Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 1

Predati rad predmetnom asistentu na kraju druge sedmice predavanja
(17.10.2008.)

1. Dokažite da je
$$\Delta f = \mathrm{div} \nabla f.$$
Kao i inače, $\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \ldots + \partial_n^2 f$, $\nabla f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f)$ i $\mathrm{div}(F_1, F_2, \ldots, F_n) := \sum_{k=1}^n \partial_k F_k$.

   Rješenje. Iz defiicija slijedi da je
$$\mathrm{div}\ \nabla f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k (\nabla f)_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k^2 f = \Delta f.$$

2. Dokažite da u polarnim koordinatama
$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$$
Laplaceova jednačina $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ ima slijedeću formu
$$r^{-1}\partial_r(r\partial_r u) + r^{-2}\partial_\varphi^2 u = 0.$$

   Rješenje. Lančano pravilo implicira da je
$$\partial_k u = \frac{\partial r}{\partial x_k}\partial_r u + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\partial_\varphi u. \tag{1}$$
Kako je
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x_2}{x_1} + const,$$
imamo :
$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \cos\varphi,$$
$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} = -\frac{\sin\varphi}{r},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Ove formule zajedno sa (1) impliciraju da je

$$\begin{aligned}\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u &= \partial_1\left(\cos\varphi\,\partial_r u - \frac{\sin\varphi}{r}\,\partial_\varphi u\right)\\ &+ \partial_2\left(\sin\varphi\,\partial_r u + \frac{\cos\varphi}{r}\,\partial_\varphi u\right).\end{aligned}$$

Primjenjujući još jednom jednačinu (1) i izračunavši sve izvode, dobivamo željeni rezultat.

3. Pokažite da se promjenom nezavisnih i zavisnih promjenljivih svaka jednačina sa konstantnim koeficijentima oblika

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k^2 u + \sum_{k=1}^{n} a_k\partial_k u + au = 0, \quad b_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

može reducirati u formu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_k^2} + cv(y) = 0, \tag{2}$$

gdje je c odgovarajuća konstanta.

Rješenje. Neka je

$$v(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}x_k\right)\ u(x),\ \text{tj. } u(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}x_k\right) v(x).$$

Kako je

$$\partial_k^2(f\ g) = (\partial_k^2 f)g + 2(\partial_k f)\partial_k g + f\partial_k^2 g,$$

direktna kalkulacija pokazuje da (2) uzima formu

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}x_k\right)\left[\sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k^2 v + \left(a - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}\right)v\right] = 0,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k^2 v + \left(a - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}\right)v = 0.$$

Uzimajući $x_k = \sqrt{b_k}y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ dobivamo željeni rezultat sa

$$c = a - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{b_k}.$$