Parcijalne diferencijalne jednačine - Vježbe 4

Predati rad predmetnom natavniku na kraju pete sedmice predavanja
(10.11.2008.)

1. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i neka je $\Omega^- := \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} = \mathbb{R}^n \setminus (\Omega \cup \partial\Omega)$. Pretpostavite da je $u \in C^2(\Omega^-) \cap C(\overline{\Omega^-})$, $\Delta u = 0$ na Ω^- i $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0$. Pokažite da je
$$\max_{\Omega^-} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$
[Pomoć: Primjenite princip maksimuma na skup
$$\Omega_R^- := \Omega^- \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < R\},\ R > 0.$$
i onda pustite da $R \to \infty$.]

2. Koristeći zadatak 1 sa trećih vježbi pokažite da su funkcije
$$r^k \cos k\varphi,\ r^k \sin k\varphi, \quad k \in \mathbb{N}$$
harmonične. Ovdje je $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$.

   Nađite rješenje slijedećeg Dirichletovog problema za jedinični disk:
$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) &= 0, & |\mathbf{x}| < 1 \\ u(e^{i\varphi}) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi)), & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

3. Neka je
$$f(e^{i\varphi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi)),\ 0 \le \varphi < 2\pi \tag{1}$$
gdje je red apsolutno konvergentan. Dokažite da
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos(k\theta)d\theta,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin(k\theta)d\theta, \tag{2}$$
[Pomoć: pomnožite obje strane jednačine (1) sa $\cos m\varphi$ ili $\sin m\varphi$ i integrirajte rezultat od 0 do 2π.]

4. Neka je f funkcija iz prethodnog zadatka. Poažite da je rješenje Dirichletovog problema

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) &= 0, \qquad |\mathbf{x}| < 1 \\ u(e^{i\varphi}) &= f(e^{i\varphi}), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

dato formulom

$$u(r\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos[k(\theta - \varphi)] \right) d\theta.$$

Dokažite da je

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\omega) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \omega},$$

[Pomoć: $1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k\omega) = Re(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty}) z^k, \ z = r \exp(i\omega)$].

Odavdje izvedite Poissonovu formulu

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}.$$