Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 2

Predati rad predmetnom nastavniku (27.10.2008.)

Kako ovo još nismo definisali na predavanjima, evo ga:

Definicija 0.1. Funkcija koja je rješenje Laplaceove jednačine (1.9) se naziva *harmonična funkcija*.

1. Dokažite da je za svako $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ funkcija

$$v(\mathbf{x}) := \begin{cases} |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^{2-n} & ako \quad n > 2 \\ \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| & ako \quad n = 2 \end{cases}$$

harmonična u $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^0\}$, tj. v je C^2 glatka i $\delta v(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^0\}$.

2. Dokažite da za bilo koje dvije C^2 glatke funkcije u i v imamo

$$v\delta u = \text{div } (v\nabla u) - \nabla v \nabla u.$$

3. Dokažite da u sferičnim koordinatama

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi,\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi,\ x_3 = r\cos\varphi,$$

$$r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

Laplaceova jednačina $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_3^2 u = 0$ ima slijedeću formu

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right) u = 0.$$

[SAVJET: Koristeći reprezantaciju Laplaceovog operatora u polarnim koordinatama nađite $\partial_3^2 u + \partial_s^2 u$ i $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u$, gdje je $s = r\sin\theta$ i konzekventno $x_1 = s\cos\varphi$, $x_2 = s\sin\varphi$.]