x}))$ ne zavise od $\mathbf{x}$.

Primjer 1.5

Triconijeva jednačina. Posmatrajmo slijeeću jednačinu sa promjenlivim koeficijentima

$$x_2 \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{1.16}$$

Provjerimo tip ove jednačine!

$$\det((a_{jk}(\mathbf{x})) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} x_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (x_2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Stoga su svojstvene vrijednosti matrice $(a_{jk}(\mathbf{x}))$:

$$\lambda_1 = x_2, \quad \lambda_2 = 1.$$

Jednačina (1.16) je

- eliptična ako je $x_2 > 0$;
- parbolična ako je $x_2 = 0$;
- hipebolična ako je $x_2 < 0$.

Triconijeva jednačina je primjer jednačine *miješanog tipa*. ∎

1.5 Tri tipa problema

Primjer 1.6

Posmatrajmo jednačinu

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Onda imamo slijedeće:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial u}{\partial x_2}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_2),$$

gdje je f 'proizvoljna' funkcija projenljive x_2. Stoga je

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \int f(x_1)dx_2 + \text{' nešto nezavisno o '}x_2 \\ &= \int f(x_1)dx_2 + \varphi(x_1), \end{aligned}$$

gdje je φ 'proizvoljna'. Stoga je 'opšte' rješenje ove jednačine

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2).$$

gdje su φ, ψ proizvoljne ($\psi := \int f(x_2)dx_2$). ∎

Mogli bi pomisliti da 'opšte' rješenje PDJ drugog reda zavisi o dvije 'proizvoljne' funkcije, ovo *NIJE* slučaj.

Primjer 1.7

Posmatrajmo Laplaceovu jednačinu

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Riješenja ove jednačine se zovu *harmonične funkcije*. Klasa harmoičnih funkcija je veoma bogata. Bilo koja analitična funkcija[1] je harmonična, kao što su i njeni realni i imaginarni dijelovi. ∎

Gornja dva primjera pokazuju da PDJ imaju 'previše' rješenja. Moramo uvesti dodatna ograničenja na rješenja.

1.5.1 Problemi granične vrijednosti

Dirichletov problem

Naći $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tako da

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \forall x \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ovdje je $f : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ data funkcija a $\partial\Omega$ je granica (rub) otvorene domene $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

[1] Potsjetnik : funkcije na kompleksim brojevima koje su kompleksno diferencijabilne na cijeloj oblasti promatranja

Neumannov problem

Naći $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ tako da

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) & = & 0, & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} & = & g(\mathbf{x}), & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Ovdje je $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ data funkcija, $\partial\Omega$ je granica (rub) otvorene domene $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a $\nu(\mathbf{x})$ jednični vanjski normalni vektor na granicu $qdpa\Omega$ u tački $\mathbf{x} \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_k} \nu_k(\mathbf{x}) \tag{1.17}$$

je izvod u pravcu $\nu(\mathbf{x})$. Ovdje pretpostavljamo da $\nu(\mathbf{x})$ postoji, tj. $\partial\Omega$ je 'dovoljno fina'.

Primjer primjenjenog problema koji je opisan pomoću iznad iznesenih problema granične vrijednosti je: naći stacionarnu temperaturnu distribuciju u homogenom izotropskom tijelu Ω ukoliko znamo stanje granice tog tijela. Homogenost znači da je tijelo ima iste značajke u svim tačkama. Izotropičnost znači da Ω ima iste značajke u svim pravcima.

1.5.2 Problemi početne vrijednosti (Cauchyjevi problemi)

Za toplotnu jednačinu:

Naći $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ tako da

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) u(\mathbf{x}, t) & = & 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) & = & u_0(\mathbf{x}), & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Za talasnu jednačinu:

Naći $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ tako da

$$\begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta) u(\mathbf{x}, t) & = & 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) & = & u_0(\mathbf{x}), & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) & = & u_1(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ovdje su u_0 i $u_1 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ date funkcije, $T > 0$ je dato, s tim da je $T = +\infty$ dozvoljeno.

U primjeni, Cauchyjevi problemi opisuju ne-stacionarne procese u *neograničenom tijelu* koje predstavlja $\mathbb{R}^n$, dok u_1, u_0 opisuju početno stanje tijela.

