Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 3

Predati rad predmetnom profesoru na kraju treće sedmice predavanja

1. Neka je
$$\partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \bar{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$
Dokažite da je $\Delta = 4\partial\bar{\partial} = 4\bar{\partial}\partial$. Koristeći Cauchy–Riemannove jednačine, pokažite da je bilo koja analitična funkcija harmonična! Dokažite da su $Re(u)$ i $Im(u)$ harmonične za bilo koju harmoničnu funkciju u.

   Rješenje. Jasno je da je
$$\partial\bar{\partial} = \bar{\partial}\partial = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \left(i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}(\partial_1^2 + \partial_2^2) = \frac{1}{4}\Delta.$$
Neka je $u = v + iw$ analitička funkcija. Ovdje $v = \operatorname{Re} u$ i $w = \operatorname{Im} u$. Koristeći Cauchy-Riemannove jednačine dobivamo
$$\bar{\partial}u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(v + iw) = \frac{1}{2}((\partial_1 v - \partial_2 w) + i(\partial_1 w + \partial_2 v)) = 0.$$
Posljedično imamo $\Delta u = 4\partial\bar{\partial}u = 0$, tj. u je harmonična funkcija. Uzimajući realne i imaginarne dijelove jednačine $\Delta u = 0$ daje $\Delta v = 0$ i $\Delta w = 0$ respektivno, tj. $\operatorname{Re} u$ i $\operatorname{Im} u$ su harmonične funkcije.

2. Neka je A realna ortogonalna matrica, tj. $A^T = A^{-1}$. Pokažite da u koordinatama $y = Ax$ Laplacian
$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$
uzima uobičajeni oblik
$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}.$$

(Pomoć: Ako je $A = (a_{jk})$, onda je $y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k$.)

Rješenje. Neka je $A = (a_{jk})$. Onda je $y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k$. Po lančanom pravilu imamo da je

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j}.$$

Stoga imamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \sum_{l=1}^n a_{lk} \frac{\partial}{\partial y_l} \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j} = \sum_{j,l=1}^n a_{lk} a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_j}.$$

Stoga

$$\Delta u = \sum_{j,l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{lk} a_{jk} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_j}.$$

Jednakost $A^T = A^{-1}$ implicira da je $A^T A^{-1} = I$, tj.

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} a_{jk} = \delta_{jl}.$$

Stoga je

$$\Delta u = \sum_{j,l=1}^n \delta_{jl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l \partial y_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}.$$