Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 1

Predati rad predmetnom asistentu na kraju druge sedmice predavanja
(17.10.2008.)

1. Dokažite da je
$$\Delta f = \mathrm{div} \nabla f.$$
Kao i inače, $\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \ldots + \partial_n^2 f$, $\nabla f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f)$ i $\mathrm{div}(F_1, F_2, \ldots, F_n) := \sum_{k=1}^n \partial_k F_k$.

2. Dokažite da u polarnim koordinatama
$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi$$
Laplaceova jednačina $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ ima slijedeću formu
$$r^{-1} \partial_r (r \partial_r u) + r^{-2} \partial_\varphi^2 u = 0.$$

3. Pokažite da se promjenom nezavisnih i zavisnih promjenljivih svaka jednačina sa konstantnim koeficijentima oblika
$$\sum_{k=1}^n b_k \partial_k^2 u + \sum_{k=1}^n a_k \partial_k u + au = 0, \quad b_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$
može reducirati u formu
$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_k^2} + cv(y) = 0,$$
gdje je c odgovarajuća konstanta.