1.5.3 Problemi početne i granične vrijednosti (miješani problemi)

Za toplotnu jednačinu:

Naći $u : \Omega \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ tako da

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u(\mathbf{x},t) &= 0, & \forall x \in \Omega, \forall t \in (0,T) \\ u(x,t) &= f(x,t), & \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T) \\ u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}), & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

Za talasnu jednačinu:

Naći $u : \Omega \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ tako da

$$\begin{cases} (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u(\mathbf{x},t) &= 0, & \forall x \in \Omega, \forall t \in (0,T) \\ u(x,t) &= f(x,t), & \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T) \\ u(\mathbf{x},0) &= u_0(\mathbf{x}), & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},0) &= u_1(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

Ovdje su $f : \partial\Omega \times [0,T) \mapsto \mathbb{R}$ i $u_0, u_1 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ date funkcije, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvoren skup.

Gore navedeni problemi se zovu Dirichletovi problemi početne i granične vrijednosti, jer u njima imamo Dirichletov uslov

$$u(x,t) = f(x,t), \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T)$$

na lateralnom dijelu granice cilindra $\Omega \times [0,T)$.

Dobivamo Neumannov problem početne i granične vrijednosti ukoliko gornji Dirichletov uslov zamjenimo Neumannovim:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial \nu(\mathbf{x})} = g(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times [0,T).$$

U primjenama, ovi problemi granične i početne vrijednosti opisuju ne stacionarne procese u ograničenom tijelu Ω, dok u_0, u_1 opisuju početno stanje tijela, a f ili g opisuju stanje granice $\partial\Omega$ tijela Ω.

Definicija 1.5.1. Problem nazivamo *dobro postavljenim* ukoliko:

1. rješenje postoji za 'proizvoljno' date podatke;
2. rješenje je 'jedinstveno';

3. rješenje zavisi 'neprekidno' o datim podatcima.

Riječi u '.' su djelimično nejasne u ovom trenutku i zahtjevaju da se specificiraju klase prihvatljivih rješenja i datih podataka. Gornja definicija je data od strane J. Hadamarda.

Poglavlje 2

Laplaceova jednačina

2.1 Notacija

Za svako $K \subset \mathbb{R}^n$ sa $C(K)$ označavamo klasu neprekidnih funkija na K. Ako je K kompaktno, tj. zatvoreno i ograničeno, onda je svaka funkcija iz $C(K)$ ograničena.

Za otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i svako $m \in \mathbb{Z}_+$, sa $C^m(\Omega)$ označavamo klasu funkcija koje su neprekidne zajedno sa svim svojim izvodima do reda $\leq m$ na Ω.

2.2 Harmonična funkcija

Definicija 2.2.1. Funkcija $u \in C^2(\Omega)$ ze zove *harmonična* na Ω ako

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Primjer 2.1

Jasno je da je $u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + a$ harmonična $\forall a_j \in \mathbb{R}$. Primjette da je $u(x) = ax + b$ opće rješenje jednačine $u'' = 0$ u slučaju $n = 1$. ∎

Primjer 2.2

$$\omega(\mathbf{x}) = \psi(r), \quad r = |\mathbf{x}| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lančano pravilo implicira da je

$$\partial_j \omega = \psi'(r)\partial_j r = \psi'(r)\frac{x_j}{r}.$$

Primjetite da je

$$\partial_j^2 \omega = \psi''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + \psi'(r)\frac{r - \frac{x_2^2}{r}}{r^2}.$$

Stoga je

$$\Delta\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \omega(\mathbf{x}) = \psi''(r) + \psi'(r)\frac{n-1}{r}.$$

Trebamo pokazati da je desna strana zadnje jednakosti jednaka nuli. Neka je $f(r) = \psi'(r)$. Onda je $f(r) = Cr^{1-n}$ rješenje jednačine $f'(r) + f(r)\frac{n+1}{r} = 0$. Stoga

$$\psi'(r) = Cr^{1-n} \Rightarrow \psi(r) = \begin{cases} \frac{C}{2-n} r^{2-n} + C & \text{ako} \quad n > 2 \\ C \log r + C & \text{ako} \quad n = 2 \end{cases}$$

Stoga je funkcija

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} C|\mathbf{x}|^{2-n} & \text{ako} \quad n > 2 \\ C \log|\mathbf{x}| & \text{ako} \quad n = 2 \end{cases}$$

harmonična u $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Iz lančanog pravila slijedi da ako je $u(\mathbf{x})$ harmonična, onda je i funkcija $u(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ harmonična preko

$$\Omega + \mathbf{x}^0 = \{z + x^0 | y \in \Omega\} \forall \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Posljedično je funkcija

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} C|\mathbf{x} - ||^{2-n} & \text{ako} \quad n > 2 \\ C \log|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| & \text{ako} \quad n = 2 \end{cases}$$

haronična na $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{x}^0$. ∎

2.3 Greenovi identiteti

Teorema 2.3.1. *(Greenova formula/Gaussova teorema divergencije)*
Neka je Ω ograničeni otvoreni skup sa C^1 glatkom granicom $\partial\Omega$ i $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Onda je

$$\int_{\Omega} \partial_k u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \nu_k dS,$$

gdje je $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ jednični normalni vanjski vektor na $\partial\Omega$.

U slučaju $n = 1$, ovo gore je Newton-Leibntzova formula!

Primjedba 2.3.2. Pretpostavite da vektorska funkcija $g = (g_1, \ldots, g_n)$ pripada $C^1(\bar{\Omega})$. Onda nam gornja teorema daje

$$\int_\Omega \text{div } g d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} < g, \nu > dS,$$

gdje je $< g, \nu >= \sum_{k=1}^n g_k(\mathbf{x})\nu_k(\mathbf{x})$.

2.3.1 Parcijalna integracija

Neka su $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Onda teorema divergencije implicira da

$$\in_\Omega \partial_j(uv)d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uv\nu_k dS$$

odakle imamo

$$\int_\Omega (v\partial_k u + u\partial_k v)d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uv\nu_k dS$$

i konačno imamo formulu za parcijalnu integraciju:

$$\in_\Omega v\partial_k u d\mathbf{x} = -\int_\Omega u\partial_k v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} uv\nu_k dS.$$

2.3.2 Greenovi identiteti

Teorema 2.3.3. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup, neka je $\partial\Omega \in C^1$ i neka su $u \in C^2(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$. Onda (*prvi Greenov identitet*)*

$$\int_\Omega v\Delta u d\mathbf{x} = -\int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k v \partial_k u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS. \tag{2.1}$$

*Neka je dodatno $v \in C^2(\bar{\Omega})$. Onda (*drugi Greenov identitet*)*

$$\int_\Omega v\Delta u d\mathbf{x} = \int u\Delta v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} + u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS \tag{2.2}$$

Dokaz Koristeći parcijalnu integraciju dobivamo

$$\int_\Omega v\Delta u d\mathbf{x} = \int v \sum_{k=1}^n \partial_k^2 u d\mathbf{x} =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k v \partial_k u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} v \sum_{k=1}^n \partial_k u \nu_k dS =$$

$$= -\int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k v \partial_k u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

što dokazuje prvi Greenov identitet. Pretpostavimo sad da je $v \in C^2(\bar{\Omega})$. Tada imamo

$$\int_\Omega u\Delta v = -\int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k u \partial_k v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

(ovo smo dobili iz jednačine (2.1) zamjenivši mjesta u i v). Oduzimajući ovu jednakost od (2.1) dobivamo (2.2). ∎

Primjedba 2.3.4. Prvi integral na desnoj strani (2.1) možemo napisati u obliku

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^n \partial_k v \partial_k u d\mathbf{x} = \int_\Omega < \nabla v, \nabla u > d\mathbf{x}.$$

2.4 Rezultat jedinstvenosti za Dirichletov i Neumannov problem granične vrijednosti za Laplaceovu jednačinu

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen.

Dirichletov problem. Naći $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tako da

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \forall x \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (\mathcal{D}_f) \tag{2.3}$$

Dodatno pretpostavimo da je $\partial\Omega \in C^1$.

Neumannov problem. Naći $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tako da

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} = g(\mathbf{x}), & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (\mathcal{N}_g) \tag{2.4}$$

Ako je u rješenje $(\mathcal{N}_g)$, onda je i $u + const.$ također rješenje. Stoga, nemoguće je da imamo jedinstvenost za $(\mathcal{N}_g)$.

Teorema 2.4.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen, $\partial\Omega \in C^1$. Onda je rješenje $u \in C^2(\bar{\Omega})$ problema $(\mathcal{D}_f)$ određeno jedinstveno. Rješenje $u \in C^2(\bar{\Omega})$ je određeno jedinstveno modulo aditivna konstanta.*

Primjedba 2.4.2. Uslov $u \in C^2(\bar{\Omega})$ je jači od $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Dokaz Neka su u_1 i $u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ dva rješenja istog problema. Onda je

$$u := u_1 - u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$$

rješenje *homogeog* problema, tj. $f \equiv 0$. Primjenimo prvi Greenov identitet sa $v = u$.

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^n (\partial_k u)^2 d\mathbf{x} = -\int_\Omega u\Delta u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu} dS.$$

Prvi integral na desnoj strani je jednak nuli jer je u rješenje Laplaceove jednačine.

Drugi integral na desnoj strani je jednak nuli jer je $u = 0$ na $\partial\Omega$ u slučaju Dirichletovog problema , a $\frac{\partial u}{\partial\nu} = 0$ u slučaju Neumannovog problema. Stoga,

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^n (\partial_k u)^2 d\mathbf{x} = 0,$$

pa kako je integrand nenegaivan, to mora je je jednak nuli, tj.

$$\partial_k u \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \iff u = const.$$

U slučaju Dirichletovog problema, $u(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$. Stoga je $u \equiv 0$, tj. $u_1 = u_2$. Za Neumannov problem $u \equiv const. \iff u_1 = u_2 + const.$ ∎
Kasnije ćemo pokazati i jači rezultat za Dirichletov problem.

Teorema 2.4.3. *Pretpostavimo da $(\mathcal{N}_f)$ ima rješenje $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Onda*

$$\int_{\partial\Omega} g(x) dS = 0.$$

Dokaz Primjenimo prvi Greenov identitet sa $v = 1$. Onda je

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} dS = 0. \tag{2.5}$$

Uzimajući u obuir da je $\frac{\partial u}{\partial\nu} = g$ na $\partial\Omega$, dobivamo traženi identitet. ∎

Teorema 2.4.4. *(*Princip maksimuma*). Pretpostavimo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ i $\Delta u \geq 0, \forall x \in \Omega$. Onda*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \tag{2.6}$$

Primjedba 2.4.5. Neprekidna funkcija doseže maksimum na zatvorenom ograničenom skupu. Jednačina (2.6) kaže da za u na $\bar{\Omega}$ ovaj se maksimum dostiže na $\partial\Omega$. Kasnije ćemo dokazati da je se maksimum ne može doseći u Ω ako u nije konstanta.

Dokaz *Prvi korak.* Pretpostavimo da je $\Delta u(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Dokažimo da u ne može doseći svoj maksimum u Ω. Dokaz kontradikcijom:

Pretpostavimo da u doseže svoj maksimum u $x^0 \in \Omega$. Onda

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k^2} \leq 0, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Posmatrajmo funkcije

$$x_k \mapsto u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0).$$

Stoga imamo da je $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k^2} \leq 0$, tj. $\Delta u(\mathbf{x}^0) \leq 0$. Ali po pretpostavci $\Delta u(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, što je kontradikcija.

Drugi korak. $\Delta u(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Pretpostavimo da je $v(\mathbf{x}) = |x|^2$. Jasno je da je $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ i da je $\Delta v(\mathbf{x}) = 2n > 0$. Uzmimo malo $\varepsilon > 0$ i posmatrajmo funkciju $u + \varepsilon v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. jasno je da

$$\Delta(u + \varepsilon v) = \Delta u + \varepsilon \Delta v = Deltau + 2n\varepsilon > 2n\varepsilon > 0.$$

Neka je $\mathbf{x}' \in \bar{\Omega}$ takvo da je $u(\mathbf{x}') = \max_{\bar{\Omega}} u$. Onda

$$\max_{\bar{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\bar{\Omega}} v \leq u(\mathbf{x}') + \varepsilon v(\mathbf{x}') \leq$$

$$\leq \max_{\bar{\Omega}} (u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v)$$

po prvom koraku

$$\leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v.$$

Stoga

$$\max_{\bar{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\bar{\Omega}} v \leq\leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v, \forall \varepsilon > 0.$$

Sada pustimo da $\varepsilon \to 0$ kako bismo dobili :

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

S druge strane, $\max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u$ jer je $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$. Stoga imamo identitet. ∎

Posljedica 2.4.6. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ i $\Delta u(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Onda je*

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u-$$

Dokaz Primjenimo prethodni rezultat na funkciju $-u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Onda imamo

$$\min_{\bar{\Omega}} u = -\max_{\bar{\Omega}}(-u) = -\max_{\partial\Omega}(-u) = \min_{\partial\Omega} u.$$

∎

Teorema 2.4.7. *(Princip maksimuma)*

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ i $\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Tada

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| \tag{2.7}$$

Dokaz Slijedi iz Teoreme 2.4.4 i posljedice 2.4.6. ∎

Posljedica 2.4.8. *Neka je Ω data kao iznad i neka su $u_j \in C^2(\Omega) \cap C^(\bar{\Omega})$ rješenja slijedećih Dirichletovih problema*

$$\begin{cases} \Delta u_j(\mathbf{x}) &= 0, & \forall x \in \Omega \\ u_j(\mathbf{x}) &= f_j(\mathbf{x}), & \forall x \in \partial\Omega, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Onda je

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_1(\mathbf{x}) - u_1(\mathbf{x})| = \max_{\partial\Omega} |f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})|.$$

Dokaz Primjenite Teoremu 2.4.7 na harmoničnu funkciju $u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ i uzmite u obzir da je $u(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$. ∎

Teorema 2.4.9. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i otvoren. Onda je rješenje $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ problema ($\mathcal{D}_f$) određeno jedinstveno i zavisi neprekidno o grenici.*

Dokaz Prati iz posljedice 2.4.8. ∎

Primjedba 2.4.10.
- Zadnja teorema ne potvrđuje postojanje rješenja! Dokaz postojanja rješenja je mnogo komplikovaniji.
- Zadnji rezultat jedinstvenosti je mnogo jači od prethodnog, teoreme 2.4.1, jer saa ne tražimo da je $\partial\Omega \in C^1$ i da je $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

2.5 Fundamentalno rješenje Laplaceove jednačine i formula reprezentacije

Znamo da je za bilo koje $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ funkcija

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} C|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^{2-n}, & \text{ako} \quad n \geq 3 \\ C\log|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|, & \text{ako} \quad n = 2 \end{cases}$$

harmonična u $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^0\}$ za bilo koju konstantu C. Posmatrajmo funkciju

$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{x}^0) = \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = \Psi(|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|) =$$

$$= \begin{cases} \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & \text{ako} \quad n \geq 3 \\ \frac{\log|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}{2\pi}, & \text{ako} \quad n = 2 \end{cases}$$

gdje je ω_n 'površina' jedinične sfere u $\mathbb{R}^n$. Za $n = 3$ npr. $\omega_n = 4\pi$.

Funkcija $\Gamma(\mathbf{x}, 0) = \Gamma(\mathbf{x})$ se zove *fundamentalno rješenje Laplaceove jednačine*.

Primjedba 2.5.1. 'Površina' sfere $S(\mathbf{x}^0, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| = \rho\}$ je jednaka

$$|S(\mathbf{x}^0, \rho)| = \omega_n \rho^{n-1}$$

Teorema 2.5.2. *(Reprezentacijska formula)*
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i otvoren, $\partial\Omega \in C^1$ i $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Onda za svako $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ imamo

$$u(\mathbf{x}^0) = \int_\Omega \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\Delta u(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(x)})dS.$$

Dokaz Uzmimo malo $\varepsilon > 0$ i posmatrajmo domenu $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(\mathbf{x}^0, \varepsilon)}$, gdje je

$$B(\mathbf{x}^0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| < \varepsilon\}$$

i $\overline{B(\mathbf{x}^0, \varepsilon)}$ je zatvorenje $B(\mathbf{x}^0, \varepsilon)$, tj.

$$\overline{B(\mathbf{x}^0, \varepsilon)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| \leq \varepsilon\}.$$

Primjenimo Greenov drugi identitet sa $v = \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{x}^0)$ za Ω_ε. Jasno je da je $\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ C^2 glatka na $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^0\}$, konkretno $\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$. Također je jasno da je $u \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\delta u(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega_\varepsilon} u(\mathbf{x})\Delta\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)d\mathbf{x}+$$

$$+\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu}\right)dS.$$

Prvi integral na desnoj strani zadnje jednakosti je jednak nuli, jer je $\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ harmonična na $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{x}^0\}$.

Kako je granica $\partial\Omega_\varepsilon=\partial\Omega\cup S(\mathbf{x}^0,\epsilon)$, gdje je $S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)$ sfera $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|=\varepsilon\}$, imamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\delta u(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu}\right)dS+$$

$$+\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}\left(\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu}\right)dS.$$

Neka su

$$I_1(\varepsilon)=\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}dS$$

$$I_2(\varepsilon)=\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu}dS$$

Dokažimo da $I_1(\varepsilon)\to 0$ kako $\varepsilon\to 0$. Neka je

$$M=\sup_{\bar\Omega}|\nabla u|.$$

Onda,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|=\left|\sum_{k=1}^n\partial_k u\cdot\nu_k\right|=|<\nabla u,\nu>|\le M$$

jer je ν jedninični vektor. Stoga

$$\begin{aligned}|I_1(\varepsilon)| &\le \int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}|\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)|\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|dS\le\\ &\le M\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}|\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)|dS.\end{aligned}$$

Kako je $|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|=\varepsilon$, $\forall\mathbf{x}\in S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)$ imamo

$$\begin{aligned}|I_1(\varepsilon)| &\le \begin{cases} const\ \varepsilon^{2-n}\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}1dS, & n\ge 3\\ const\ \log\varepsilon\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}1dS, & n=2\end{cases}\\ &= \begin{cases} const\ \varepsilon, & n\ge 3\\ const\ \varepsilon|\log\varepsilon|, & n=2\end{cases}\end{aligned}$$

Stoga $I_1(\varepsilon) \to 0$ kako $\varepsilon \to 0$.

Posmatrajmo sada $I_2(\varepsilon)$. Jasno je da je

$$\nu(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}(*)$$

Trebamo naći $\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})}, \mathbf{x} \leq S(\mathbf{x}^0, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\partial x_k} \nu_k(\mathbf{x}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|)}{\partial x_k} \left(-\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} \right) = \\
\text{(lan.pravilo)} &= -\sum_{k=1}^{n} \psi'(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|) \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} = \\
&= -\psi'(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0)^2 = \\
&= -\psi'(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|)
\end{aligned}$$

Kako je

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} r^{2-n}, & \text{ako} \quad n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log r, & \text{ako} \quad n = 2 \end{cases}$$

imamo da je

$$\psi'(r) = \frac{1}{\omega_n} r^{1-n}, n \geq 2.$$

Stoga je

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})} = -\frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n}, \quad \forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}^0, \varepsilon).$$

Stoga, vraćajući se sada I_2, imamo

$$I_2(\varepsilon) = \int_{S(\mathbf{x}^0, \varepsilon)} u(\mathbf{x}) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})} dS = -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(\mathbf{x}^0, \varepsilon)} u(\mathbf{x}) dS$$

$$= -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(\mathbf{x}^0, \varepsilon)} u(\mathbf{x}) dS - \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(\mathbf{x}^0, \varepsilon)} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}^0)) dS$$

$$= -u(\mathbf{x}^0) - \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(\mathbf{x}^0, \varepsilon)} (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}^0)) dS$$

Odakle dobijamo

$$
\begin{aligned}
|I_2(\varepsilon)+u(\mathbf{x}^0)| &\leq \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{x}^0)|dS \\
&\leq \max_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|=\varepsilon}|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{x}^0)|\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S(\mathbf{x}^0,\varepsilon)}1dS \\
&= \max_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|=\varepsilon}|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{x}^0)| \to 0 \text{ kako } \varepsilon\to 0^+,
\end{aligned}
$$

jer je u neprekidna. Dakle, uzimajući $\varepsilon \to 0^+$, dobivamo

$$
\int_{\Omega_\varepsilon}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\delta u(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial\nu} - u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu}\right)dS + I_1(\varepsilon) - I_2(\varepsilon)
$$

odakle slijedi rezultat

$$
\int_{\Omega}\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\delta u(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial\nu} - u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu}\right)dS + u(\mathbf{x}^0).
$$

∎

Posljedica 2.5.3. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen i otvoren, $\partial\Omega \in C^1$ i $u \in C^2(\bar{\Omega})$ je* harmonična. *Onda*

$$
u(\mathbf{x}^0) = \int_{\partial\Omega}\left(u(\mathbf{x})\frac{\partial\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial\nu(\mathbf{x})} - \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial\nu(\mathbf{x})}\right)dS, \qquad \mathbf{x}^0 \in \Omega
$$

Dokaz Prati iz reprezentacijske formule, jer je $\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$. ∎
zadnja formula predstavlja vrijednosti harmonične funklcije u Ω pomoću vrijednosti funkcije i njenog normalnog izvoda na $\partial\Omega$. Ova formula je slična Cauchyjevom integralu iz kompleksne analize.

Primjedba 2.5.4. Harmonična funkcija je *jedinstveno* definisana pomoću njenih vrijednosti na $\partial\Omega$ ili pomoću vrijednosti njenog normalnog izvoda na $\partial\Omega$ (zbog jedinstvenosti dokazane ranije). Stoga $u|_{\partial\Omega}$ i $\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}$ *nisu nezavisne.*

2.6 Primjene reprezentacijske formule

Teorema 2.6.1. Teorema srednje vrijednosti - Gaussov zakon aritmetičke sredine

Pretpostavimo da je $u \in C^2(\Omega)$ *harmonična funkcija i neka je* $\overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)} \subset \Omega$. *Onda je*

$$u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{|S(\mathbf{x}^0, \rho)|} \int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} u(\mathbf{x}) dS,$$

gdje je $|S(\mathbf{x}^0, \rho)| = \omega_n \rho^{n-1}$ *je 'površina' sfere* $S(\mathbf{x}^0, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} | |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \rho\}$.

Dokaz Kako je $u \in C^2(\overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)})$ možemo primjeniti reprezentacijsku formulu

$$u(\mathbf{x}^0) = \int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} \left(u(\mathbf{x}) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})} - \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} \right) dS.$$

Za bilo koje $\mathbf{x} \in S(\mathbf{x}^0, \rho)$ imamo da je $\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})} = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} = \frac{1}{|S(\mathbf{x}^0,\rho)|}$, $\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \psi(\rho)$, vidi dokaz reprezenatacijske formule. Stoga

$$u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{|S(\mathbf{x}^0, \rho)|} \int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} u(\mathbf{x}) dS - \psi(\rho) \int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} dS.$$

Trebamo dokazati da je

$$\int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} dS = 0.$$

Ovo slijedi iz Greenovog prvog identiteta - vidi dokaz teoreme 2.4.3 npr. ∎

Lema 2.6.2. *Pretpostavimo da su uslovi zadnje teoreme zadovoljeni i pretpostavimo da je*

$$u(\mathbf{x}^0) = M := \max_{\overline{B(\mathbf{x}^0,\rho)}} u.$$

Onda je $u(\mathbf{x}) = M, \forall \mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)}$.

Dokaz PRetpostavimo da $\exists \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, \rho)$ tako da $u(x) \neq M$, tj. $u(x) < M$. Kako je u neprekidna funkcija, postoji $\delta > 0$ tako da

$$u(\mathbf{y}) < M, \forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta).$$

Neka je $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = \Gamma \leq \rho$. Jasno je da imamo

$$u(\mathbf{y}) \leq M, \forall \mathbf{y} \in S(\mathbf{x}^0, \rho),$$

$$u(\mathbf{y}) < M, \forall \mathbf{y} \in S(\mathbf{x}^0, \rho) \cap B(\mathbf{x}, \delta).$$

Malopređašnja teorema srednje vrijednosti implicira

$$M = u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{|S(\mathbf{x}^0, \rho)|} \int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} u(\mathbf{y}) dS < M \frac{1}{|S(\mathbf{x}^0, \rho)|} \int_{S(\mathbf{x}^0,\rho)} dS = M$$

Kontradikcija! ∎

Teorema 2.6.3. Jaki princip maksimuma *Neka je* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *ograničen, otvoren i* konektovan *skup! Pretpostavimo da je* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *harmonična i* nekonstantna *funkcija. Onda*

$$\min_{\partial\Omega} < u(\mathbf{x}) < \max_{\partial\Omega} u, \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Primjedba 2.6.4. Ovaj rezultat je jači od prethodnog maksimalnog principa, koji koristi $\leq$.

Dokaz *Prvi korak.* Dovoljno je dokazati da je $u(\mathbf{x}) < \max_{\partial\Omega} u, \forall \mathbf{x} \in \Omega$, jer nam ova nejednakost primjenjena na $-u$ daje

$$-u(\mathbf{x}) < \max_{\partial\Omega}(-u) = -\min_{\partial\Omega} u, tj.$$

$$\min_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Drugi korak. Pretpostavimo da $\exists \mathbf{x}^0 \in \Omega$, tako da $u(\mathbf{x}^0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u$. Uzmimo bilo koje $\mathbf{y} \in \Omega$. Trebamo dokazati da je $u(\mathbf{y}) = M$. Kako je Ω konektovan skup, tačke $\mathbf{x}^0$ i $\mathbf{y}$ možemo povezati slomljenom linijom L koja leži u cijelosti u Ω.

Uzmimo pozitivno $\varepsilon < d(L, \partial\Omega)$. Uzmimo tačke $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{m-1}, \mathbf{x}^m = \mathbf{y} \in L$ i

$$|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}| < \varepsilon, k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Jasno je da je zatvoreno lopta $\overline{B(\mathbf{x}^k, \varepsilon)} \subset \Omega$ i da je $\mathbf{x}^{k+1} \in B(\mathbf{x}^k, \varepsilon), k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Kako je $u(\mathbf{x}^0) = M$, lema 2.6.2 implicira $u(\mathbf{x}) = M, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, \varepsilon)$. Konkretno, $u(\mathbf{x}^1) = M$. Primjenimo lemu 2.6.2 kako bismo dobilo da $u(\mathbf{x}) = M, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^1, \varepsilon)$. Konkretno, $u(\mathbf{x}^2) = M$. Ponovimo ovaj argument m puta kako bismo dobili da je $u(\mathbf{x}^m) = M$, tj. $u(\mathbf{y}) = M$. ∎

Teorema 2.6.5. *Neka je* Ω *otvoren i ograničen i neka je* $u \in C^2(\Omega)$ *harmonična funkcija. Tada je* $u \in C^\infty(\Omega) := \cap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$.

Dokaz Uzmimo proizvoljno $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Dovoljno je dokazati da je u C^∞ glatka u okolini $\mathbf{x}^0$. Kako je Ω otvoren, $\exists \delta > 0$, tako da $\overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)} \subset \Omega$. Primjenimo formulu reprezentacije

$$u(\mathbf{y}) = \int_{S(\mathbf{x}^0, \delta)} \left(u(\mathbf{x}) \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \nu(\mathbf{x})} - \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(\mathbf{x})} \right) dS, \forall y \in B(\mathbf{x}^0, \delta).$$

Kako je funkcija $v(\mathbf{y}) := \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})\ C^{\infty}$ glatka svugdje u $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ u integralu, jer je $\mathbf{x} \in S(\mathbf{x}^0, \rho), \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}^0, \rho)$, možemo diferencirati integral s obzirom na parametar $\mathbf{y}$ beskonačno mnogo puta. Stoga je $u \in C^{\infty}(B(\mathbf{x}^0, \delta))$. ∎

Primjedba 2.6.6. Na sličan način možemo pokazati da je harmonična funkcija $u \in C^2(\Omega)$ *realna analitična* na Ω, tj. da za bilo koje $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ Taylorova ekspanzija (red) funkcije u u $\mathbf{x}^0$ konvergira u okolini $\mathbf{x}^0$.

2.7 Greenova funkcija

PRetpostavimo da je Ω otvoren i ograničen. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, gdje je $\partial\Omega \in C^1$ i $u \in C^2(\overline{\Omega})$ je harmonična. Onda formula reprezentacije tvrdi da

$$u(\mathbf{x}^0) = \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \nu(x)}) dS, \forall \mathbf{x}^0 \in \Omega.$$

Motivacija: Pretpostavimo da je $h \in C^2(\bar{\Omega})$ harmonična. Onda Greenov drugi identitet implicira

$$\int_{\partial\Omega} \left(h\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial h}{\partial \nu} dS \right) = 0.$$

Onda, kombinirajući ovo, imamo

$$u(\mathbf{x}^0) = \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{x})\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)}{\partial \nu} - H(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS, \forall \mathbf{x}^0 \in \Omega,$$

gdje je $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - h(\mathbf{x})$.

Pretpostavimo da $\forall \mathbf{x}^0 \in \Omega$ postoji harmonična funkcija $h_{x^0} \in C^2(\bar{\Omega})$ tako da

$$h_{\mathbf{x}^0} = -\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Tada funkcija $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + h_{\mathbf{x}^0}$ zadovoljava granični uslov $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = 0, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$. Stoga imamo

$$u(\mathbf{x}^0) = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)}{\partial \nu(\mathbf{x})} dS. \tag{2.8}$$

Definicija 2.7.1. Funkcija $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + h_{\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})$, gdje je $h_{\mathbf{x}^0} \in C^2(\bar{\Omega})$ je rješenje slijedećeg Dirichletovog problema

$$\begin{cases} \Delta h_{\mathbf{x}^0} &= 0,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ h_{\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = -\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

se naziva *Greenova funkcija Dirichletovog problema u* Ω.

Primjedba 2.7.2. Primjetite da je zbog rezultata jedinstvenosti rješenje Dirichletovog problema funkcija $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ jedinstveno definisana sa Ω ako uopće postoji.

Pretpostavimo da Greenova funkcija postoji. Onda vrijede slijedeći rezultati:

Teorema 2.7.3. a